Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIV. esztendő

2015-2016. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Az $\{a_n\}$ sorozat első n elemének összege $S_n = n^2 + 3n + 4$ ($n \in \mathbf{N}^+$). Határozzuk meg n függvényeként az $A_n = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1}$ összeget.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha az a és b pozitív valós számok nem nagyobbak 1-nél, akkor

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \le \frac{2}{1+ab}.$$

3. Egy érintőnégyszögbe beírtunk négy kör úgy, hogy mindegyikük érinti a négyszög két szomszédos oldalát, és kívülről érint másik két kört. Mutassuk meg, hogy a négy kör között van két egybevágó.

4. Határozzuk meg azokat a rendezett (a; b) számpárokat, amelyekre $3^a + 7^b$ egy pozitív egész szám négyzete.

5. Az $ABCD$ húrnégyszögben $DAC\angle = \alpha_1$, $CAB\angle = \alpha_2$, $BCA\angle = \gamma_1$, $ACD\angle = \gamma_2$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \sin(\alpha_2 + \gamma_1) \cdot \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \sin(\gamma_2 + \alpha_1) \ge 4 \cdot \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \sin\gamma_1 \cdot \sin\gamma_2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

6. Egy körvonalon felveszünk 1000 pontot, és valahogyan (nem feltétlenül sorban) megszámozzuk őket az első 1000 pozitív egész szám felhasználásával. (Bármely két ponthoz rendelt szám különböző.) Igazoljuk, hogy lefedhetők a pontok 500 szakasszal úgy, hogy bármely lefedő szakasz két végpontjához rendelt számok különbsége (abszolútértékben) kisebb 750-nél, és semelyik két szakasznak nincs közös pontja.