Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIX. esztendő

2022-2023. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Adott az $x^2+(y-a)^2=a^2$ egyenletű kör, ahol a pozitív valós szám. Az x tengely tetszőleges $P(x;\,0)$ pontján keresztül felvesszük a kör x tengelytől különböző érintőjét. Ennek az érintőnek a körrel vett érintési pontját jelölje E. Adjuk meg az OPE háromszögek magasságpontjainak halmazát, ha P befutja az x tengelyt, O pedig az origót jelöli.

2. Az $ax^2+bx+c>0$ egyenlőtlenség pontosan azokra a valós x értékekre teljesül, amelyekre $1<x<2$. Mely valós x értékekre teljesül a $cx^2+bx+a<0$ egyenlőtlenség?

3. Egy körvonal P pontjából felvettük a PA és PB húrokat úgy, hogy $PA=18$ cm és $PB=12$ cm. A PA húr F felezőpontjának a PB egyenestől mért távolsága 2 cm. Mekkora a kör sugara?

4. Mely pozitív egész n esetén lesz az $n^2+19n+48$ kifejezés értéke négyzetszám (egy egész szám négyzete)?

5. Hat darab méretre és alakra egyforma korong közül egy piros, kettő sárga, három kék. Hányféleképpen rakhatók sorba úgy, hogy ne kerüljön egymás mellé két azonos színű korong?

6. Az $ABCD$ tetraéder négy lapjának területe rendre $T_A;\,T_B;\,T_C;\,T_D$, ahol az indexbe írt betű jelöli, hogy melyik csúccsal van szemben a tekintett lap. Az A, B, C, D csúcsokból induló testmagasságok rendre $m_A;\,m_B;\,m_C;\,m_D$. Bizonyítsuk be, hogy ha V a tetraéder térfogata, akkor

$$\left(T_A+T_B+T_C+T_D\right)\cdot\left(m_A+m_B+m_C+m_D\right)\geq 48\cdot V\ .$$

(A hosszúság, terület és térfogat mértékegységei egymásnak megfelelőek.)