Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIV. esztendő

2015-2016. tanév

10. évfolyam

I. forduló

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán, ha p valós paraméter.

$$\left(p^2-1\right)\cdot x+p\cdot\left(x^2-1\right)=p^2\cdot\left(x^2-x+1\right)$$

2. Egy háromszög oldalhosszai a, b, c, a megfelelő magasságok pedig rendre m_a, m_b, m_c. Bizonyítsuk be, hogy ha $2b=a+c$, akkor $\frac{2}{m_b}=\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_c}$.

3. Tekintsük azokat a legalább kétjegyű tízes számrendszerbeli számokat, amelyek azonos számjegyekből állnak. Van-e közöttük négyzetszám? (A választ indokolni kell.)

4. Az ABC háromszög AB oldalának D, BC oldalának E és CA oldalának F pontjára teljesül, hogy $DE=BE$ és $FE=CE$. Igazoljuk, hogy a DEF szög felezője illeszkedik az ADF háromszög köré írt kör középpontjára.

5. Egy utasszállító óriás repülőgépen minden sorban 7 ülőhely van. A székek soronként 1-től 7-ig ugyanúgy (pl. repülési irányba állva balról jobbra) vannak számozva. Legfeljebb hány utas esetén valósítható meg, hogy ne legyen két olyan sor a gépen, amelyeket egyformán foglaltak el, vagyis amelyekben az azonos sorszámú székeken ül utas?

6. Hét darab páronként különböző pozitív egész szám összege 100. Mutassuk meg, hogy kiválasztható közülük három szám úgy, hogy összegük nem kisebb 50-nél.