A 2019. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2019. október 25. – 2019. november 4.

1. feladat. Bizonyítandó, hogy ha egy X Hausdorff-tér minden altere σ-kompakt, akkor X megszámlálható.

2. feladat. Legyen R nemkommutatív egységelemes véges gyűrű. Mutassuk meg, hogy ha R minden nemnulla I ideálja esetén az $I \cup \{1\}$ halmaz által generált részgyűrű maga R, akkor R egyszerű gyűrű.

3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan egész számokból álló m, n számpár van, hogy $1 < m < n$ és az $(m, n), (m, n+1), (m+1, n)$, és $(m+1, n+1)$ legnagyobb közös osztók mindegyike nagyobb, mint $\sqrt{n}/999$.

4. feladat. Egy $n \times m$-es mátrixot szépnek mondunk, ha minden egész számot 1-től nm-ig pontosan egyszer tartalmaz, és az 1 az egyetlen olyan elem, ami mind a sorában, mind az oszlopában a legkisebb. Mutassuk meg, hogy a szép $n \times m$-es mátrixok száma $(nm)!n!m!/(n+m-1)!$.

5. feladat. Igazoljuk, hogy minden $S \subset \mathbb{R}^d$ konvex (kompakt, belső ponttal rendelkező) testre van olyan pozitív α konstans, amelyre igaz az, hogy ha S-et előállítjuk félterek metszeteként, akkor $\mathbb{R}^d$ minden P pontjára P távolsága valamelyik féltértől legalább α-szorosa a P pont S-től vett távolságának.

6. feladat. Legyen d pozitív egész és $1 < a \leq (d+2)/(d+1)$. Adott $x_0, x_1, \ldots, x_d \in (0, a-1)$ esetén definiáljuk az $\{x_k\}_{k \geq 0}$ sorozatot az $x_{k+1} = x_k(a - x_{k-d})$, $k \geq d$, rekurzióval. Mutassuk meg, hogy $\lim_{k \to \infty} x_k = a - 1$.

7. feladat. Legyen P polinom, és tegyük fel, hogy $L = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| = 1\}$ Jordan-görbe (körrel homeomorf). Igazoljuk, hogy P' minden zérushelye L belsejében van.

8. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy mérhető $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $f(x+t) - f(x)$ mint x függvénye lokálisan integrálható minden t esetén, akkor f is lokálisan integrálható.

9. feladat. Van-e olyan függvényegyenlet[1], amelynek van megoldása, és minden megoldásának értékkészlete az egész számok halmaza?

[1]Egy függvényegyenlet $E = 0$ alakú, ahol E függvényforma. A függvényformák halmaza a legszűkebb olyan véges jelsorozatokból álló $\mathcal{F}$ halmaz, amely tartalmazza az összes x_i, $i = 1, 2, \ldots$ változót, az összes $r \in \mathbb{R}$ valós konstanst, és amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ha $E, E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, akkor $E_1 + E_2, E_1 \cdot E_2$ és $f(E)$ is $\mathcal{F}$-beliek (itt f előre rögzített függvényszimbólum). Az $E = 0$ függvényegyenlet megoldása olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $E = 0$ a változók minden valós értékére fennáll. Pl. $f\big(x_1 + f(\sqrt{2} \cdot x_2 \cdot x_2)\big) + (-\pi) + (-1) \cdot x_1 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$ függvényegyenlet.

10. feladat. Igazoljuk, hogy ha A és B pozitív önadjungált operátorok a H komplex Hilbert-téren, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n x\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|B^n x\|^{1/n}$$

pontosan akkor teljesül minden $x \in H$ esetén, ha $A^n \leq B^n$ minden pozitív egész n-re.

A megoldásokat magyar nyelven, jól olvashatóan, lehetőleg gépelve, feladatonként külön papírra írva, továbbá a versenyzők nevének, évfolyamának, végzettségének, pontos lakcímének és e-mail címének feltüntetésével 2019. november 4-én (hétfőn) magyar idő szerint 12.00 óráig

- személyesen lehet benyújtani (az átvétel időpontját igazolják) az SZTE TTIK Bolyai Intézet irodáján (6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.)
- vagy ugyanezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére: Kevei Péter, SZTE TTIK Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
- vagy elektronikusan lehet elküldeni a `kevei@math.u-szeged.hu` címre PDF formátumban.

Jó munkát kívánunk!

a Versenybizottság