

Leképezések, ekvivalenciarelációk, részbenrendezések

Definíció: Legyen $\varphi: A \rightarrow B$, $\psi: B \rightarrow A$. Azt mondjuk, hogy ψ a φ *jobbinverze*, ha $\varphi\psi = \text{id}_A$ (azaz $(a\varphi)\psi = a$ minden $a \in A$ -ra), és ψ a φ *balinverze*, ha $\psi\varphi = \text{id}_B$ (azaz $(b\psi)\varphi = b$ minden $b \in B$ -re).

1. Legyenek A, B nemüres halmazok, és legyen $\varphi: A \rightarrow B$. Igazolja, hogy
 - (a) φ -nek akkor és csak akkor létezik jobbinverze, ha φ injektív, és
 - (b) φ -nek akkor és csak akkor létezik balinverze, ha φ szürjektív.
2. Az alábbi A halmaz és A -n értelmezett ρ reláció esetén döntse el, hogy ρ ekvivalenciareláció-e, illetve részbenrendezés-e A -n. Ha ρ ekvivalenciareláció, adja meg a hozzá tartozó osztályozást. Ha ρ részbenrendezés és A véges, rajzolja föl az $(A; \rho)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.
 - (a) $A = \mathbb{N}_0$; $\rho = |$;
 - (b) $A = \mathbb{N}$; $a \rho b \Leftrightarrow 6 \mid ab$;
 - (c) $A = \mathbb{Z}$; $a \rho b \Leftrightarrow 6 \mid a^2 - b^2$;
 - (d) $A = \mathbb{Z}$; $\rho = |$;
 - (e) A a 12 összes pozitív osztóinak halmaza; $\rho = |$;
 - (f) $A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$; $(a, b) \rho (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$;
 - (g) $A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$; $(a, b) \rho (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

Definíció: Legyen A tetszőleges halmaz, ρ, σ pedig relációk A -n.

- ρ *inverze* a következő feltétellel definiált ρ^{-1} reláció A -n: $a \rho^{-1} b \Leftrightarrow b \rho a$.
 - ρ és σ *szorzata* a következő feltétellel definiált $\rho\sigma$ reláció A -n:
 $a \rho\sigma b \Leftrightarrow$ van olyan $c \in A$, hogy $a \rho c$ és $c \sigma b$.
 - Az *egyenőség reláció* A -n a következő feltétellel definiált ω_A reláció:
 $a \omega_A b \Leftrightarrow a = b \in A$.
3. Legyen ρ tetszőleges reláció egy A halmazon. Igazolja, hogy
 - (a) ρ akkor és csak akkor reflexív, ha $\omega_A \subseteq \rho$;
 - (b) ρ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\rho^{-1} \subseteq \rho$;
 - (c) ρ akkor és csak akkor tranzitív, ha $\rho\rho \subseteq \rho$;
 - (d) ρ akkor és csak akkor ekvivalenciareláció, ha $\omega_A \subseteq \rho = \rho\rho^{-1}$.
 4. Legyen ρ tetszőleges reláció egy A halmazon. Bizonyítsa be, hogy ha ρ reflexív és tranzitív, akkor
 - (a) $\varepsilon = \rho \cap \rho^{-1}$ ekvivalenciareláció A -n, és
 - (b) ε ekvivalenciaosztályainak $A/\varepsilon = \{\bar{a} : a \in A\}$ halmazán részbenrendezés a következő $\leq$ reláció: $X \leq Y \Leftrightarrow$ van olyan $a \in X$ és $b \in Y$, amelyre $a \rho b$.
 5. Legyen ρ tetszőleges reláció egy A halmazon. Mutassa meg, hogy akkor és csak akkor van olyan $\varphi: A \rightarrow A$ leképezés, amelyre $\rho = \{(a, a\varphi) : a \in A\}$ (azaz φ gráfja ρ), ha $\omega_A \subseteq \rho\rho^{-1}$ és $\rho^{-1}\rho \subseteq \omega_A$.