Véletlen a matematikában

Viharos László

SZTE TTK Bolyai Intézet

Valószínűségszámítás

Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)

- Alapfogalmak
- Alkalmazások
- Példák

- Alapfogalmak
- Alkalmazások
- Példák

- Alapfogalmak
- Alkalmazások
- Példák

Alapfogalmak

- Valószínűségszámítás

Véletlen tömegjelenségekkel foglalkozik; pl. kocka dobálása.

- Véletlen jelenség

Kimenetelét a körülmények nem határozzák meg egyértelműen.

- Esemény

Alapfogalmak

- Valószínűségszámítás

Véletlen tömegjelenségekkel foglalkozik; pl. kocka dobálása.

- Véletlen jelenség

Kimetelét a körülmények nem határozzák meg egyértelműen.

- Esemény

Alapfogalmak

- Valószínűségszámítás

Véletlen tömegjelenségekkel foglalkozik; pl. kocka dobálása.

- Véletlen jelenség

Kimetelét a körülmények nem határozzák meg egyértelműen.

- Esemény

A véletlen jelenség megfigyelésekor vagy bekövetkezik, vagy nem
pl. „kockával párosat dobunk”

Alapfogalmak

- Valószínűségszámítás

Véletlen tömegjelenségekkel foglalkozik; pl. kocka dobálása.

- Véletlen jelenség

Kimetelét a körülmények nem határozzák meg egyértelműen.

- Esemény

A véletlen jelenség megfigyelésekor vagy bekövetkezik, vagy nem.
pl. „kockával párosat dobunk”

Alapfogalmak

- Valószínűségszámítás

Véletlen tömegjelenségekkel foglalkozik; pl. kocka dobálása.

- Véletlen jelenség

Kimetelét a körülmények nem határozzák meg egyértelműen.

- Esemény

A véletlen jelenség megfigyelésekor vagy bekövetkezik, vagy nem.
pl. „kockával párosat dobunk”

Alapfogalmak

- Valószínűségszámítás

Véletlen tömegjelenségekkel foglalkozik; pl. kocka dobálása.

- Véletlen jelenség

Kimetelét a körülmények nem határozzák meg egyértelműen.

- Esemény

A véletlen jelenség megfigyelésekor vagy bekövetkezik, vagy nem.
pl. „kockával párosat dobunk”

Esemény valószínűsége

Sokszori megfigyelés esetén az esetek hányadrészében (hány százalékában) következik be a kérdéses esemény.

A valószínűség jele: p

Mindig igaz: $0 \leq p \leq 1 \quad (0 \leq p \leq 100\,\%)$

Pl. kockával a páros dobás valószínűsége: $p = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

Minél kisebb a p valószínűség, annál kevésbé várható, hogy a kérdéses esemény bekövetkezzen.

Nagy valószínűségű esemény ($p \approx 1$) gyakran bekövetkezik.

Esemény valószínűsége

Sokszori megfigyelés esetén az esetek hányadrészében (hány százalékában) következik be a kérdéses esemény.

A valószínűség jele: p

Mindig igaz: $0 \leq p \leq 1 \quad (0 \leq p \leq 100\,\%)$

Pl. kockával a páros dobás valószínűsége: $p = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

Minél kisebb a p valószínűség, annál kevésbé várható, hogy a kérdéses esemény bekövetkezzen.

Nagy valószínűségű esemény ($p \approx 1$) gyakran bekövetkezik.

Esemény valószínűsége

Sokszori megfigyelés esetén az esetek hányadrészében (hány százalékában) következik be a kérdéses esemény.

A valószínűség jele: p

Mindig igaz: $0 \leq p \leq 1 \quad (0 \leq p \leq 100\,\%)$

Pl. kockával a páros dobás valószínűsége: $p = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

Minél kisebb a p valószínűség, annál kevésbé várható, hogy a kérdéses esemény bekövetkezzen.

Nagy valószínűségű esemény ($p \approx 1$) gyakran bekövetkezik.

Esemény valószínűsége

Sokszori megfigyelés esetén az esetek hányadrészében (hány százalékában) következik be a kérdéses esemény.

A valószínűség jele: p

Mindig igaz: $0 \leq p \leq 1 \quad (0 \leq p \leq 100\,\%)$

Pl. kockával a páros dobás valószínűsége: $p = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

Minél kisebb a p valószínűség, annál kevésbé várható, hogy a kérdéses esemény bekövetkezzen.

Nagy valószínűségű esemény ($p \approx 1$) gyakran bekövetkezik.

Esemény valószínűsége

Sokszori megfigyelés esetén az esetek hányadrészében (hány százalékában) következik be a kérdéses esemény.

A valószínűség jele: p

Mindig igaz: $0 \leq p \leq 1 \quad (0 \leq p \leq 100\,\%)$

Pl. kockával a páros dobás valószínűsége: $p = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

Minél kisebb a p valószínűség, annál kevésbé várható, hogy a kérdéses esemény bekövetkezzen.

Nagy valószínűségű esemény ($p \approx 1$) gyakran bekövetkezik.

Esemény valószínűsége

Sokszori megfigyelés esetén az esetek hányadrészében (hány százalékában) következik be a kérdéses esemény.

A valószínűség jele: p

Mindig igaz: $0 \leq p \leq 1 \quad (0 \leq p \leq 100\,\%)$

Pl. kockával a páros dobás valószínűsége: $p = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

Minél kisebb a p valószínűség, annál kevésbé várható, hogy a kérdéses esemény bekövetkezzen.

Nagy valószínűségű esemény ($p \approx 1$) gyakran bekövetkezik.

Esemény valószínűsége

Sokszori megfigyelés esetén az esetek hányadrészében (hány százalékában) következik be a kérdéses esemény.

A valószínűség jele: p

Mindig igaz: $0 \leq p \leq 1 \quad (0 \leq p \leq 100\,\%)$

Pl. kockával a páros dobás valószínűsége: $p = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

Minél kisebb a p valószínűség, annál kevésbé várható, hogy a kérdéses esemény bekövetkezzen.

Nagy valószínűségű esemény ($p \approx 1$) gyakran bekövetkezik.

Valószínűségek meghatározása

- kombinatorikus módszer
- geometriai módszer

Valószínűségek meghatározása

- kombinatorikus módszer
- geometriai módszer

Valószínűségek meghatározása

- kombinatorikus módszer
- geometriai módszer

Valószínűségek meghatározása kombinatorikus módszerrel

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$$

Példa.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával párosat dobunk?

Megoldás:

$$p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{3}{6} = 0.5 = 50\,\%.$$

Valószínűségek meghatározása kombinatorikus módszerrel

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$$

Példa.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával párosat dobunk?

Megoldás:

$$p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{3}{6} = 0.5 = 50\,\%.$$

Valószínűségek meghatározása kombinatorikus módszerrel

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$$

Példa.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával párosat dobunk?

Megoldás:

$$p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{3}{6} = 0.5 = 50\,\%.$$

Valószínűségek meghatározása kombinatorikus módszerrel

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$$

Példa.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával párosat dobunk?

Megoldás:

$$p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{3}{6} = 0.5 = 50\,\%.$$

Hasznos képletek, összefüggések valószínűségek meghatározásához:

n különböző objektum $n!$ féleképpen rendezhető sorba.
$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma

„n elemből hányféleképpen választhatunk ki k elemet"

Pl. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Hasznos képletek, összefüggések valószínűségek meghatározásához:

n különböző objektum $n!$ féleképpen rendezhető sorba.
$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

egy n elemü halmaz k elemű részhalmazainak száma

„n elemből hányféleképpen választhatunk ki k elemet"

Pl. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Hasznos képletek, összefüggések valószínűségek meghatározásához:

n különböző objektum $n!$ féleképpen rendezhető sorba.
$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
egy n elemü halmaz k elemű részhalmazainak száma

„n elemből hányféleképpen választhatunk ki k elemet”

Pl. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Hasznos képletek, összefüggések valószínűségek meghatározásához:

n különböző objektum $n!$ féleképpen rendezhető sorba.
$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
egy n elemü halmaz k elemű részhalmazainak száma

„n elemből hányféleképpen választhatunk ki k elemet”

Pl. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Hasznos képletek, összefüggések valószínűségek meghatározásához:

n különböző objektum $n!$ féleképpen rendezhető sorba.
$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
egy n elemü halmaz k elemű részhalmazainak száma

„n elemből hányféleképpen választhatunk ki k elemet"

Pl. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Függetlenség:

Van két eseményünk; az egyik valószínűsége p_1, a másiké p_2.

Feltesszük, hogy a két esemény egymástól független (egymás bekövetkezését nem befolyásolják).

Ekkor $p_1 \cdot p_2$ annak a valószínűsége, hogy mindkét esemény egyszerre bekövetkezik.

$\Longrightarrow$ Független események valószínűségei összeszorozhatók.

Példa: Egyik esemény: kockával 6-ost dobunk, valószínűsége
$p_1 = \dfrac{1}{6}$

Másik esemény: pénzérme az *írás* oldalra esik, valószínűsége: $p_2 = \dfrac{1}{2}$

Ha a kockát és az érmet egymástól függetlenül feldobjuk, akkor a két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége:

$p_1 \cdot p_2 = \dfrac{1}{12} = 0.083 = 8.3\,\%$.

Függetlenség:

Van két eseményünk; az egyik valószínűsége p_1, a másiké p_2.

Feltesszük, hogy a két esemény egymástól független (egymás bekövetkezését nem befolyásolják).

Ekkor $p_1 \cdot p_2$ annak a valószínűsége, hogy mindkét esemény egyszerre bekövetkezik.

$\Longrightarrow$ Független események valószínűségei összeszorozhatók.

Példa. Egyik esemény: kockával 6-ost dobunk; valószínűsége $p_1 = \frac{1}{6}$.

Másik esemény: pénzérme az *írás* oldalra esik; valószínűsége $p_2 = \frac{1}{2}$.

Ha a kockát és az érmet egymástól függetlenül feldobjuk, akkor a két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége

$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{12} = 0.083 = 8.3\,\%$.

Függetlenség:

Van két eseményünk; az egyik valószínűsége p_1, a másiké p_2.

Feltesszük, hogy a két esemény egymástól független (egymás bekövetkezését nem befolyásolják).

Ekkor $p_1 \cdot p_2$ annak a valószínűsége, hogy mindkét esemény egyszerre bekövetkezik.

$\Longrightarrow$ Független események valószínűségei összeszorozhatók.

Példa: Egyik esemény: kockával 6-ost dobunk, valószínűsége $p_1 = \frac{1}{6}$.

Másik esemény: pénzérme az *írás* oldalára esik, valószínűsége $p_2 = \frac{1}{2}$.

Ha a kockát és az érmet egymástól függetlenül feldobjuk, akkor a két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége

$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{12} = 0.083 = 8.3\,\%$.

Függetlenség:

Van két eseményünk; az egyik valószínűsége p_1, a másiké p_2.

Feltesszük, hogy a két esemény egymástól független (egymás bekövetkezését nem befolyásolják).

Ekkor $p_1 \cdot p_2$ annak a valószínűsége, hogy mindkét esemény egyszerre bekövetkezik.

$\Longrightarrow$ Független események valószínűségei összeszorozhatók.

Függetlenség:

Van két eseményünk; az egyik valószínűsége p_1, a másiké p_2.

Feltesszük, hogy a két esemény egymástól független (egymás bekövetkezését nem befolyásolják).

Ekkor $p_1 \cdot p_2$ annak a valószínűsége, hogy mindkét esemény egyszerre bekövetkezik.

$\Longrightarrow$ Független események valószínűségei összeszorozhatók.

Példa. Egyik esemény: kockával 6-ost dobunk; valószínűsége: $p_1 = \dfrac{1}{6}$.

Másik esemény: pénzérme az *írás* oldalra esik; valószínűsége: $p_2 = \dfrac{1}{2}$.

Ha a kockát és az érmét egymástól függetlenül feldobjuk, akkor a két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége:

$p_1 \cdot p_2 = \dfrac{1}{12} = 0.083 = 8.3\%$

Függetlenség:

Van két eseményünk; az egyik valószínűsége p_1, a másiké p_2.

Feltesszük, hogy a két esemény egymástól független (egymás bekövetkezését nem befolyásolják).

Ekkor $p_1 \cdot p_2$ annak a valószínűsége, hogy mindkét esemény egyszerre bekövetkezik.

$\Longrightarrow$ Független események valószínűségei összeszorozhatók.

Példa. Egyik esemény: kockával 6-ost dobunk; valószínűsége: $p_1 = \dfrac{1}{6}$.

Másik esemény: pénzérme az *írás* oldalra esik; valószínűsége: $p_2 = \dfrac{1}{2}$.

Ha a kockát és az érmét egymástól függetlenül feldobjuk, akkor a két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége

$p_1 \cdot p_2 = \dfrac{1}{12} = 0.083 = 8.3\,\%$.

Függetlenség:

Van két eseményünk; az egyik valószínűsége p_1, a másiké p_2.

Feltesszük, hogy a két esemény egymástól független (egymás bekövetkezését nem befolyásolják).

Ekkor $p_1 \cdot p_2$ annak a valószínűsége, hogy mindkét esemény egyszerre bekövetkezik.

$\Longrightarrow$ Független események valószínűségei összeszorozhatók.

Példa. Egyik esemény: kockával 6-ost dobunk; valószínűsége: $p_1 = \dfrac{1}{6}$.

Másik esemény: pénzérme az *írás* oldalra esik; valószínűsége: $p_2 = \dfrac{1}{2}$.

Ha a kockát és az érmét egymástól függetlenül feldobjuk, akkor a két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége $p_1 \cdot p_2 = \dfrac{1}{12} = 0.083 = 8.3\,\%$.

Függetlenség:

Van két eseményünk; az egyik valószínűsége p_1, a másiké p_2.

Feltesszük, hogy a két esemény egymástól független (egymás bekövetkezését nem befolyásolják).

Ekkor $p_1 \cdot p_2$ annak a valószínűsége, hogy mindkét esemény egyszerre bekövetkezik.

$\Longrightarrow$ Független események valószínűségei összeszorozhatók.

Példa. Egyik esemény: kockával 6-ost dobunk; valószínűsége: $p_1 = \frac{1}{6}$.

Másik esemény: pénzérme az *írás* oldalra esik; valószínűsége: $p_2 = \frac{1}{2}$.

Ha a kockát és az érmét egymástól függetlenül feldobjuk, akkor a két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége $p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{12} = 0.083 = 8.3\,\%$.

Független megfigyelés sorozat:

Egy p valószínűségű eseményt n-szer függetlenül megfigyelünk.

Ekkor p^n annak a valószínűsége, hogy minden esetben bekövetkezik a kérdéses esemény.

Példa. Egy szabályos 6 oldalú kockát dobálunk.

Egy dobás esetén $p = \dfrac{1}{6}$ valószínűséggel kapunk 6-ost.

10-szer feldobva a kockát $p = \dfrac{1}{6^{10}}$ annak a valószínűsége, hogy csupa 6-ost dobunk.

Független megfigyelés sorozat:

Egy p valószínűségű eseményt n-szer függetlenül megfigyelünk.

Ekkor p^n annak a valószínűsége, hogy minden esetben bekövetkezik a kérdéses esemény.

Példa. Egy szabályos 6 oldalú kockát dobálunk.

Egy dobás esetén $p = \frac{1}{6}$ valószínűséggel kapunk 6-ost.

10-szer feldobva a kockát $p = \frac{1}{6^{10}}$ annak a valószínűsége, hogy csupa 6-ost dobunk.

Független megfigyelés sorozat:

Egy p valószínűségű eseményt n-szer függetlenül megfigyelünk.

Ekkor p^n annak a valószínűsége, hogy minden esetben bekövetkezik a kérdéses esemény.

Példa. Egy szabályos 6 oldalú kockát dobálunk.

Egy dobás esetén $p = \frac{1}{6}$ valószínűséggel kapunk 6-ost.

10-szer feldobva a kockát $p = \frac{1}{6^{10}}$ annak a valószínűsége, hogy csupa 6-ost dobunk.

Független megfigyelés sorozat:

Egy p valószínűségű eseményt n-szer függetlenül megfigyelünk.

Ekkor p^n annak a valószínűsége, hogy minden esetben bekövetkezik a kérdéses esemény.

Példa. Egy szabályos 6 oldalú kockát dobálunk.

Egy dobás esetén $p = \dfrac{1}{6}$ valószínűséggel kapunk 6-ost.

10-szer feldobva a kockát $p = \dfrac{1}{6^{10}}$ annak a valószínűsége, hogy csupa 6-ost dobunk.

Valószínűségek meghatározása geometriai módszerrel

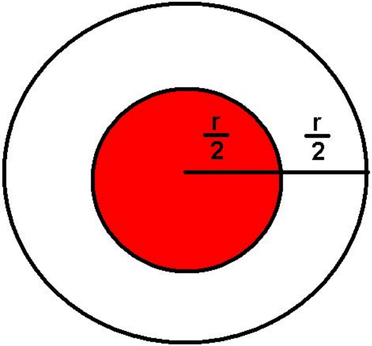
$$p = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}}$$

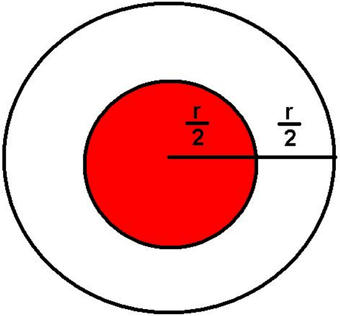
Valószínűségek meghatározása geometriai módszerrel

$$p = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}}$$

Példa. Egy r sugarú céltáblára lövések érkeznek. Mennyi a valószínűsége, hogy a lövés a közepén levő $\frac{r}{2}$ sugarú körlapot találja el?

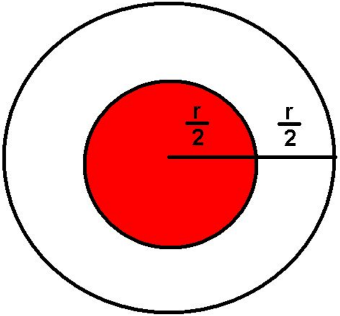
Példa. Egy r sugarú céltáblára lövések érkeznek. Mennyi a valószínűsége, hogy a lövés a közepén levő $\frac{r}{2}$ sugarú körlapot találja el?





Megoldás:

$$p = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi}{r^2\pi} = \frac{1}{4} = 25\,\%.$$



Megoldás:

$$p = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi}{r^2\pi} = \frac{1}{4} = 25\,\%.$$

Tapasztalati valószínűségek

Példa. Feldobunk 1000-szer egy kockát, ebből 165 esetben kapunk 6-ost. A 6-os dobásának tapasztalati valószínűsége $\hat{p} = \frac{165}{1000} = 0.165 = 16.5\,\%$.

Az „igazi" valószínűség $p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{1}{6} = 0.16\dot{6} = 16.6\,\%$.

$$p \approx \hat{p}$$

Általában. Ha egy esemény n-szeri megfigyelésből K_n-szer következik be, akkor az esemény tapasztalati valószínűsége $\hat{p} = \frac{K_n}{n}$.

Tapasztalati valószínűségek

Példa. Feldobunk 1000-szer egy kockát, ebből 165 esetben kapunk 6-ost. A 6-os dobásának tapasztalati valószínűsége $\hat{p} = \dfrac{165}{1000} = 0.165 = 16.5\,\%$.

Az „igazi" valószínűség $p = \dfrac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \dfrac{1}{6} = 0.16\dot{6} = 16.6\,\%$.

$$p \approx \hat{p}$$

Általában. Ha egy esemény n-szeri megfigyelésből K_n-szer következik be, akkor az esemény tapasztalati valószínűsége $\hat{p} = \dfrac{K_n}{n}$.

Tapasztalati valószínűségek

Példa. Feldobunk 1000-szer egy kockát, ebből 165 esetben kapunk 6-ost. A 6-os dobásának tapasztalati valószínűsége
$\hat{p} = \dfrac{165}{1000} = 0.165 = 16.5\,\%$.

Az „igazi” valószínűség $p = \dfrac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \dfrac{1}{6} = 0.16\dot{6} = 16.6\,\%$.

$$p \approx \hat{p}$$

Általában. Ha egy esemény n-szeri megfigyelésből K_n-szer következik be, akkor az esemény tapasztalati valószínűsége $\hat{p} = \dfrac{K_n}{n}$.

Tapasztalati valószínűségek

Példa. Feldobunk 1000-szer egy kockát, ebből 165 esetben kapunk 6-ost. A 6-os dobásának tapasztalati valószínűsége $\hat{p} = \dfrac{165}{1000} = 0.165 = 16.5\,\%$.

Az „igazi” valószínűség $p = \dfrac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \dfrac{1}{6} = 0.16\dot{6} = 16.6\,\%$.

$$p \approx \hat{p}$$

Általában. Ha egy esemény n-szeri megfigyelésből K_n-szer következik be, akkor az esemény tapasztalati valószínűsége $\hat{p} = \dfrac{K_n}{n}$.

Alkalmazások

- szerencsejátékok (igazságos játék)
- statisztika (adatgyűjtés; adatfeldolgozás)

  Pl. választások előtti közvéleménykutatás:
  megkérdeznek 5000 embert, hogy kire szavazna; a válaszok alapán minél nagyobb valószínűséggel meg kell jósolni, hogy melyik párt lesz a győztes.
- biztosítások

  Milyen valószínűséggel következik be egy káresemény?
  Mennyi biztosítási díjat fizessünk egy adott biztosításért?
- véletlen közgazdasági folyamatok (pl. valutaárfolyamok véletlen ingadozása)

…

Bolyai Intézet

matematikus szak, pénzügyi (biztosítási) szakirány

Alkalmazások

- szerencsejátékok (igazságos játék)
- statisztika (adatgyűjtés; adatfeldolgozás)

  Pl. választások előtti közvéleménykutatás:
  megkérdeznek 5000 embert, hogy kire szavazna; a válaszok alapján minél nagyobb valószínűséggel meg kell jósolni, hogy melyik párt lesz a győztes.
- biztosítások

  Milyen valószínűséggel következik be egy káresemény?
  Mennyi biztosítási díjat fizessünk egy adott biztosításért?
- véletlen közgazdasági folyamatok (pl. valutaárfolyamok véletlen ingadozása)

  . . .

  Bolyai Intézet
  matematikus szak, pénzügyi (biztosítási) szakirány

Alkalmazások

- szerencsejátékok (igazságos játék)
- statisztika (adatgyűjtés; adatfeldolgozás)

  Pl. választások előtti közvéleménykutatás:
  megkérdeznek 5000 embert, hogy kire szavazna; a válaszok alapán minél nagyobb valószínűséggel meg kell jósolni, hogy melyik párt lesz a győztes.
- biztosítások

  Milyen valószínűséggel következik be egy káresemény?
  Mennyi biztosítási díjat fizessünk egy adott biztosításért?
- véletlen közgazdasági folyamatok (pl. valutaárfolyamok véletlen ingadozása)

  ...

  Bolyai Intézet
  matematikus szak, pénzügyi (biztosítási) szakirány

Alkalmazások

- szerencsejátékok (igazságos játék)
- statisztika (adatgyűjtés; adatfeldolgozás)

  Pl. választások előtti közvéleménykutatás:
  megkérdeznek 5000 embert, hogy kire szavazna; a válaszok alapján minél nagyobb valószínűséggel meg kell jósolni, hogy melyik párt lesz a győztes.
- biztosítások

  Milyen valószínűséggel következik be egy káresemény?
  Mennyi biztosítási díjat fizessünk egy adott biztosításért?
- véletlen közgazdasági folyamatok (pl. valutaárfolyamok véletlen ingadozása)

...

Bolyai Intézet

matematikus szak, pénzügyi (biztosítási) szakirány

Alkalmazások

- szerencsejátékok (igazságos játék)
- statisztika (adatgyűjtés; adatfeldolgozás)

  Pl. választások előtti közvéleménykutatás:
  megkérdeznek 5000 embert, hogy kire szavazna; a válaszok alapján minél nagyobb valószínűséggel meg kell jósolni, hogy melyik párt lesz a győztes.
- biztosítások

  Milyen valószínűséggel következik be egy káresemény?
  Mennyi biztosítási díjat fizessünk egy adott biztosításért?
- véletlen közgazdasági folyamatok (pl. valutaárfolyamok véletlen ingadozása)

  ...

  Bolyai Intézet

  matematikus szak, pénzügyi (biztosítási) szakirány

Alkalmazások

- szerencsejátékok (igazságos játék)
- statisztika (adatgyűjtés; adatfeldolgozás)

  Pl. választások előtti közvéleménykutatás:
  megkérdeznek 5000 embert, hogy kire szavazna; a válaszok alapán minél nagyobb valószínűséggel meg kell jósolni, hogy melyik párt lesz a győztes.
- biztosítások

  Milyen valószínűséggel következik be egy káresemény?
  Mennyi biztosítási díjat fizessünk egy adott biztosításért?
- véletlen közgazdasági folyamatok (pl. valutaárfolyamok véletlen ingadozása)

. . .

Bolyai Intézet

matematikus szak, pénzügyi (biztosítási) szakirány

Alkalmazások

- szerencsejátékok (igazságos játék)
- statisztika (adatgyűjtés; adatfeldolgozás)

  Pl. választások előtti közvéleménykutatás:
  megkérdeznek 5000 embert, hogy kire szavazna; a válaszok alapán minél nagyobb valószínűséggel meg kell jósolni, hogy melyik párt lesz a győztes.
- biztosítások

  Milyen valószínűséggel következik be egy káresemény?
  Mennyi biztosítási díjat fizessünk egy adott biztosításért?
- véletlen közgazdasági folyamatok (pl. valutaárfolyamok véletlen ingadozása)

  . . .

Bolyai Intézet

matematikus szak, pénzügyi (biztosítási) szakirány

Alkalmazások

- szerencsejátékok (igazságos játék)
- statisztika (adatgyűjtés; adatfeldolgozás)

  Pl. választások előtti közvéleménykutatás:
  megkérdeznek 5000 embert, hogy kire szavazna; a válaszok alapján minél nagyobb valószínűséggel meg kell jósolni, hogy melyik párt lesz a győztes.
- biztosítások

  Milyen valószínűséggel következik be egy káresemény?
  Mennyi biztosítási díjat fizessünk egy adott biztosításért?
- véletlen közgazdasági folyamatok (pl. valutaárfolyamok véletlen ingadozása)

  ...

  Bolyai Intézet
  matematikus szak, pénzügyi (biztosítási) szakirány

További példák, alkalmazások

Egy családban két gyerek van. Annyit tudunk, hogy az egyik gyerek fiú. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik gyerek lány?

Egy családban két gyerek van. Annyit tudunk, hogy az egyik gyerek fiú. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik gyerek lány?

Megoldás:
50% ?

Egy családban két gyerek van. Annyit tudunk, hogy az egyik gyerek fiú. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik gyerek lány?

Megoldás:

50% ?

összes eset: {fiú,fiú}, {fiú,lány}, {lány,fiú} (3 féle)

kedvező esetek: {fiú,lány}, {lány,fiú} (2 féle)

valószínűség: $p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{2}{3} = 66.\dot{6}\,\%$

Egy családban két gyerek van. Annyit tudunk, hogy az egyik gyerek fiú. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik gyerek lány?

Megoldás:
50% ?

összes eset: {fiú,fiú}, {fiú,lány}, {lány,fiú} (3 féle)

kedvező esetek: {fiú,lány}, {lány,fiú} (2 féle)

valószínűség: $p = \dfrac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \dfrac{2}{3} = 66.\dot{6}\,\%$

Egy családban két gyerek van. Annyit tudunk, hogy az egyik gyerek fiú. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik gyerek lány?

Megoldás:

50% ?

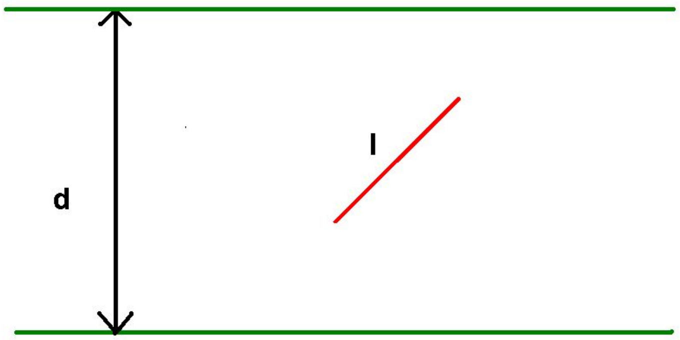
összes eset: {fiú,fiú}, {fiú,lány}, {lány,fiú} (3 féle)

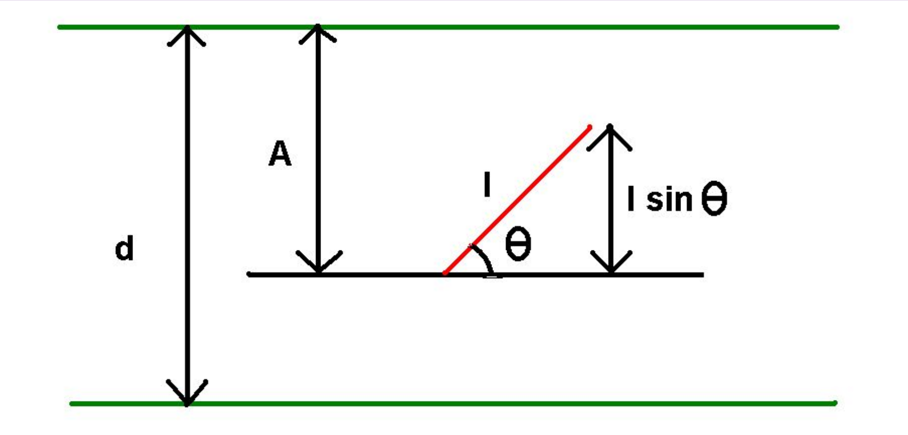
kedvező esetek: {fiú,lány}, {lány,fiú} (2 féle)

valószínűség: $p = \dfrac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \dfrac{2}{3} = 66.\dot{6}\,\%$

Georges Buffon (1707-1788)

(*Buffon-féle tűprobléma, 1733*) Egy síklapon egymástól egyenlő d távolságra párhuzamos egyeneseket húzunk, és a síkra egy l hosszúságú tűt ejtünk. Feltesszük, hogy $l < d$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tű átmetsz egy egyenest?

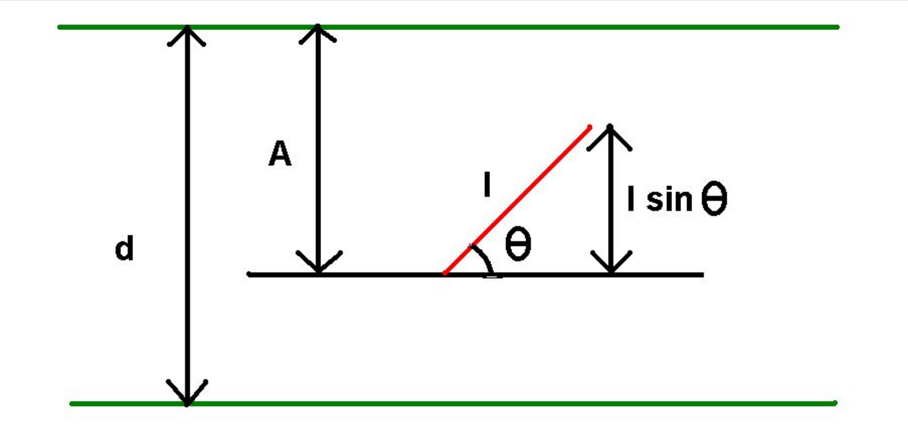




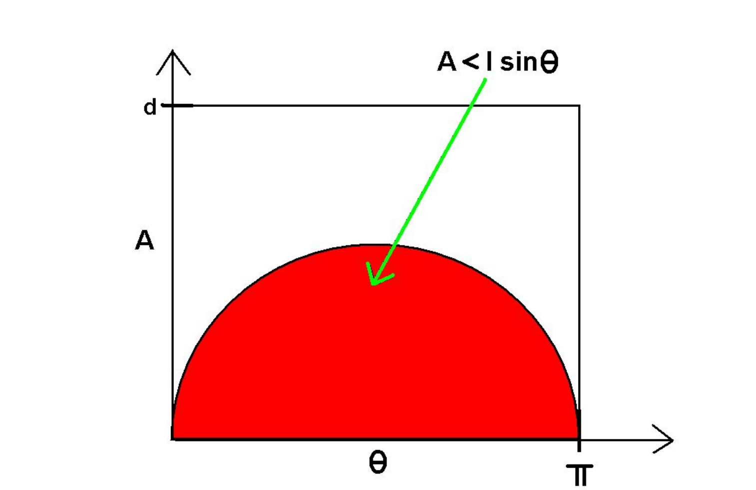
Megoldás:

metszés: $A < l \sin\theta$,

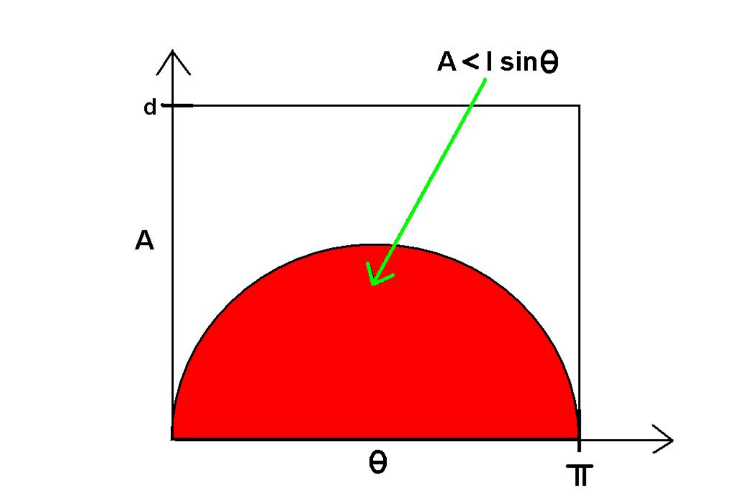
összes lehetőség: $0 \le A < d, \quad 0 \le \theta < \pi$



Megoldás:
metszés: $A < l \sin\theta$,
összes lehetőség: $0 \leq A < d, \quad 0 \leq \theta < \pi$



$$p = \frac{\int_0^\pi l \sin\theta d\theta}{\pi d} = \frac{l[-\cos\theta]_0^\pi}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}$$



$$p = \frac{\int_0^\pi l \sin\theta d\theta}{\pi d} = \frac{l[-\cos\theta]_0^\pi}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}$$

$$p = \frac{2l}{\pi d} \quad \Longrightarrow \quad \pi = \frac{2l}{pd}$$

n-szer feldobjuk a tűt; K_n-szer metszi át valamelyik vonalat.

$$p \approx \frac{K_n}{n} \quad \Longrightarrow \quad \pi \approx \frac{2l}{\frac{K_n}{n} d}$$

$$p = \frac{2l}{\pi d} \quad \Longrightarrow \quad \pi = \frac{2l}{pd}$$

n-szer feldobjuk a tűt; K_n-szer metszi át valamelyik vonalat.

$$p \approx \tfrac{K_n}{n} \quad \Longrightarrow \quad \pi \approx \frac{2l}{\frac{K_n}{n} d}$$

Rudolf Wolf (1816-1893)

Rudolf Wolf (1850):

$$d = 45 \text{ mm}, \; l = 35 \text{ mm}, \; p = \frac{2l}{\pi d} = \frac{2 \cdot 35}{\pi \cdot 45} = 0.4951487119 = 49.5\%$$

$$n = 5000, \; K_n = 2462 \quad \Longrightarrow p \approx \frac{K_n}{n} = \frac{2462}{5000} = 0.4924000000 = 49.2\%$$

$$\Longrightarrow \quad \pi \approx \frac{2l}{\frac{K_n}{n} d} = \frac{2 \cdot 35}{\frac{2462}{5000} 45} = 3.1596$$

$$\pi = 3.1416$$

Rudolf Wolf (1850):

$$d = 45 \text{ mm},\ l = 35 \text{ mm},\ p = \frac{2l}{\pi d} = \frac{2 \cdot 35}{\pi \cdot 45} = 0.4951487119 = 49.5\%$$

$$n = 5000,\ K_n = 2462 \quad \Longrightarrow p \approx \frac{K_n}{n} = \frac{2462}{5000} = 0.4924000000 = 49.2\%$$

$$\Longrightarrow \quad \pi \approx \frac{2l}{\frac{K_n}{n} d} = \frac{2 \cdot 35}{\frac{2462}{5000} 45} = 3.1596$$

$$\pi = 3.1416$$

Rudolf Wolf (1850):

$$d = 45 \text{ mm}, \; l = 35 \text{ mm}, \; p = \frac{2l}{\pi d} = \frac{2 \cdot 35}{\pi \cdot 45} = 0.4951487119 = 49.5\%$$

$$n = 5000, \; K_n = 2462 \quad \Longrightarrow p \approx \frac{K_n}{n} = \frac{2462}{5000} = 0.4924000000 = 49.2\%$$

$$\Longrightarrow \quad \pi \approx \frac{2l}{\frac{K_n}{n} d} = \frac{2 \cdot 35}{\frac{2462}{5000} 45} = 3.1596$$

$$\pi = 3.1416$$

Rudolf Wolf (1850):

$$d = 45 \text{ mm}, \; l = 35 \text{ mm}, \; p = \frac{2l}{\pi d} = \frac{2 \cdot 35}{\pi \cdot 45} = 0.4951487119 = 49.5\%$$

$$n = 5000, \; K_n = 2462 \quad \Longrightarrow p \approx \frac{K_n}{n} = \frac{2462}{5000} = 0.4924000000 = 49.2\%$$

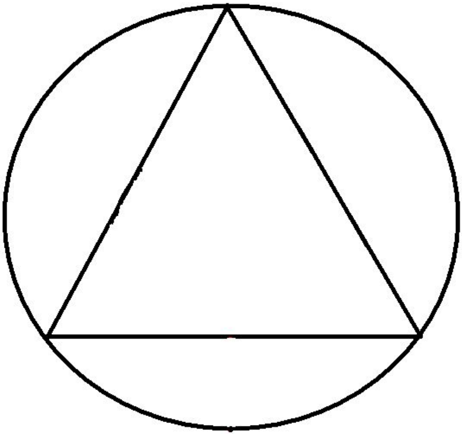
$$\Longrightarrow \quad \pi \approx \frac{2l}{\frac{K_n}{n} d} = \frac{2 \cdot 35}{\frac{2462}{5000} 45} = 3.1596$$

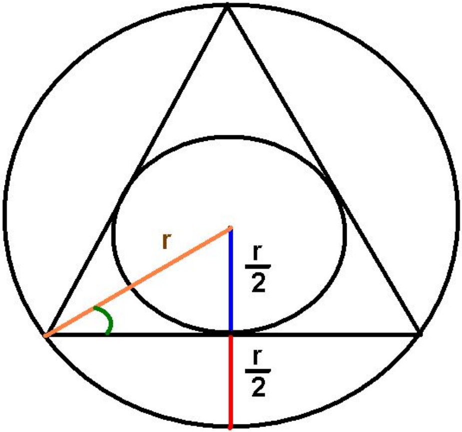
$$\pi = 3.1416$$

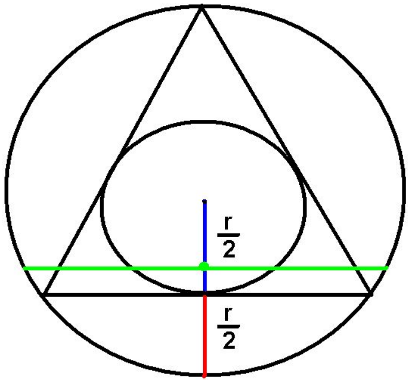
Joseph Bertrand (1822-1900)

(*Bertrand-féle paradoxon*) Tekintsünk egy kört, és válasszuk ki találomra a kör valamelyik húrját. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott húr hosszabb lesz, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala?

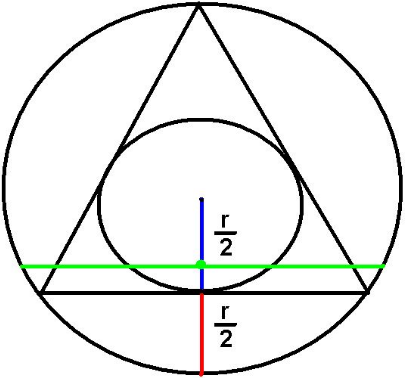
(*Bertrand-féle paradoxon*) Tekintsünk egy kört, és válasszuk ki találomra a kör valamelyik húrját. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott húr hosszabb lesz, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala?



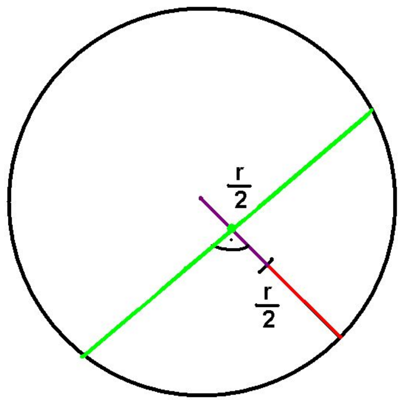

r
r/2
r/2



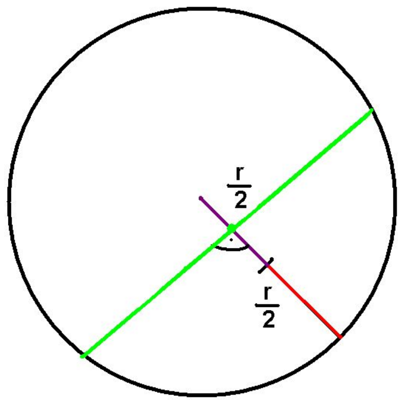
$$p = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi}{r^2\pi} = \frac{1}{4} = 25\,\%$$



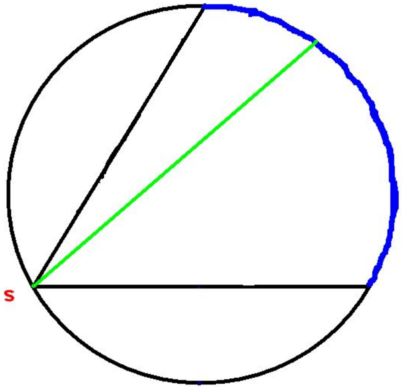
$$p = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi}{r^2 \pi} = \frac{1}{4} = 25\,\%$$



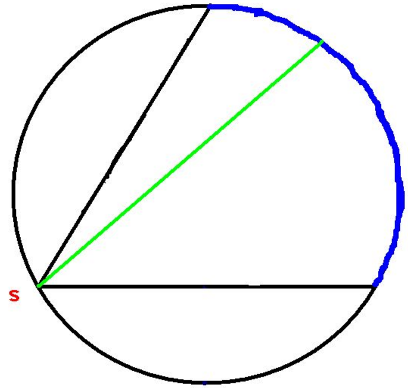
$$p = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2} = 50\,\%$$



$$p = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2} = 50\,\%$$



$$p = \frac{2r\pi/3}{2r\pi} = \frac{1}{3} = 33.\dot{3}\,\%$$



$$p = \frac{2r\pi/3}{2r\pi} = \frac{1}{3} = 33.\dot{3}\,\%$$

- $p = \dfrac{1}{4}$?
- $p = \dfrac{1}{2}$?
- $p = \dfrac{1}{3}$?

- $p = \dfrac{1}{4}$?
- $p = \dfrac{1}{2}$?
- $p = \dfrac{1}{3}$?

- $p = \dfrac{1}{4}$?
- $p = \dfrac{1}{2}$?
- $p = \dfrac{1}{3}$?

- $p = \dfrac{1}{4}$?
- $p = \dfrac{1}{2}$?
- $p = \dfrac{1}{3}$?

Craps játék

Népszerű volt az aranyásók körében, de már a XII. században is játszották a keresztes háborúk katonái.

(*Craps*) Két játékos két kockával játszik. Feldobják a két kockát. Ha az összeg 7 vagy 11, akkor az Első játékos nyer. Ha az összeg 2,3 vagy 12, akkor az Második játékos nyer. Ha az összeg ezektől különbözik, akkor mindaddig újra dobnak, amíg az összeg vagy 7 nem lesz, amikor a Második játékos nyer, vagy a legelőször dobott összeg megismétlődik, amikor az Első játékos nyer. Kinek kedvez a játék?

Megoldás:

összeg:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
valószínűség:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Az Első játékos nyerési eséje:

Az első kísérletben nyer: $P(7 \vee 11) = \frac{8}{36}$.

(*Craps*) Két játékos két kockával játszik. Feldobják a két kockát. Ha az összeg 7 vagy 11, akkor az Első játékos nyer. Ha az összeg 2,3 vagy 12, akkor az Második játékos nyer. Ha az összeg ezektől különbözik, akkor mindaddig újra dobnak, amíg az összeg vagy 7 nem lesz, amikor a Második játékos nyer, vagy a legelőször dobott összeg megismétlődik, amikor az Első játékos nyer. Kinek kedvez a játék?

Megoldás:

összeg:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
valószínűség:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Az Első játékos nyerési eséje:

Az első kísérletben nyer: $P(7 \vee 11) = \frac{8}{36}$.

(*Craps*) Két játékos két kockával játszik. Feldobják a két kockát. Ha az összeg 7 vagy 11, akkor az Első játékos nyer. Ha az összeg 2,3 vagy 12, akkor az Második játékos nyer. Ha az összeg ezektől különbözik, akkor mindaddig újra dobnak, amíg az összeg vagy 7 nem lesz, amikor a Második játékos nyer, vagy a legelőször dobott összeg megismétlődik, amikor az Első játékos nyer. Kinek kedvez a játék?

Megoldás:

összeg:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
valószínűség:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Az Első játékos nyerési eséje:

Az első kísérletben nyer: $P(7 \vee 11) = \frac{8}{36}$.

(*Craps*) Két játékos két kockával játszik. Feldobják a két kockát. Ha az összeg 7 vagy 11, akkor az Első játékos nyer. Ha az összeg 2,3 vagy 12, akkor az Második játékos nyer. Ha az összeg ezektől különbözik, akkor mindaddig újra dobnak, amíg az összeg vagy 7 nem lesz, amikor a Második játékos nyer, vagy a legelőször dobott összeg megismétlődik, amikor az Első játékos nyer. Kinek kedvez a játék?

Megoldás folytatása:
Ha az első kísérletben nem nyer, akkor 4,5,6,8,9,10 dobott összegekkel nyerhet.

Pl. 4 esetén: ennek valószínűsége $\frac{3}{36}$.

Ezután akkor nyer Első, ha 7 vagy 4 közül először 4 lesz. 7 vagy 4 összesen 9 eset, ebből 3 kedvező, tehát $\frac{3}{9}$ ez a valószínűség.

Összesítve: $p = \frac{8}{36} + \frac{3}{36}\frac{3}{9} + \ldots = \frac{244}{495} = 0.4929 = 49.29\,\%$

(Craps) Két játékos két kockával játszik. Feldobják a két kockát. Ha az összeg 7 vagy 11, akkor az Első játékos nyer. Ha az összeg 2,3 vagy 12, akkor az Második játékos nyer. Ha az összeg ezektől különbözik, akkor mindaddig újra dobnak, amíg az összeg vagy 7 nem lesz, amikor a Második játékos nyer, vagy a legelőször dobott összeg megismétlődik, amikor az Első játékos nyer. Kinek kedvez a játék?

Megoldás folytatása:

Ha az első kísérletben nem nyer, akkor 4,5,6,8,9,10 dobott összegekkel nyerhet.

Pl. 4 esetén: ennek valószínűsége $\frac{3}{36}$.

Ezután akkor nyer Első, ha 7 vagy 4 közül először 4 lesz. 7 vagy 4 összesen 9 eset, ebből 3 kedvező, tehát $\frac{3}{9}$ ez a valószínűség.

Összesítve: $p = \frac{8}{36} + \frac{3}{36}\frac{3}{9} + \ldots = \frac{244}{495} = 0.4929 = 49.29\,\%$

(*Craps*) Két játékos két kockával játszik. Feldobják a két kockát. Ha az összeg 7 vagy 11, akkor az Első játékos nyer. Ha az összeg 2,3 vagy 12, akkor az Második játékos nyer. Ha az összeg ezektől különbözik, akkor mindaddig újra dobnak, amíg az összeg vagy 7 nem lesz, amikor a Második játékos nyer, vagy a legelőször dobott összeg megismétlődik, amikor az Első játékos nyer. Kinek kedvez a játék?

Megoldás folytatása:
Ha az első kísérletben nem nyer, akkor 4,5,6,8,9,10 dobott összegekkel nyerhet.

Pl. 4 esetén: ennek valószínűsége $\frac{3}{36}$.

Ezután akkor nyer Első, ha 7 vagy 4 közül először 4 lesz. 7 vagy 4 összesen 9 eset, ebből 3 kedvező, tehát $\frac{3}{9}$ ez a valószínűség.

Összesítve: $p = \frac{8}{36} + \frac{3}{36}\frac{3}{9} + \ldots = \frac{244}{495} = 0.4929 = 49.29\,\%$

(*Craps*) Két játékos két kockával játszik. Feldobják a két kockát. Ha az összeg 7 vagy 11, akkor az Első játékos nyer. Ha az összeg 2,3 vagy 12, akkor az Második játékos nyer. Ha az összeg ezektől különbözik, akkor mindaddig újra dobnak, amíg az összeg vagy 7 nem lesz, amikor a Második játékos nyer, vagy a legelőször dobott összeg megismétlődik, amikor az Első játékos nyer. Kinek kedvez a játék?

Megoldás folytatása:
Ha az első kísérletben nem nyer, akkor 4,5,6,8,9,10 dobott összegekkel nyerhet.

Pl. 4 esetén: ennek valószínűsége $\frac{3}{36}$.

Ezután akkor nyer Első, ha 7 vagy 4 közül először 4 lesz. 7 vagy 4 összesen 9 eset, ebből 3 kedvező, tehát $\frac{3}{9}$ ez a valószínűség.

Összesítve: $p = \frac{8}{36} + \frac{3}{36}\frac{3}{9} + \ldots = \frac{244}{495} = 0.4929 = 49.29\,\%$

Egy biztosítótársaság felmérte, hogy 0.0002 valószínűséggel keletkezik egy családi házban tűzkár (azaz 10 000 esetből várhatóan kétszer). Mennyi annak a valószínűsége, hogy 15 000 esetből kevesebb mint 4-szer fog előfordulni tűzkár?

Megoldás:

Pl. 3 esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_3 = \binom{15000}{3} \cdot 0.0002^3 \cdot 0.9998^{14997}$

k esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_k = \binom{15000}{k} \cdot 0.0002^k \cdot 0.9998^{15000-k}$

$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad$ ahol $n = 15\,000$, $p = 0.0002$

n nagy, $k << n$, $\quad p$ kicsi, akkor

$p_k \quad \approx \quad \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$

$np = 3 \quad \Longrightarrow \quad p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0.6472 = 64.72\,\%$

Egy biztosítótársaság felmérte, hogy 0.0002 valószínűséggel keletkezik egy családi házban tűzkár (azaz 10 000 esetből várhatóan kétszer). Mennyi annak a valószínűsége, hogy 15 000 esetből kevesebb mint 4-szer fog előfordulni tűzkár?

Megoldás:

Pl. 3 esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_3 = \binom{15000}{3} \cdot 0.0002^3 \cdot 0.9998^{14997}$

k esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_k = \binom{15000}{k} \cdot 0.0002^k \cdot 0.9998^{15000-k}$

$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ahol $n = 15\,000$, $p = 0.0002$

n nagy, $k << n$, p kicsi, akkor

$p_k \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$

$np = 3 \implies p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0.6472 = 64.72\,\%$

Egy biztosítótársaság felmérte, hogy 0.0002 valószínűséggel keletkezik egy családi házban tűzkár (azaz 10 000 esetből várhatóan kétszer). Mennyi annak a valószínűsége, hogy 15 000 esetből kevesebb mint 4-szer fog előfordulni tűzkár?

Megoldás:
Pl. 3 esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_3 = \binom{15000}{3} \cdot 0.0002^3 \cdot 0.9998^{14997}$

k esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_k = \binom{15000}{k} \cdot 0.0002^k \cdot 0.9998^{15000-k}$

$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ahol $n = 15\,000$, $p = 0.0002$

n nagy, $k << n$, p kicsi, akkor
$p_k \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$

$np = 3 \implies p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0.6472 = 64.72\,\%$

Egy biztosítótársaság felmérte, hogy 0.0002 valószínűséggel keletkezik egy családi házban tűzkár (azaz 10 000 esetből várhatóan kétszer). Mennyi annak a valószínűsége, hogy 15 000 esetből kevesebb mint 4-szer fog előfordulni tűzkár?

Megoldás:

Pl. 3 esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_3 = \binom{15000}{3} \cdot 0.0002^3 \cdot 0.9998^{14997}$

k esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_k = \binom{15000}{k} \cdot 0.0002^k \cdot 0.9998^{15000-k}$

$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad$ ahol $n = 15\,000$, $p = 0.0002$

n nagy, $k << n$, p kicsi, akkor

$p_k \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$

$np = 3 \implies p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0.6472 = 64.72\,\%$

Egy biztosítótársaság felmérte, hogy 0.0002 valószínűséggel keletkezik egy családi házban tűzkár (azaz 10 000 esetből várhatóan kétszer). Mennyi annak a valószínűsége, hogy 15 000 esetből kevesebb mint 4-szer fog előfordulni tűzkár?

Megoldás:
Pl. 3 esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_3 = \binom{15000}{3} \cdot 0.0002^3 \cdot 0.9998^{14997}$

k esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_k = \binom{15000}{k} \cdot 0.0002^k \cdot 0.9998^{15000-k}$

$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ahol $n = 15\,000$, $p = 0.0002$

n nagy, $k << n$, p kicsi, akkor
$p_k \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$

$np = 3 \implies p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0.6472 = 64.72\,\%$

Egy biztosítótársaság felmérte, hogy 0.0002 valószínűséggel keletkezik egy családi házban tűzkár (azaz 10 000 esetből várhatóan kétszer). Mennyi annak a valószínűsége, hogy 15 000 esetből kevesebb mint 4-szer fog előfordulni tűzkár?

Megoldás:
Pl. 3 esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_3 = \binom{15000}{3} \cdot 0.0002^3 \cdot 0.9998^{14997}$

k esetben lesz tűzkár 15 000-ből: $p_k = \binom{15000}{k} \cdot 0.0002^k \cdot 0.9998^{15000-k}$

$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ahol $n = 15\,000$, $p = 0.0002$

n nagy, $k << n$, p kicsi, akkor
$p_k \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$

$np = 3 \implies p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0.6472 = 64.72\,\%$

Szerencsejáték: egy játékos befizet a banknak egy részvételi díjat. A játék lejátszása után a játékos felveszi a nyereményét.

A játék *igazságos*, ha hosszabb távon (sokszor lejátszva a játékot), egyik fél sem gazdagodik meg a másikon.

Kérdés: egy adott játék esetén hogyan határozható meg az igazságos részvételi díj?

Válasz: a nyeremény *várható értékét* kell kiszámolni.

igazságos részvételi díj = nyeremény várható értéke

Szerencsejáték: egy játékos befizet a banknak egy részvételi díjat. A játék lejátszása után a játékos felveszi a nyereményét.

A játék *igazságos*, ha hosszabb távon (sokszor lejátszva a játékot), egyik fél sem gazdagodik meg a másikon.

Kérdés: egy adott játék esetén hogyan határozható meg az igazságos részvételi díj?

Válasz: a nyeremény *várható értékét* kell kiszámolni.

igazságos részvételi díj = nyeremény várható értéke

Szerencsejáték: egy játékos befizet a banknak egy részvételi díjat. A játék lejátszása után a játékos felveszi a nyereményét.

A játék *igazságos*, ha hosszabb távon (sokszor lejátszva a játékot), egyik fél sem gazdagodik meg a másikon.

Kérdés: egy adott játék esetén hogyan határozható meg az igazságos részvételi díj?

Válasz: a nyeremény *várható értékét* kell kiszámolni.

igazságos részvételi díj = nyeremény várható értéke

Szerencsejáték: egy játékos befizet a banknak egy részvételi díjat. A játék lejátszása után a játékos felveszi a nyereményét.

A játék *igazságos*, ha hosszabb távon (sokszor lejátszva a játékot), egyik fél sem gazdagodik meg a másikon.

Kérdés: egy adott játék esetén hogyan határozható meg az igazságos részvételi díj?

Válasz: a nyeremény *várható értékét* kell kiszámolni.

igazságos részvételi díj = nyeremény várható értéke

Szerencsejáték: egy játékos befizet a banknak egy részvételi díjat. A játék lejátszása után a játékos felveszi a nyereményét.

A játék *igazságos*, ha hosszabb távon (sokszor lejátszva a játékot), egyik fél sem gazdagodik meg a másikon.

Kérdés: egy adott játék esetén hogyan határozható meg az igazságos részvételi díj?

Válasz: a nyeremény *várható értékét* kell kiszámolni.

igazságos részvételi díj = nyeremény várható értéke

Példa. Pénzérmét dobálunk. Ha a dobás *fej*, akkor 2 Ft-ot nyerünk, ha *írás*, akkor 5 Ft-ot nyerünk. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Megoldás:

Játszuk le 100-szor a játékot. Az esetek kb. felében 2 Ft, a másik felében 5 Ft lesz a nyereményünk. Így a várható nyeremény $50 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 350$ Ft lesz.

Jelölje A az 1 játékhoz tartozó részvételi díjat. A bank bevétele összesen: $100A$.

Ha a játék igazságos, akkor a nyeremények összege megegyezik a részvételi díjak összegével:

$$50 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 100A$$

Ebből megkapjuk az igazságos részvételi díjat (a nyeremény várható értéke):

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3.5 \text{ Ft}$$

Példa. Pénzérmét dobálunk. Ha a dobás *fej*, akkor 2 Ft-ot nyerünk, ha *írás*, akkor 5 Ft-ot nyerünk. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Megoldás:

Játszuk le 100-szor a játékot. Az esetek kb. felében 2 Ft, a másik felében 5 Ft lesz a nyereményünk. Így a várható nyeremény $50 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 350$ Ft lesz.

Jelölje A az 1 játékhoz tartozó részvételi díjat. A bank bevétele összesen: $100A$.

Ha a játék igazságos, akkor a nyeremények összege megegyezik a részvételi díjak összegével:

$$50 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 100A$$

Ebből megkapjuk az igazságos részvételi díjat (a nyeremény várható értéke):

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3.5 \text{ Ft}$$

Példa. Pénzérmét dobálunk. Ha a dobás *fej*, akkor 2 Ft-ot nyerünk, ha *írás*, akkor 5 Ft-ot nyerünk. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Megoldás:

Játszuk le 100-szor a játékot. Az esetek kb. felében 2 Ft, a másik felében 5 Ft lesz a nyereményünk. Így a várható nyeremény $50 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 350$ Ft lesz.

Jelölje A az 1 játékhoz tartozó részvételi díjat. A bank bevétele összesen: $100A$.

Ha a játék igazságos, akkor a nyeremények összege megegyezik a részvételi díjak összegével:

$$50 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 100A$$

Ebből megkapjuk az igazságos részvételi díjat (a nyeremény várható értéke):

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3.5 \text{ Ft}$$

Példa. Pénzérmét dobálunk. Ha a dobás *fej*, akkor 2 Ft-ot nyerünk, ha *írás*, akkor 5 Ft-ot nyerünk. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Megoldás:

Játszuk le 100-szor a játékot. Az esetek kb. felében 2 Ft, a másik felében 5 Ft lesz a nyereményünk. Így a várható nyeremény $50 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 350$ Ft lesz.

Jelölje A az 1 játékhoz tartozó részvételi díjat. A bank bevétele összesen: $100A$.

Ha a játék igazságos, akkor a nyeremények összege megegyezik a részvételi díjak összegével:

$$50 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 100A$$

Ebből megkapjuk az igazságos részvételi díjat (a nyeremény várható értéke):

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3.5 \text{ Ft}$$

Példa. Pénzérmét dobálunk. Ha a dobás *fej*, akkor 2 Ft-ot nyerünk, ha *írás*, akkor 5 Ft-ot nyerünk. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Megoldás:

Játszuk le 100-szor a játékot. Az esetek kb. felében 2 Ft, a másik felében 5 Ft lesz a nyereményünk. Így a várható nyeremény $50 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 350$ Ft lesz.

Jelölje A az 1 játékhoz tartozó részvételi díjat. A bank bevétele összesen: $100A$.

Ha a játék igazságos, akkor a nyeremények összege megegyezik a részvételi díjak összegével:

$$50 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 100A$$

Ebből megkapjuk az igazságos részvételi díjat (a nyeremény várható értéke):

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3.5 \text{ Ft}$$

Példa. Lottózás. (90-ből 5-öt kell eltalálni)

Annak a valószínűsége, hogy k találatunk lesz

$$p_k = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}.$$

Nyeremények:

5 találat: 1100 millió Ft
4 találat: 2 192 217 Ft
3 találat: 18 893 Ft
2 találat: 1 300 Ft

A fentiekből kiszámolható az igazságos részvételi díj (szelvény ára):

$$A = 1\,300 p_2 + 18\,893 p_3 + 2\,192\,217 p_4 + 1100\,000\,000 p_5$$

$$A = 91 \text{ Ft}$$

Példa. Lottózás. (90-ből 5-öt kell eltalálni)

Annak a valószínűsége, hogy k találatunk lesz

$$p_k = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}.$$

Nyeremények:

5 találat:	1100 millió Ft
4 találat:	2 192 217 Ft
3 találat:	18 893 Ft
2 találat:	1 300 Ft

A fentiekből kiszámolható az igazságos részvételi díj (szelvény ára):

$$A = 1\,300 p_2 + 18\,893 p_3 + 2\,192\,217 p_4 + 1100\,000\,000 p_5$$

$$A = 91 \text{ Ft}$$

Példa. Lottózás. (90-ből 5-öt kell eltalálni)

Annak a valószínűsége, hogy k találatunk lesz

$$p_k = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}.$$

Nyeremények:

5 találat:	1100 millió Ft
4 találat:	2 192 217 Ft
3 találat:	18 893 Ft
2 találat:	1 300 Ft

A fentiekből kiszámolható az igazságos részvételi díj (szelvény ára):

$$A = 1\,300 p_2 + 18\,893 p_3 + 2\,192\,217 p_4 + 1100\,000\,000 p_5$$

$$A = 91 \text{ Ft}$$

Példa. Lottózás. (90-ből 5-öt kell eltalálni)

Annak a valószínűsége, hogy k találatunk lesz

$$p_k = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}.$$

Nyeremények:

5 találat:	1100 millió Ft
4 találat:	2 192 217 Ft
3 találat:	18 893 Ft
2 találat:	1 300 Ft

A fentiekből kiszámolható az igazságos részvételi díj (szelvény ára):

$$A = 1\,300 p_2 + 18\,893 p_3 + 2\,192\,217 p_4 + 1100\,000\,000 p_5$$

$$A = 91 \text{ Ft}$$

(*Pétervári játék*) Egy játékos részvételi díjat fizet a banknak. Ezért addig dobálhat egy szabályos pénzérmét, amíg *fej* nem lesz. Ha a k-adik kisérletre jött ki az első *fej*, akkor a játékos 2^k forintot kap a banktól. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Nyeremények:

ha az első dobásra jön ki a *fej*, akkor a nyeremény 2 Ft

ha a 2. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^2 = 4$ Ft

ha a 3. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^3 = 8$ Ft

$\ldots$

Kiszámolható, hogy $\dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1}{1024} = 0.0009766 = 0.09766\,\%$ annak a valószínűsége, hogy még 10 dobásból sem jön ki *fej*.

Viszont a nyeremény várható értéke végtelen!

Nem határozható meg egyszerűen az igazságos részvételi díj!

(*Pétervári játék*) Egy játékos részvételi díjat fizet a banknak. Ezért addig dobálhat egy szabályos pénzérmét, amíg *fej* nem lesz. Ha a k-adik kisérletre jött ki az első *fej*, akkor a játékos 2^k forintot kap a banktól. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Nyeremények:

ha az első dobásra jön ki a *fej*, akkor a nyeremény 2 Ft

ha a 2. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^2 = 4$ Ft

ha a 3. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^3 = 8$ Ft

$\dots$

Kiszámolható, hogy $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0.0009766 = 0.09766\,\%$ annak a valószínűsége, hogy még 10 dobásból sem jön ki *fej*.

Viszont a nyeremény várható értéke végtelen!

Nem határozható meg egyszerűen az igazságos részvételi díj!

(*Pétervári játék*) Egy játékos részvételi díjat fizet a banknak. Ezért addig dobálhat egy szabályos pénzérmét, amíg *fej* nem lesz. Ha a k-adik kisérletre jött ki az első *fej*, akkor a játékos 2^k forintot kap a banktól. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Nyeremények:

ha az első dobásra jön ki a *fej*, akkor a nyeremény 2 Ft

ha a 2. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^2 = 4$ Ft

ha a 3. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^3 = 8$ Ft

...

Kiszámolható, hogy $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0.0009766 = 0.09766\,\%$ annak a valószínűsége, hogy még 10 dobásból sem jön ki *fej*.

Viszont a nyeremény várható értéke végtelen!
Nem határozható meg egyszerűen az igazságos részvételi díj!

(*Pétervári játék*) Egy játékos részvételi díjat fizet a banknak. Ezért addig dobálhat egy szabályos pénzérmét, amíg *fej* nem lesz. Ha a k-adik kisérletre jött ki az első *fej*, akkor a játékos 2^k forintot kap a banktól. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Nyeremények:

ha az első dobásra jön ki a *fej*, akkor a nyeremény 2 Ft

ha a 2. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^2 = 4$ Ft

ha a 3. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^3 = 8$ Ft

...

Kiszámolható, hogy $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0.0009766 = 0.09766\,\%$ annak a valószínűsége, hogy még 10 dobásból sem jön ki *fej*.

Viszont a nyeremény várható értéke végtelen!
Nem határozható meg egyszerűen az igazságos részvételi díj!

(*Pétervári játék*) Egy játékos részvételi díjat fizet a banknak. Ezért addig dobálhat egy szabályos pénzérmét, amíg *fej* nem lesz. Ha a k-adik kisérletre jött ki az első *fej*, akkor a játékos 2^k forintot kap a banktól. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Nyeremények:

ha az első dobásra jön ki a *fej*, akkor a nyeremény 2 Ft

ha a 2. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^2 = 4$ Ft

ha a 3. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^3 = 8$ Ft

...

Kiszámolható, hogy $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0.0009766 = 0.09766\,\%$ annak a valószínűsége, hogy még 10 dobásból sem jön ki *fej*.

Viszont a nyeremény várható értéke végtelen!

Nem határozható meg egyszerűen az igazságos részvételi díj!

(*Pétervári játék*) Egy játékos részvételi díjat fizet a banknak. Ezért addig dobálhat egy szabályos pénzérmét, amíg *fej* nem lesz. Ha a k-adik kisérletre jött ki az első *fej*, akkor a játékos 2^k forintot kap a banktól. Mennyi az igazságos részvételi díj?

Nyeremények:
ha az első dobásra jön ki a *fej*, akkor a nyeremény 2 Ft

ha a 2. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^2 = 4$ Ft

ha a 3. dobásra jön ki először a *fej*, akkor a nyeremény $2^3 = 8$ Ft

...

Kiszámolható, hogy $\dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1}{1024} = 0.0009766 = 0.09766\,\%$ annak a valószínűsége, hogy még 10 dobásból sem jön ki *fej*.

Viszont a nyeremény várható értéke végtelen!
Nem határozható meg egyszerűen az igazságos részvételi díj!

(*ajándékozás*) Egy n tagú társaságban mindenki megajándékozza egy társát úgy, hogy cédulákra felírják a nevüket, azokat egy kalapba teszik, majd mindenki húz egy nevet visszatevés nélkül. Ha valaki a saját nevét húzza ki, akkor az egész sorsolást megismétlik.

a) Várhatóan hányan húzzák ki a saját nevüket?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy meg kell ismételni a sorsolást?

c) Várhatóan hányszor kell megismételni a sorsolást?

Megoldás:

a) Annak a valószínűsége, hogy egy adott ember a saját nevét kihúzza $\frac{1}{n}$.

(*ajándékozás*) Egy n tagú társaságban mindenki megajándékozza egy társát úgy, hogy cédulákra felírják a nevüket, azokat egy kalapba teszik, majd mindenki húz egy nevet visszatevés nélkül. Ha valaki a saját nevét húzza ki, akkor az egész sorsolást megismétlik.
a) Várhatóan hányan húzzák ki a saját nevüket?
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy meg kell ismételni a sorsolást?
c) Várhatóan hányszor kell megismételni a sorsolást?

Megoldás:
a) Annak a valószínűsége, hogy egy adott ember a saját nevét kihúzza $\frac{1}{n}$.

Ismételjük meg n-szer a sorsolást, és írjunk le 0-t, ha valaki nem húzza ki a saját nevét, 1-t, ha valaki kihúzza a sajátját.

	1. ember	2. ember	3. ember	...	n-1. ember	n. ember
1. sorsolás:	0	1	0	...	0	0
2. sorsolás:	1	0	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n. sorsolás:	0	0	0	...	1	0

Várhatóan 1 oszlopba (1 személyhez) 1 db 1-es kerül.

Tehát n sorsolásból várhatóan n ember húzza ki a sajátját. Így 1 sorsolásból várhatóan 1 ember húzza ki a sajátját.

Ismételjük meg n-szer a sorsolást, és írjunk le 0-t, ha valaki nem húzza ki a saját nevét, 1-t, ha valaki kihúzza a sajátját.

	1. ember	2. ember	3. ember	...	n-1. ember	n. ember
1. sorsolás:	0	1	0	...	0	0
2. sorsolás:	1	0	0	...	0	0
.	.	.	.	...	.	.
n. sorsolás:	0	0	0	...	1	0

Várhatóan 1 oszlopba (1 személyhez) 1 db 1-es kerül.

Tehát n sorsolásból várhatóan n ember húzza ki a sajátját. Így 1 sorsolásból várhatóan 1 ember húzza ki a sajátját.

Ismételjük meg n-szer a sorsolást, és írjunk le 0-t, ha valaki nem húzza ki a saját nevét, 1-t, ha valaki kihúzza a sajátját.

	1. ember	2. ember	3. ember	...	n-1. ember	n. ember
1. sorsolás:	0	1	0	...	0	0
2. sorsolás:	1	0	0	...	0	0
.	.	.	.	...	.	.
n. sorsolás:	0	0	0	...	1	0

Várhatóan 1 oszlopba (1 személyhez) 1 db 1-es kerül.

Tehát n sorsolásból várhatóan n ember húzza ki a sajátját. Így 1 sorsolásból várhatóan 1 ember húzza ki a sajátját.

Ismételjük meg n-szer a sorsolást, és írjunk le 0-t, ha valaki nem húzza ki a saját nevét, 1-t, ha valaki kihúzza a sajátját.

	1. ember	2. ember	3. ember	...	n-1. ember	n. ember
1. sorsolás:	0	1	0	...	0	0
2. sorsolás:	1	0	0	...	0	0
.	.	.	.	...	.	.
n. sorsolás:	0	0	0	...	1	0

Várhatóan 1 oszlopba (1 személyhez) 1 db 1-es kerül.

Tehát n sorsolásból várhatóan n ember húzza ki a sajátját. Így 1 sorsolásból várhatóan 1 ember húzza ki a sajátját.

(*ajándékozás*) Egy n tagú társaságban mindenki megajándékozza egy társát úgy, hogy cédulákra felírják a nevüket, azokat egy kalapba teszik, majd mindenki húz egy nevet visszatevés nélkül. Ha valaki a saját nevét húzza ki, akkor az egész sorsolást megismétlik.

a) Várhatóan hányan húzzák ki a saját nevüket?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy meg kell ismételni a sorsolást?

c) Várhatóan hányszor kell megismételni a sorsolást?

Megoldás folytatása:

b) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\approx 1-\frac{1}{e}=0.632=63.2\%$, annak a valószínűsége, hogy meg kell ismételni a sorsolást ($e\approx 2.718281828$).

$\Longrightarrow \frac{1}{e}=0.368=36.8\,\%$ annak a valószínűsége, hogy nem kell megismételni a sorsolást

c) $e=2.718281828$ (várhatóan ennyiszer kell megismételni a sorsolást)

(*ajándékozás*) Egy n tagú társaságban mindenki megajándékozza egy társát úgy, hogy cédulákra felírják a nevüket, azokat egy kalapba teszik, majd mindenki húz egy nevet visszatevés nélkül. Ha valaki a saját nevét húzza ki, akkor az egész sorsolást megismétlik.

a) Várhatóan hányan húzzák ki a saját nevüket?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy meg kell ismételni a sorsolást?

c) Várhatóan hányszor kell megismételni a sorsolást?

Megoldás folytatása:

b) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} \approx 1 - \frac{1}{e} = 0.632 = 63.2\%$, annak a valószínűsége, hogy meg kell ismételni a sorsolást ($e \approx 2.718281828$).

$\Longrightarrow \frac{1}{e} = 0.368 = 36.8\,\%$ annak a valószínűsége, hogy nem kell megismételni a sorsolást

c) $e = 2.718281828$ (várhatóan ennyiszer kell megismételni a sorsolást)

(*ajándékozás*) Egy n tagú társaságban mindenki megajándékozza egy társát úgy, hogy cédulákra felírják a nevüket, azokat egy kalapba teszik, majd mindenki húz egy nevet visszatevés nélkül. Ha valaki a saját nevét húzza ki, akkor az egész sorsolást megismétlik.
a) Várhatóan hányan húzzák ki a saját nevüket?
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy meg kell ismételni a sorsolást?
c) Várhatóan hányszor kell megismételni a sorsolást?

Megoldás folytatása:

b) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} \approx 1 - \frac{1}{e} = 0.632 = 63.2\%$, annak a valószínűsége, hogy meg kell ismételni a sorsolást ($e \approx 2.718281828$).
$\Longrightarrow \frac{1}{e} = 0.368 = 36.8\,\%$ annak a valószínűsége, hogy nem kell megismételni a sorsolást

c) $e = 2.718281828$ (várhatóan ennyiszer kell megismételni a sorsolást)

Szindbad kiválaszthat n számú háremhölgy közül egyet oly módon, hogy az előtte elvonuló hölgyek egyikére rámutat. A hölgyek között Szindbad egyértelmű szépségi sorrendet tud megállapítani és bármely elvonulási sorrend egyformán valószínű. Szindbad megnézi az első k számú hölgyet, majd az utánuk következők közül kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonult hölgynél.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezzel a stratégiával a legszebb hölgyet választja ki?

b) Milyen k-ra lesz ez a valószínűség a legnagyobb? (optimális stratégia)

c) Sok háremhölgy esetén hogyan közelíthető a legnagyobb valószínűség?

Megoldás:

a) $\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$

b) $k \approx \frac{n}{e} = 0.368\, n, \quad \text{ahol } e = 2.718281828$

n=100 háremhölgy esetén $k = 37$

c) $p \approx \frac{1}{e} = 0.368 = 36.8\,\%$

Szindbad kiválaszthat n számú háremhölgy közül egyet oly módon, hogy az előtte elvonuló hölgyek egyikére rámutat. A hölgyek között Szindbad egyértelmű szépségi sorrendet tud megállapítani és bármely elvonulási sorrend egyformán valószínű. Szindbad megnézi az első k számú hölgyet, majd az utánuk következők közül kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonult hölgynél.
a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezzel a stratégiával a legszebb hölgyet választja ki?
b) Milyen k-ra lesz ez a valószínűség a legnagyobb? (optimális stratégia)
c) Sok háremhölgy esetén hogyan közelíthető a legnagyobb valószínűség?

Megoldás:

a) $\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$

b) $k \approx \frac{n}{e} = 0.368\, n$, ahol $e = 2.718281828$

n=100 háremhölgy esetén $k = 37$

c) $p \approx \frac{1}{e} = 0.368 = 36.8\,\%$

Szindbad kiválaszthat n számú háremhölgy közül egyet oly módon, hogy az előtte elvonuló hölgyek egyikére rámutat. A hölgyek között Szindbad egyértelmű szépségi sorrendet tud megállapítani és bármely elvonulási sorrend egyformán valószínű. Szindbad megnézi az első k számú hölgyet, majd az utánuk következők közül kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonult hölgynél.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezzel a stratégiával a legszebb hölgyet választja ki?

b) Milyen k-ra lesz ez a valószínűség a legnagyobb? (optimális stratégia)

c) Sok háremhölgy esetén hogyan közelíthető a legnagyobb valószínűség?

Megoldás:

a) $\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$

b) $k \approx \frac{n}{e} = 0.368\,n$, ahol $e = 2.718281828$

n=100 háremhölgy esetén $k = 37$

c) $p \approx \frac{1}{e} = 0.368 = 36.8\,\%$

Szindbad kiválaszthat n számú háremhölgy közül egyet oly módon, hogy az előtte elvonuló hölgyek egyikére rámutat. A hölgyek között Szindbad egyértelmű szépségi sorrendet tud megállapítani és bármely elvonulási sorrend egyformán valószínű. Szindbad megnézi az első k számú hölgyet, majd az utánuk következők közül kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonult hölgynél.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezzel a stratégiával a legszebb hölgyet választja ki?

b) Milyen k-ra lesz ez a valószínűség a legnagyobb? (optimális stratégia)

c) Sok háremhölgy esetén hogyan közelíthető a legnagyobb valószínűség?

Megoldás:

a) $\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$

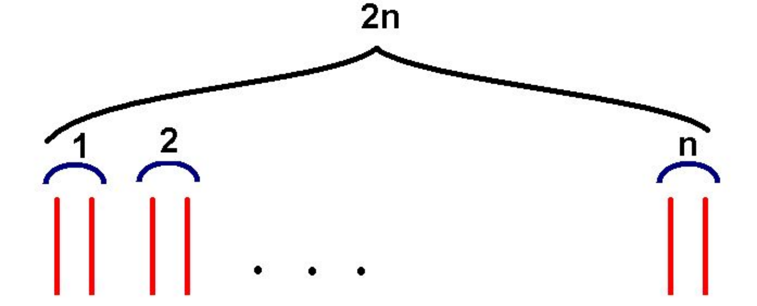
b) $k \approx \frac{n}{e} = 0.368\, n, \quad \text{ahol } e = 2.718281828$

n=100 háremhölgy esetén $k = 37$

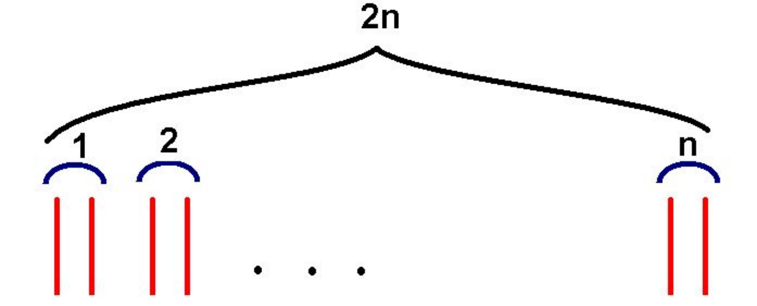
c) $p \approx \frac{1}{e} = 0.368 = 36.8\,\%$

(*véletlen párosítás*) Kettétörünk n db pálcát. A darabokat véletlenszerűen párba rendezzük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az összetartozó darabok alkotják majd a párokat?

(*véletlen párosítás*) Kettétörünk n db pálcát. A darabokat véletlenszerűen párba rendezzük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az összetartozó darabok alkotják majd a párokat?



(*véletlen párosítás*) Kettétörünk n db pálcát. A darabokat véletlenszerűen párba rendezzük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az összetartozó darabok alkotják majd a párokat?



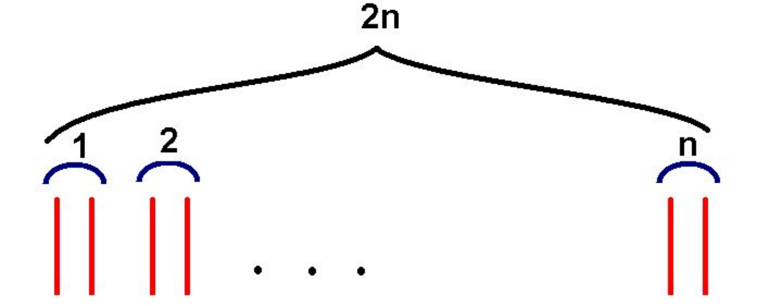
Megoldás:

$2n$ db félpálca sorbarendezéseinek száma: $(2n)!$ (összes eset)

kedvező esetek száma: $n!\,2^n$

valószínűség: $p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{n!\,2^n}{(2n)!}$

(*véletlen párosítás*) Kettétörünk n db pálcát. A darabokat véletlenszerűen párba rendezzük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az összetartozó darabok alkotják majd a párokat?



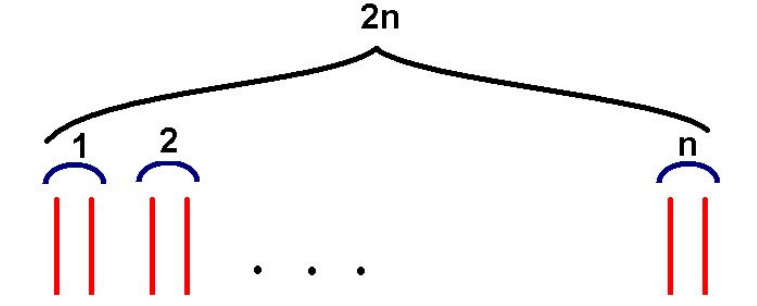
Megoldás:

$2n$ db félpálca sorbarendezéseinek száma: $(2n)!$ (összes eset)

kedvező esetek száma: $n!\,2^n$

valószínűség: $p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{n!\,2^n}{(2n)!}$

(*véletlen párosítás*) Kettétörünk n db pálcát. A darabokat véletlenszerűen párba rendezzük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az összetartozó darabok alkotják majd a párokat?



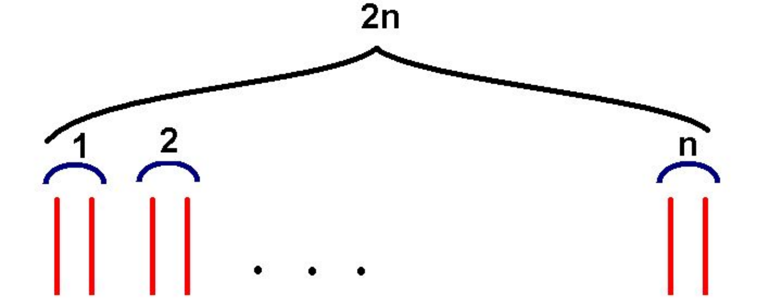
Megoldás:

$2n$ db félpálca sorbarendezéseinek száma: $(2n)!$ (összes eset)

kedvező esetek száma: $n!\,2^n$

valószínűség: $p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{n!\,2^n}{(2n)!}$

(*véletlen párosítás*) Kettétörünk n db pálcát. A darabokat véletlenszerűen párba rendezzük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az összetartozó darabok alkotják majd a párokat?



Megoldás:

$2n$ db félpálca sorbarendezéseinek száma: $(2n)!$ (összes eset)

kedvező esetek száma: $n!\,2^n$

valószínűség: $p = \dfrac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \dfrac{n!\,2^n}{(2n)!}$

Blaise Pascal (1623-1662)

Chevaler de Mére lovag a következő kérdéseket tette fel Pascalnak:

a) Egy szabályos kockával négyszer dobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egy hatost?

b) Két szabályos kockát 24-szer feldobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egyszer két hatost?

De Mére megoldása szerint mindkét esetben $\frac{1}{2}$ a kérdéses valószínűség. Egyetértünk-e vele?

Megoldás:

a) egy dobásból nem kapunk hatost: $\frac{5}{6}$

4 dobásból egyszer sem kapunk hatost: $\left(\frac{5}{6}\right)^4$

4 dobásból legalább egy hatost kapunk: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 = 51.77\,\%$

Chevaler de Mére lovag a következő kérdéseket tette fel Pascalnak:

a) Egy szabályos kockával négyszer dobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egy hatost?

b) Két szabályos kockát 24-szer feldobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egyszer két hatost?

De Mére megoldása szerint mindkét esetben $\frac{1}{2}$ a kérdéses valószínűség. Egyetértünk-e vele?

Megoldás:

a) egy dobásból nem kapunk hatost: $\frac{5}{6}$

4 dobásból egyszer sem kapunk hatost: $\left(\frac{5}{6}\right)^4$

4 dobásból legalább egy hatost kapunk: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 = 51.77\,\%$

Chevaler de Mére lovag a következő kérdéseket tette fel Pascalnak:

a) Egy szabályos kockával négyszer dobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egy hatost?

b) Két szabályos kockát 24-szer feldobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egyszer két hatost?

De Mére megoldása szerint mindkét esetben $\frac{1}{2}$ a kérdéses valószínűség. Egyetértünk-e vele?

Megoldás:

a) egy dobásból nem kapunk hatost: $\frac{5}{6}$

4 dobásból egyszer sem kapunk hatost: $\left(\frac{5}{6}\right)^4$

4 dobásból legalább egy hatost kapunk: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 = 51.77\,\%$

Chevaler de Mére lovag a következő kérdéseket tette fel Pascalnak:

a) Egy szabályos kockával négyszer dobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egy hatost?

b) Két szabályos kockát 24-szer feldobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egyszer két hatost?

De Mére megoldása szerint mindkét esetben $\frac{1}{2}$ a kérdéses valószínűség. Egyetértünk-e vele?

Megoldás:

a) egy dobásból nem kapunk hatost: $\frac{5}{6}$

4 dobásból egyszer sem kapunk hatost: $\left(\frac{5}{6}\right)^4$

4 dobásból legalább egy hatost kapunk: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 = 51.77\,\%$

Chevaler de Mére lovag a következő kérdéseket tette fel Pascalnak:

a) Egy szabályos kockával négyszer dobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egy hatost?

b) Két szabályos kockát 24-szer feldobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egyszer két hatost?

De Mére megoldása szerint mindkét esetben $\frac{1}{2}$ a kérdéses valószínűség. Egyetértünk-e vele?

Megoldás folytatása:

b) egy páros dobásból nem kapunk két hatost: $\frac{35}{36}$

24 páros dobásból nem kapunk két hatost: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$

24 páros dobásból legalább egyszer két hatost kapunk:

$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 = 49.14\,\%$

Chevaler de Mére lovag a következő kérdéseket tette fel Pascalnak:

a) Egy szabályos kockával négyszer dobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egy hatost?

b) Két szabályos kockát 24-szer feldobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egyszer két hatost?

De Mére megoldása szerint mindkét esetben $\frac{1}{2}$ a kérdéses valószínűség. Egyetértünk-e vele?

Megoldás folytatása:

b) egy páros dobásból nem kapunk két hatost: $\frac{35}{36}$

24 páros dobásból nem kapunk két hatost: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$

24 páros dobásból legalább egyszer két hatost kapunk:
$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0.4914=49.14\,\%$

Chevaler de Mére lovag a következő kérdéseket tette fel Pascalnak:

a) Egy szabályos kockával négyszer dobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egy hatost?

b) Két szabályos kockát 24-szer feldobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egyszer két hatost?

De Mére megoldása szerint mindkét esetben $\frac{1}{2}$ a kérdéses valószínűség. Egyetértünk-e vele?

Megoldás folytatása:

b) egy páros dobásból nem kapunk két hatost: $\frac{35}{36}$

24 páros dobásból nem kapunk két hatost: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$

24 páros dobásból legalább egyszer két hatost kapunk:

$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 = 49.14\,\%$

Chevaler de Mére lovag a következő kérdéseket tette fel Pascalnak:

a) Egy szabályos kockával négyszer dobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egy hatost?

b) Két szabályos kockát 24-szer feldobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egyszer két hatost?

De Mére megoldása szerint mindkét esetben $\frac{1}{2}$ a kérdéses valószínűség. Egyetértünk-e vele?

Megoldás folytatása:
b) egy páros dobásból nem kapunk két hatost: $\frac{35}{36}$

24 páros dobásból nem kapunk két hatost: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$

24 páros dobásból legalább egyszer két hatost kapunk:
$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0.4914=49.14\,\%$

Irodalom

[1] Bognár Jánosné – Mogyoródi József – Prékopa András – Rényi Alfréd – Szász Domokos: *Valószínűségszámítás feladatgyűjtemény*, Typotex, Budapest, 2001.

[2] Nemetz Tibor - Wintsche Gergely: *Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek*, JATE Bolyai Intézet – Polygon, Szeged, 1999