

Teljes indukció

1. A Fibonacci-számok sorozatát a következő rekurzív definíció határozza meg:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \text{ és minden } n \text{ természetes számra } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Igazolja, hogy minden n természetes számra

- (a) $\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$;
- (b) $F_n < 2^n$;
 $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$, ha $n \geq 3$;
- (c) ha n egész számú többszöröse 5-nek, akkor F_n is az.

2. Igazolja, hogy minden n természetes számra

- (a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;
- (b) $n < 2^n$;
- (c) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$;
- (d) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ egész számú többszöröse 7-nek.

3. Van egy kétserpenyős egyensúlyi mérlegünk és egy súlykészletünk, amely minden nemnegatív k egészre egy db 3^k g-os súlyt tartalmaz. Igazolja, hogy ezzel a mérleggel és súlykészlettel minden olyan tárgy súlyát meg tudjuk állapítani, amelynek a súlya g-ban kifejezve egész szám. [Feltesszük, hogy a mérleg serpenyőibe bele tudjuk tenni az adott tárgyat és korlátlan számú súlyt is.]
4. Egy távoli hegyvidéken haladó, önmagába visszatérő túraútvonal mentén n darab turistaház található, s mindegyikben valamennyi víz, amit az ott megpihenő túrázó magához vehet. Az n turistaházban pontosan annyi víz van összesen, amennyi a túraútvonal megtételéhez elegendő (annyi viszont nem biztos, hogy azzal a következő turistaházig el lehet jutni). Igazolja, hogy ha egyidejűleg csak egy túrázó jár az úton, akkor található olyan turistaházat, hogy ha onnan indul, akkor vízhiány nélkül végig tud menni az útvonalon.