

Polinomiális tétel, binomiális tétel, leképezések

1. Mi az x^8 együtthatója $(2 + 3x + 5x^2)^8$ -ban?
2. Mi a $\left(3x^2 + 7 - \frac{5}{x}\right)^4$ kifejezés konstans tagja?

Jelölés: Ha $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ ($k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$), legyen

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}.$$

3. Igazolja kombinatorikai úton, hogy

- (a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ($0 \leq k \leq n$);
- (b) $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \binom{n-1}{k_1-1, k_2, \dots, k_r} + \dots + \binom{n-1}{k_1, \dots, k_{r-1}, k_r-1}$
($k_1 + k_2 + \dots + k_r = n, k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$);
- (c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$);
- (d) $\sum_{k_1+k_2+k_3=n} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} = 3^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$);
- (e) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$);
- (f) $\sum_{k=0}^{\ell} \binom{m}{k} \binom{n-m}{\ell-k} = \binom{n}{\ell}$ ($0 \leq m, \ell \leq n$).

Definíció: Legyen $\varphi: A \rightarrow B$, $\psi: B \rightarrow A$. Azt mondjuk, hogy ψ a φ *jobbinverze*, ha $\varphi\psi = \text{id}_A$ (azaz $(a\varphi)\psi = a$ minden $a \in A$ -ra), és ψ a φ *balinverze*, ha $\psi\varphi = \text{id}_B$ (azaz $(b\psi)\varphi = b$ minden $b \in B$ -re).

4. Legyen $\varphi: A \rightarrow B$. Igazolja, hogy

- (a) φ -nek akkor és csak akkor létezik jobbinverze, ha φ injektív, és
- (b) φ -nek akkor és csak akkor létezik balinverze, ha φ szürjektív.