Egy gyöngyszem az ókor matematikájából
Egyetemi Tavasz 2012

Klukovits Lajos

SZTE TTIK Bolyai Intézet

2012. április 28.

Pitagorasz egy tétele

Bölcskei,..., Vancsó: Matematika a 7.-8. osztálynak

Bármely derékszögű háromszög átfogójára rajzolt négyzet területe megegyezik a befogókra emelt négyzetek területének összegével.

Kosztolányi, ..., Vincze: sokszínű Matematika 9,

Derékszögű háromszögben a befogók hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.

Megjegyzések.

1. A Bölcskei... könyvben nincs bizonyítás.
2. A Kosztolányi könyv
   - 2.1 bizonyítása az $a + b$ oldalú négyzet kétféle földarabolásán alapul,
   - 2.2 megemlíti, hogy a tétel (?) már 4000 évvel ezelőtt is ismert volt Mezopotámiában,
   - 2.3 megfogalmazza a tétel megfordítását is.

Ássunk mélyebbre 1.

Euklidesz: Elemek I. könyv.

- **47. Tétel.** A derékszögű háromszögekben a derékszöggel szemközti oldalra emelt négyzet egyenlő a derékszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegével.
- **Megjegyzés.** Íme a nevezetes „Pitagorasz tétel”, egy korábban ismert eredmény tételszerű megfogalmazása.
- **48. Tétel.** Ha egy háromszögben az egyik oldalra emelt négyzet egyenlő a háromszög másik két oldalára emelt négyzetek összegével, akkor derékszög a háromszög másik két oldala által közrefogott szög.
- **Megjegyzés.** Ez pedig a megfordítása.

A bizonyítás előkészületeiből.

Két tétel az I. Könyvből.

1. **14. Tétel.** Ha valamely egyenesen levő pontnál két egyenes fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő szöget alkotnak egymás mellette, akkor (ugyanazon az) egyenesen van a két egyenes.
2. **41. Tétel.** Ha egy paralelogrammának ugyanaz az alapja, mint egy háromszögnek, és ugyanazon párhuzamosok közt fekszik, akkor a paralelogramma kétszerese a háromszögnek.

Az I.47. Tétel bizonyítása.

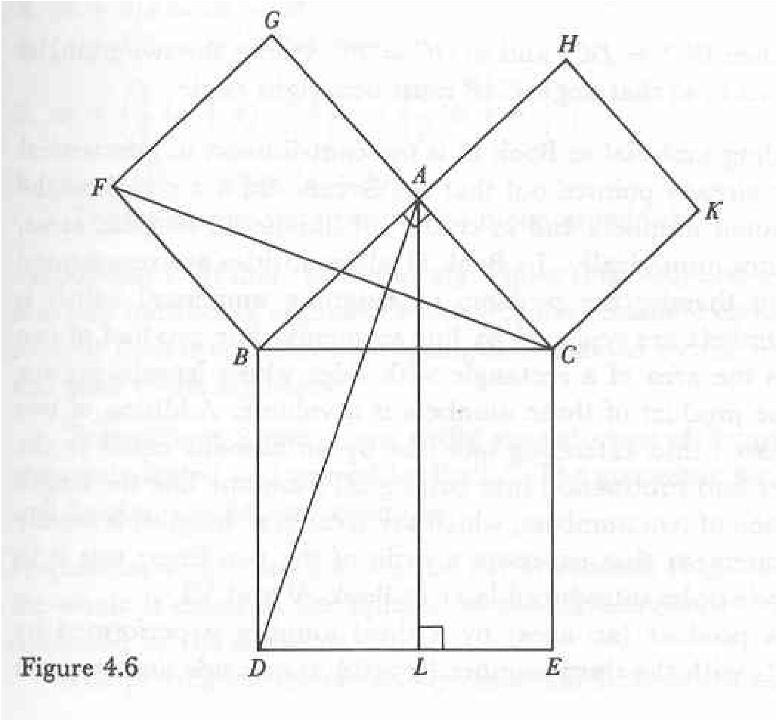


Figure 4.6

Megjegyzések.

1. A tétel minden bizonnyal a Kr.e. VI. századi pitagoreusoktól ered, talán a bizonyítás is tőlük származik.
2. Ezt az támasztja alá — bár zömmel aritmetikával foglalkoztak —, hogy ők alkalmaztak először deduktív bizonyításokat.
3. Az említett formájú bizonyítás azonban vélhetően a Kr.e. 300 körül Alexandriában működött Euklidesz munkája.
4. Az Elemekből azonban egyetlen tételről sem derül ki, hogy hogyan jöttek rá magára az eredményre, és azt miért a leírt módon bizonyították be.
5. Ezen legutóbbi kérdésre sohasem lesz adekvát válasz, de az eredetnek utánajárhatunk.

Egyetemi tavasz
Klukovits Lajos
Bevezetés
Nyomozás.

Ássunk még mélyebbre, a Kr.e. 1000 körüli Kína.

A matematika művészete kilenc könyvben.

IX/11. Probléma. *Van egy ajtó, amelynek magassága* 6 *chih-vel és* 8 *tsun-nal több a szélességénél. Az egyik sarkától az átellenes sarokig* 1 *chang a távolság. Mennyi az ajtó magassága és szélessége.*

Az eredmény.

A szélesség: 2 chih, 8 tsun, a magasság: 9 chih és 6 tsun.

A mértékegységek.

1 chang = 10 chih = 100 tsun.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Egyetemi tavasz
Klukovits Lajos
Bevezetés
Nyomozás.

A probléma mai jelölésekkel.

Megoldandó az

$$x - y = l = 6,8$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = d = 10$$

egyenletrendszer, ahol x, y, d rendre a magasság, a szélesség és az átló.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Az eredmény.

Az igen tömören fogalmazott szöveges megoldásból az olvasható ki, hogy az

- $$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left(d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)} + \frac{l}{2}$$
  $$y = \sqrt{\frac{1}{2}\left(d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)} - \frac{l}{2}$$
  formulák szerint számoltak, és azt kapták, hogy
- $$x = 9 \text{ chih és } 6 \text{ tsun} \qquad y = 2 \text{ chih és } 8 \text{ tsun.}$$

Számelméleti átfogalmazás.

Egy másodfokú egyenlet.

- Keressük meg az
  $$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$
  egyenlet egész megoldásait.
- Az (1) egyenlet egész megoldásait Pitagoraszi számhármasoknak nevezzük.

A Kr.e. II. évezred.

- A legkorábbi fönnmaradt indiai szutrák az évezred második feléből valók. Ezekben a többek között
- olyan áldozati oltár konstrukciókat találunk, amelyekben derékszögű háromszögek szerepelnek, olyanok is, amelyek oldalainak mérőszámai egész számok, azaz
- megjelennek a Pitagoraszi számhármasok.

Pitagoraszi számhármasok Indiában.

Áldozati oltárok.

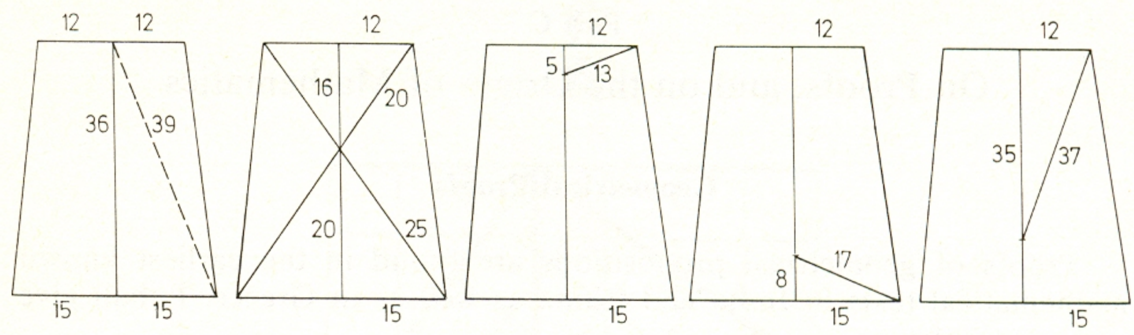


Fig. 12. Trapezoid altars in the Āpastamba Śulvasūtra

A szereplő Pitagoraszi számhármasok.

$(3, 4, 5)$ $(12, 16, 20)$ $(15, 20, 25)(5, 12, 13)$ $(15, 36, 39)(8, 15, 17)$ $(12, 35, 37)$

Egyetemi tavasz
Klukovits Lajos
Bevezetés
Nyomozás.

Pitagoraszi számhármasok Indiában.

Megjegyzések.

1. 3 olyan hármas van közöttük, amelyek már szereplők többszörösei.
2. Nyilvánvaló, hogy ha (a, b, c) Pitagoraszi számhármas, akkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re (ka, kb, kc) szintén Pitagoraszi számhármas, de ők is tudták ezt?
3. Nincs semmiféle írott indoklás arra, hogy
   3.1 hogyan számolták ki ezeket (különösen az utolsó a meglepő),
   3.2 van-e valami indoka annak, hogy pont ezeket szerepeltették.

A II. évezred eleje.

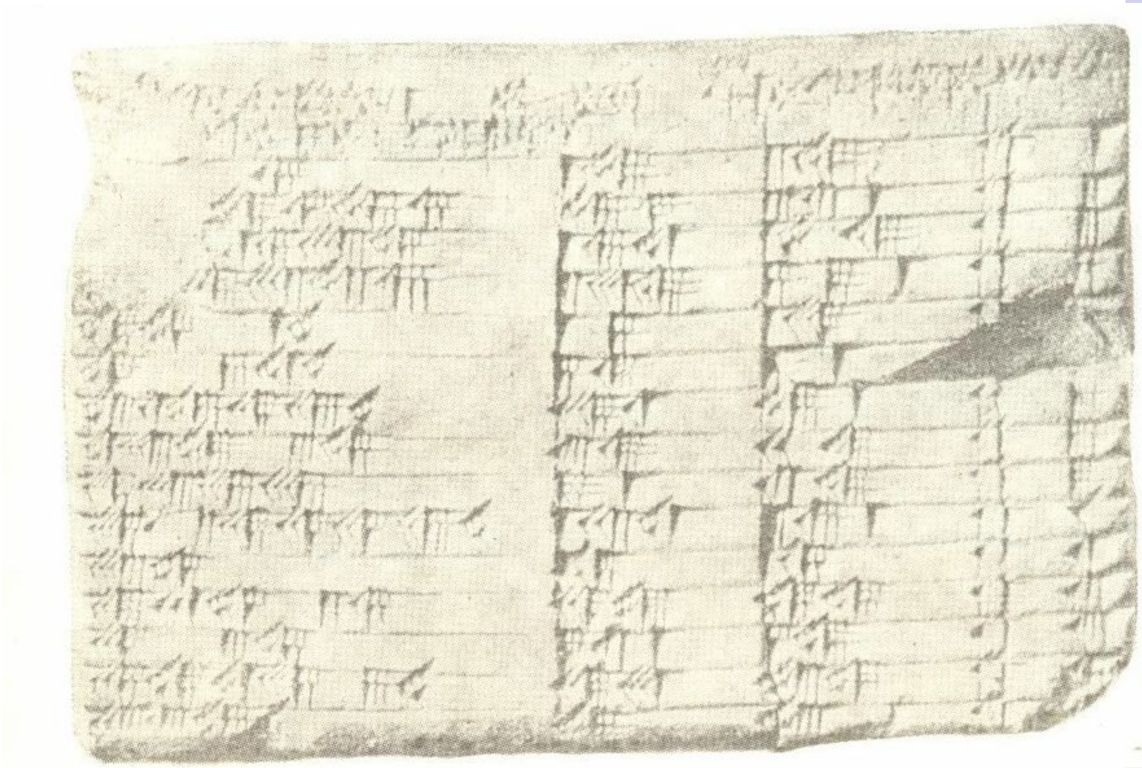
Egyiptomi Középbirodalom

Számos papiruszon szerepel a $(3, 4, 5)$ hármas: Arra is vannak utalások, hogy a földmérők (az ún. kötélfeszítők) derékszög kijelölésére használták.

Az Óbabiloni Birodalom: Hammurapi kora

- Legendás lelet az ún. Plimpton 322 agyagtábla.
- A töredékes tábla nevét arról kapta, hogy a Columbia Egyetem (New York) ilyen nevű mezopotámiai gyűjteményének becses darabja.

A Plimpton 322. agyagtábla.



A II. évezred eleje.

A számjegyek írása Mezopotámiában.

- Az 1 jele, az „ék”:

- Nemcsak az 1-et, hanem a 60 bármely egész kitevős hatványát jelölhette.
- A 10 jele, a „sarokpánt”:

- Ez szolgált a 60 bármely egész kitevős hatványa tízszeresének jelölésére is.

Egyetemi tavasz
Klukovits Lajos
Bevezetés
Nyomozás.

Plimpton 322 Neugebauer átírásában

I	II(= b)	III(= d)	IV
[1, 59, 0,]15	1, 59	2, 49	1
[1, 56, 56,]58, 14, 50, 6, 15	56, 7	3, 12, 1	2
[1, 55, 7,]41, 15, 33, 45	1, 16, 41	1, 50, 49	3
[1,]5[3, 1,]0, 29, 32, 52, 16	3, 31, 49	5, 9, 1	4
[1,]48, 54, 1, 40	1, 5	1, 37	5
[1,]47, 6, 41, 40	5, 19	8, 1	6
[1,]43, 11, 56, 28, 26, 40	38, 11	59, 1	7
[1,]41, 33, 59, 3, 45	13, 19	20, 49	8
[1,]38, 33, 36, 36	9, 1	12, 49	9
1, 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	1, 22, 41	2, 16, 1	10
1, 33, 45	45	1, 15	11
1, 29, 21, 54, 2, 15	27, 59	48, 49	12
[1,]27, 0, 3, 45	7, 12, 1	4, 49	13
1, 25, 48, 51, 35, 6, 40	29, 31	53, 49	14
[1,]23, 13, 46, 40	56	53	15

Plimpton 322

Elemzés (Neugebauer)

- A tábla bal széle töredezett, vélhetően még volt néhány további oszlop.
- Neugebauer föltételezte, hogy a tábla 15 Pitagoraszi számhármast tartalmaz. Az utolsó oszlop egyszerűen sorszámozás.
- Ha a, b, d egy derékszögű háromszög oldalai (d az átfogó), akkor
- a tábla I jelű oszlopa az

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \left(\frac{d}{a}\right)^2$$

számokat tartalmazza.

Plimpton 322

Egyetemi tavasz
Klukovits Lajos
Bevezetés
Nyomozás.

Az első sor vizsgálata

- A föltételezésünk szerint $a^2 = d^2 - b^2$-ből $a = 2, 0,$
- ami jogossá teszi az I oszlop $1; 59, 0, 15$ számát.
- Decimálisra átírva az első sor (ha egész értéket keresünk) a $(120, 119, 169)$ hármast tartalmazza.
- Ez a föltételezés mind a 15 sorra működik.

Egy izgalmas kérdés.

Hogyan lehetséges, hogy egymástól igen nagy távolságra virágzó kultúrákban szinte egyidőben tudtak ezen összefüggésről.

- Általánosan elfogadott válasz a mai napig nincs.
- A pálya tehát szabad.