Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVIII. esztendő

2019-2020. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$5^{2x} - 26 \cdot 5^x + \sqrt{5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 26} = -24$$

2. Az ABC hegyesszögű háromszög köré írt kör középpontja O. Az A, B, O pontokra illeszkedő kör az AC egyenest M-ben, a BC egyenest N-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy az MNC háromszög köré írt kör sugara ugyanakkora, mint az ABO háromszög köré írt kör sugara.

3. Melyek azok a pozitív egész n számok és a számjegyek a tízes számrendszerben, amelyekre

$$\underbrace{11...1}_{2n \text{ darab}} - \underbrace{aa...a}_{n \text{ darab}}$$

egy pozitív egész szám négyzete?

4. Határozzuk meg az $(1-a_1)(1-b_1)+(1-a_2)(1-b_2)$ kifejezés legnagyobb értékét, ha tudjuk, hogy $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1$.

5. Számítsuk ki az $\{a_n\}$ sorozat első 2020 tagjának összegét, ha $a_1 = \dfrac{2}{3}$ és $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 \cdot (2n+1) \cdot a_n + 1}$, ha $n \geq 1$.

6. Egy háromoldalú (háromszögalapú) csonkagúla alaplapjának területe A_1, fedőlapjának területe A_2 ($A_2 < A_1$), oldallapjai területének összege P. Igazoljuk, hogy ha a csonkagúla úgy vágható két részre egy, az alaplapjával párhuzamos síkkal, hogy a kapott két kisebb csonkagúla mindegyikének van beírható gömbje, akkor

$$P = \left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{A_1} + \sqrt[4]{A_2}\right)^2 .$$