Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIX. esztendő

2022-2023. tanév

11. évfolyam

II. forduló

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amely osztható 30-cal, és pozitív osztóinak száma 30?

2. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2^{\left|x^{\log_3 x+2}-27\right|}=1$$

3. Az ABC háromszögben a B csúcsból induló szögfelező az AC oldalt a D, a C csúcsból induló szögfelező az AB oldalt az E pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy ha $BE+CD=BC$, akkor az $AEKD$ négyszög húrnégyszög (K a háromszög beírt körének középpontja).

4. Bizonyítsuk be, hogy az $x!+y!$ összeg nem írható fel másképpen két pozitív egész szám faktoriálisának összegeként. ($n!$ („n faktoriális”) az első n pozitív egész szám szorzata.)

5. Az $x^3+ax^2+bx+c=0$ egyenlet (a, b, c valós számok) x_1, x_2, x_3 gyökei pozitív valós számok. Határozzuk meg az $a+b+c$ maximális értékét, ha tudjuk, hogy $x_1+x_2+x_3=6$ és $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=8$.

6. Melyek azok az n és k természetes számok, amelyekre teljesül, hogy $\binom{n}{k}=n+k$?