

Diplomamunka

Zombory Tibor

2015

Kovariogram és Blaschke-vektor

Diplomamunka

Zombory Tibor

Témavezető: dr. Kurusa Árpád

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Szeged
2015

Előszó

Jelen dolgozat az integrálgeometria egy klasszikus és egy relatíve új ágának kapcsolatával foglalkozik.

Az első szakaszban a feldolgozott anyaghoz nélkülözhetetlen elméleti hátteret ismertetjük.

A második szakasz elején bevezetjük egy konvex test kovariogramját, azt a vektor-skalár függvényt, mely egy vektorhoz a test és annak ezen vektorral való eltoltjával vett metszete térfogatát rendeli. Ezt követően ezen függvény alapvető tulajdonságait bizonyítjuk, majd a kovariogram-problémára helyezzük a hangsúlyt, melyet először G. Matheron vetett fel [21]. A kérdés az, hogy meghatározza-e a testet a kovariogramja. A síkban először Nagel [24] adott pozitív választ a poligonok esetére. Ezt követően Bianchi, Segala és Volčič [5] a folytonos, szigorúan pozitív görbületű konvex határral rendelkező testekre, majd később Bianchi egyéb speciális esetekre bizonyította a [3] sejtést, illetve talált ellenpéldát a háromnál nagyobb dimenziókban. Később, sok más részeredmény után Averkov és Bianchi [1] bizonyította az egyértelműséget minden kellően reguláris konvex tartományra, mellyel a korábbi eredmények fényében teljessé vált a kovariogram probléma síkbeli megoldása. A dolgozatban ezen utóbbi cikkel foglalkozunk részletesen. Négyenél magasabb dimenzióban a válasz negatív [3], melyet Bianchi egy példacsaláddal igazolt. Pozitív a válasz a háromdimenziós politópok esetére [4], de az általános háromdimenziós eset még nyitott. Goodley, Schneider és Weil igazolta, hogy tetszőleges dimenzióban a Baire-féle kategóriák értelmében a legtöbb konvex testet meghatározza a kovariogramja [16].

A harmadik szakaszban a klasszikus integrálgeometria területéről ismertetjük a Blaschke-vektort, melynek elemei a konvex test húrhosszai hatványainak integráljai. Ezen vektor elemei közti összefüggések bebizonyítása után azt a Blaschke által feltett kérdést [8, p. 52] vizsgáljuk meg, hogy a véletlen hurok hosszainak momentuma meghatározza-e a konvex testet izometria erejéig. A válasz még poligonokra is negatív, melyet Mallows és Clark ellenpéldacsaládja igazol [20].

A dolgozat végén, a 3.10. Tételbe teljes egészében tisztázzuk a kovariogram és a Blaschke-vektor kapcsolatát.

A dolgozat a L^AT_EX és a Tikz eszközökkel készült, de némely ábrát a Wolfram Mathematica szoftvere generált.

Tartalomjegyzék

Előszó	i
1. Háttér	1
1.1. Integrálgeometriai mértékek és sűrűségfüggvény	2
1.2. A Steiner-féle szimmetrizálási eljárás	4
1.3. A Hausdorff-féle momentumprobléma	5
2. A kovariogram	8
2.1. A kovariogram-probléma	13
3. Blaschke-féle integrálok	23
3.1. Húrhosszak eloszlása	27
Jelölések és konvenciók	33
Irodalomjegyzék	34
Köszönetnyilvánítás	36
Nyilatkozat	37

1. FEJEZET

Háttér

Néhány, a továbbiakhoz szükséges alapismeret felsorolásával kezdjük.

Konvex testnek hívunk egy $\mathbb{R}^n$ -beli halmazt, ha az konvex, kompakt, és a belseje nem üres.

1.1. Definíció Legyen $\mathcal{K}$ egy konvex test. Ekkor a $h_{\mathcal{K}}: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h_{\mathcal{K}}(\mathbf{n}) := \sup \{p : H(p, \mathbf{n}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset\}$$

függvényt a $\mathcal{K}$ *támaszfüggvényének* nevezzük.

A síkon a támaszfüggvényt a $[0, 2\pi]$ tartományon integrálva éppen a konvex test területét kapjuk, azaz

$$\int_0^{2\pi} h_{\mathcal{K}}(\varphi) d\varphi = |\partial\mathcal{K}|, \quad (1.1)$$

mert a $h_{\mathcal{K}}(\varphi)d\varphi$ szorzat épp a $\partial\mathcal{K}$ görbe egy infinitézimális darabjának ívhossza. Hasonlóan, $\mathcal{K}$ területének kiszámítására a

$$|\mathcal{K}| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_{\mathcal{K}}^2(\varphi) - (h'_{\mathcal{K}}(\varphi))^2 d\varphi \quad (1.2)$$

is ismert összefüggés [25, 4. o.].

1.2. Definíció Egy $\mathcal{K}$ konvex test esetén a $D(\mathcal{K}) := \{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{K}\}$ testet a $\mathcal{K}$ *különbség-halmazának* nevezzük.

Könnyen látható, hogy egyrészt $D(\mathcal{K})$ centrálszimmetrikus az origóra, másrészt pontosan azokat a vektorokat tartalmazza, melyekkel eltolva $\mathcal{K}$ -t, annak $\mathcal{K}$ -val vett metszete nem üres.

Világos ([12, 107. o.]), hogy $D(\mathcal{K})$ pontosan akkor a $2\mathcal{K}$ halmaz eltoltja, ha $\mathcal{K}$ centrálisan szimmetrikus, hiszen $D(\mathcal{K})$ centrálisan szimmetrikus, így $D(\mathcal{K}) = 2\mathcal{K}$ is az, tehát $\mathcal{K}$ is centrálisan szimmetrikus. Ha $\mathcal{K}$ centrálisan szimmetrikus, akkor $D(\mathcal{K}) = \mathcal{K} + \mathcal{K} = 2\mathcal{K}$.

1.3. Definíció Legyenek $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ konvex testek. Ezek Hausdorff-távolsága

$$d_H(\mathcal{K}, \mathcal{L}) := \max \left\{ \sup_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}} \inf_{\mathbf{l} \in \mathcal{L}} d(\mathbf{k}, \mathbf{l}), \sup_{\mathbf{l} \in \mathcal{L}} \inf_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}} d(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \right\}.$$

Az $\mathbb{R}^n$ -beli konvex testek halmaza a Hausdorff-távolsággal teljes metrikus teret alkot. [9, 6. o.]

1.4. Tétel *Konvex testek különbségének térfogata folytonos a Hausdorff-távolságukra nézve.*

Bizonyítás. Legyen ugyanis $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ két konvex test, és tegyük fel, hogy $d_H(\mathcal{K}, \mathcal{L}) < \delta$. Ekkor $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L} + \delta\mathbb{B}^n$ és $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K} + \delta\mathbb{B}^n$, melyből a két test $\mathcal{K} \triangle \mathcal{L}$ szimmetrikus különbségére $(\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}) \cup (\mathcal{L} \setminus \mathcal{K}) \subseteq ((\mathcal{L} + \delta\mathbb{B}^n) \setminus \mathcal{L}) \cup ((\mathcal{K} + \delta\mathbb{B}^n) \setminus \mathcal{K})$ adódik. Innen a térfogatra a $|\mathcal{K} \triangle \mathcal{L}| \leq |(\mathcal{K} + \delta\mathbb{B}^n) \setminus \mathcal{K}| + |(\mathcal{L} + \delta\mathbb{B}^n) \setminus \mathcal{L}| \leq \delta(|\partial\mathcal{K}| + |\partial\mathcal{L}|)$ egyenlőtlenséget kapjuk, ahol $|\partial\mathcal{K}|$ és $|\partial\mathcal{L}|$ nyilván végesek. $\square$

Egy $\mathcal{K}$ konvex test $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{K}$ határpontját C^1 -regulárisnak nevezzük, ha $\mathcal{K}$ -nak pontosan egy támaszhipersíkja illeszkedik $\mathbf{p}$ -re. $\mathcal{K}$ -t C^1 -regulárisnak hívjuk, ha annak minden határpontja C^1 -reguláris.

P -t a síkbeli $\mathcal{K}$ beírt poligonjának nevezzük, ha $P = \text{conv}\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$, és $\mathbf{p}_i \in \partial\mathcal{K}$ ($1 \leq i \leq n$). Egy P poligonra akkor mondjuk, hogy beírható $\mathcal{K}$ -ba, ha annak valamely eltoltja beírt poligonja $\mathcal{K}$ -nak.

A $\mathcal{K}$ egy $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \partial\mathcal{K}$ végpontokkal adott $\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ húrját affin átmérőnek nevezzük, ha a $\mathbf{p}_1$ -beli kifelé mutató normális ellentétes a $\mathbf{p}_2$ -beli kifelé mutató normálissal. Könnyen látható, hogy a $\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ szakasz pontosan akkor affin átmérő, ha $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \in \partial D(\mathcal{K})$.

1.5. Tétel Legyen $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény és $c \in \mathbb{R}$. Ha egy $F(x, y) = c$, implicit függvénnnyel adott görbére valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pont esetén $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ teljesül, akkor az (x_0, y_0) pont körül a görbe előállítható $y = f(x)$ alakban, valamely $f \in C^1$ valós függvénnnyel.

1.1. Integrálgeometriai mértékek és sűrűségfüggvény

Az integrálgeometriában egy sokaság valamely megengedett X részhalmazának $m(X)$ mértékét egy $f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n$ differenciálforma X -en vett integráljaként értelmezzük, ahol az $f(x_1, \dots, x_n)$ sűrűségfüggvény olyan, hogy az m mérték a sokaság mozgásaira nézve invariáns. Ezt a differenciálformát invariáns sűrűségnek nevezzük.

1.6. Tétel Paraméterezzük $\mathbb{R}^n$ pontjait a szokásos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ Descartes-koordinátákkal. Konstansszorzó erejéig a

$$d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n$$

differenciálforma az egyetlen mozgásinvariáns sűrűség.

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{M}$ az $\mathbb{R}^n$ tér mozgáscsoportját. Legyen $\mu \in \mathcal{M}$ tetszőleges, a forgatásmátrixa $\mathbf{A}$, eltolásvektora pedig $\mathbf{b}$. Egy $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ pont $\mu(\mathbf{x})$ képének koordinátái ekkor

$$(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n)\mathbf{A} + \mathbf{b}.$$

Tetszőleges $\mathcal{X}$ mérhető ponthalmaz μ melletti képe $\mu(\mathcal{X}) = \{\mu((x_1, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}\}$. Mivel az $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x'_1, \dots, x'_n)$ leképezés Jacobi-determinánsa $|\det \mathbf{A}| = 1$, ezért $dx_1 \dots dx_n = dx'_1 \dots dx'_n$. Így tehát az $m(\mathcal{X}) = m(\mu(\mathcal{X}))$ feltételünk az

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= m(\mathcal{X}) = m(\mu(\mathcal{X})) = \int_{\mu(\mathcal{X})} f(x'_1, \dots, x'_n) dx'_1 \dots dx'_n \\ &= \int_{\mathcal{X}} f(\mu((x_1, \dots, x_n))) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

kritériumot adja, amely csak úgy állhat fenn minden $\mathcal{X}$ halmazra és μ mozgásra, ha $f(x_1, \dots, x_n) = f(\mu((x_1, \dots, x_n)))$ minden $(x_1, \dots, x_n)$ -re. Mivel $\mathcal{M}$ tranzitívan hat a pontok halmazán, ez csak úgy lehetséges, hogy $f(x_1, \dots, x_n)$ konstans. $\square$

Jelölje $\text{Graff}(n, k)$ az $\mathbb{R}^n$ tér k -dimenziós affin altereinek halmazát. Ez a halmaz [18] szerint megfelelő paraméterezéssel differenciálható sokasággá tehető, melyet affin Grassmann-sokaságnak nevezünk. Ugyancsak [18] szerint $\text{Graff}(n, k)$ -n bevezethető egy olyan, konstans szorzó erejéig meghatározott mérték, mely $\mathbb{R}^n$ mozgáscsoportjára nézve invariáns. Itt csak a $k = n - 1$ esettel foglalkozunk. A $\text{Graff}(n, n - 1)$ esetben ez a paraméterezés az $r: \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \text{Graff}(n, n - 1)$, $(p, \mathbf{n}) \mapsto H(p, \mathbf{n})$ alakot

ölti, ahol $H(p, \mathbf{n})$ a $p\mathbf{n}$ ponton átmenő, $\mathbf{n}$ -re merőleges hipersík. Ez egy kettős fedés, hiszen $H(p, \mathbf{n}) = H(-p, -\mathbf{n})$.

1.7. Tétel *A hipersíkok Graff($n, n-1$) Grassmann-sokaságán a konstans szorzó erejéig az egyetlen mozgásinvariáns sűrűségfüggvény*

$$dpd\mathbf{n},$$

ahol p és $\mathbf{n}$ a $H(p, \mathbf{n})$ hipersík paraméterei.

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges $H(p, \mathbf{n})$ hipersíkot. Ennek egyenlete $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p$. Legyen μ egy mozgás, melynek $\mathbf{A}$ a forgásmátrixa, $\mathbf{b}$ pedig az eltolásvektora. Ekkor a $H(p, \mathbf{n})$ hipersík μ melletti $H(p', \mathbf{n}')$ képének egyenlete $\langle \mathbf{A}\mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p + \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle$, vagyis $p' = p + \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle$, és $\mathbf{n}' = \mathbf{A}\mathbf{n}$. A két paraméterezés közti átmenetmátrix Jacobi-determinánsa $|\det \mathbf{A}| = 1$, lévén μ mozgás, melyből a differenciálformákra a $dpd\mathbf{n} = dp'd\mathbf{n}'$ összefüggés adódik. Tetszőleges $\mathcal{H}$ mérhető hipersíkhalmazra a mérték mozgásinvarianciáját felírva

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}} f(p, \mathbf{n}) dpd\mathbf{n} &= m(\mathcal{H}) = m(\mu(\mathcal{H})) = \int_{\mu(\mathcal{H})} f(p', \mathbf{n}') dp'd\mathbf{n}' \\ &= \int_{\mathcal{H}} f(p + \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle, \mathbf{A}\mathbf{n}) dpd\mathbf{n} \end{aligned}$$

adódik. Ez pontosan akkor teljesül minden $\mathcal{H}$ hipersíkhalmazra, ha tetszőleges μ mozgásra $f(p + \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle, \mathbf{A}\mathbf{n}) = f(p, \mathbf{n})$, ami csak úgy lehetséges, hogy $f(p, \mathbf{n})$ konstans függvény. $\square$

A síkban egy $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ pontpárhoz tartozó sűrűség $d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 = dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$. Az $\mathbb{S}^1$ és a $[0, 2\pi)$ intervallum közti természetes megfeleltetés okán azonosítsunk egy $H(p, \mathbf{n})$ hipersíkot a $G(p, \varphi)$ egyenessel, ahol tehát φ az $\mathbf{n}$ normális egységvektor x -tengellyel bezárt szöge, vagyis $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$.

1.8. Tétel *Tekintsük a $\mathbf{p}_1$ és $\mathbf{p}_2$ pont által meghatározott $G(p, \varphi)$ egyenest és jelölje t_i a $\mathbf{p}_i$ pont ezen egyenes talppontjától mért távolságát ($i = 1, 2$). Ekkor*

$$d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 = |t_2 - t_1| dG dt_1 dt_2.$$

Bizonyítás. Fejezzük ki az (x_i, y_i) koordinátát p és φ segítségével. Ekkor

$$x_i = p \cos \varphi - t_i \sin \varphi \quad \text{és} \quad y_i = p \sin \varphi + t_i \cos \varphi \quad i \in \{1, 2\}.$$

Ezek külsőderiváltja

$$\begin{aligned} dx_i &= \cos \varphi dp - (p \sin \varphi + t_i \cos \varphi) d\varphi - \sin \varphi dt_i, \\ dy_i &= \sin \varphi dp + (p \cos \varphi - t_i \sin \varphi) d\varphi + \cos \varphi dt_i, \end{aligned}$$

melyek külsőszorzata

$$d\mathbf{p}_i = dx_i \wedge dy_i = p dp \wedge d\varphi + dp \wedge dt_i - t_i d\varphi \wedge dt_i.$$

A $d\mathbf{p}_1 \wedge d\mathbf{p}_2$ külsőszorzat kiszámításánál vegyük észre, hogy az iménti kifejezésben csak az utolsó két-két tag szorzata nem nulla, tehát

$$d\mathbf{p}_1 \wedge d\mathbf{p}_2 = (t_2 - t_1) dp \wedge d\varphi \wedge dt_1 \wedge dt_2. \quad \square$$

1.9. Tétel *Legyen $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ egy differenciálható görbe ívhossz szerinti paraméterezése. Legyen $\mathbf{r}(s)$ egy olyan pont, ahol a $G(p, \varphi)$ egyenes metszi a görbét. Jelölje θ az ezen ponthoz tartozó érintő és a G által bezárt szöget. Ekkor*

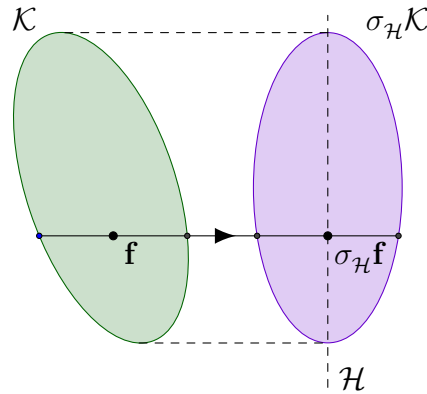
$$dG = |\sin \theta| ds d\theta.$$

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy ha τ jelöli az érintő és az x -tengely által bezárt szöget, akkor $\varphi = \theta + \tau - \frac{\pi}{2}$.

Az egyenes egyenletéből kiszámolható a $dp = \cos \varphi dx + \sin \varphi dy + (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)d\varphi$ külsőderivált. A ds infinitézimális ív komponensei $dx = \cos \tau ds$, és $dy = \sin \tau ds$, ahonnan addíciós képlet használatával $dp = \cos(\varphi - \tau)ds + (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)d\varphi$ adódik. Ezt külsősorozva $d\varphi$ -vel könnyen kapjuk a $dG = \cos(\varphi - \tau)dsd\varphi$ összefüggést, mely fentebbi megfigyelésünk alapján a bizonyítandó $dG = |\sin \theta|dsd\theta$ képletet adja. $\square$

1.2. A Steiner-féle szimmetrizálási eljárás

Legyen $\mathcal{K}$ egy konvex test $\mathbb{R}^n$ -ben, és rögzítsünk egy $\mathcal{H}$ hipersíkot. Az 1.1. ábrán látható módon, a $\mathcal{K}$ test minden $\mathcal{H}$ -ra merőleges húrját toljuk el úgy, hogy a húr középpontja a $\mathcal{H}$ hipersíkra essen.



1.1. ábra

Az így kapott testet $\sigma_{\mathcal{H}}\mathcal{K}$ jelöli. (Amennyiben a kontextusból egyértelmű, az alsó indexet nem jelöljük.)

1.10. Lemma Legyen $\mathcal{K}$ konvex test $\mathbb{R}^2$ -ben, ℓ pedig egy tetszőleges egyenes. Ekkor

1. $|\sigma_{\ell}\mathcal{K}| = |\mathcal{K}|$, és $|\partial(\sigma_{\ell}\mathcal{K})| \leq |\partial\mathcal{K}|$.
2. $\sigma_{\ell}\mathcal{K}$ -nak szimmetriatengelye ℓ .
3. $\sigma_{\ell}\mathcal{K}$ konvex.
4. Ha $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ akkor $\sigma_{\ell}\mathcal{K} \subseteq \sigma_{\ell}\mathcal{L}$.

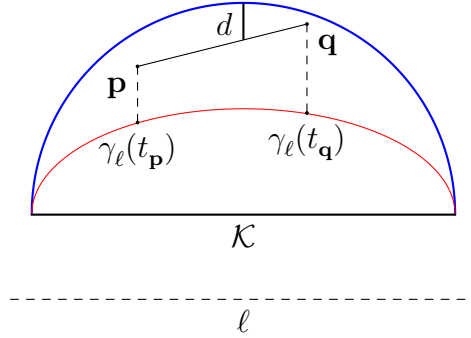
Bizonyítás. 1. Mivel az ℓ -re merőleges húrok hosszait integrálva $|\mathcal{K}|$ adódik, és az eljárás az ilyen húrok hosszát nem változtatja, az állítás első része nyilvánvaló.

A kerületekre vonatkozó összefüggés bizonyításához vegyünk $n - 1$ darab egymástól azonos távolságra lévő, ℓ -re merőleges húrú úgy, hogy azok n részre osszák $\mathcal{K}$ -t. Ezen húrok $\partial\mathcal{K}$ -val vett metszéspontjai meghatároznak n darab trapézt. Elemi, hogy egy trapéz kerülete pontosan akkor minimális, ha párhuzamos oldalainak szakaszfelezői egybeesnek. Ugyanakkor az ℓ -re merőleges húrok hossza változatlan a szimmetrizálás során. Az $n \rightarrow \infty$ határátmenet során a trapézok uniója Hausdorff-távolságban $\mathcal{K}$ -hoz tart, a terület folytonossága miatt pedig a trapézok ℓ -re nem merőleges oldalai hosszának összege $|\mathcal{K}|$ -hoz tart.

2. A konstrukcióból adódóan minden ℓ -re merőleges húr szimmetrikus ℓ -re, így maga $\mathcal{K}$ is az.

3. Tekintsük azt a (nyilván folytonos) görbét, mely a $\mathcal{K}$ test ℓ -re merőleges húrjai középpontjaiból áll, és legyen $\gamma_{\ell}(t)$ ennek egy paraméterezése. Vegyünk olyan $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{K}$ pontokat, melyekre a $\text{relint}(\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}})$ nyílt szakasz nem metszi γ_{ℓ} -et. Jelölje $t_{\mathbf{p}}$ és $t_{\mathbf{q}}$ rendre azon paramétereket, melyekre a $\gamma_{\ell}(t_{\mathbf{p}})$ ponton átmenő húron fekszik $\mathbf{p}$ illetve a $\gamma_{\ell}(t_{\mathbf{q}})$ ponton átmenő húron fekszik $\mathbf{q}$. Ezen két paraméter közötti t értékekre

bevezetjük az $\mathbf{s}(t)$ vektort, mely $\gamma_\ell(t)$ -ből az ezen átmenő ℓ -re merőleges húnak a $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ szakasszal vett metszetébe mutat. Legyen továbbá $\mathbf{r}(t)$ az a vektor, melynek talppontja $\gamma_\ell(t)$ és azonos állású $\mathbf{s}(t)$ -vel, de végpontja $\partial\mathcal{K}$ -n fekszik. Végül jelölje $d(t)$ ezek előjeles távolságát (amely tehát pontosan akkor pozitív, ha valamely $\lambda > 1$ esetén $\lambda\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(t)$). Ekkor $\mathcal{K}$ konvexitása miatt nyilván $d(t) \geq 0$. Ugyanakkor a $\sigma\mathcal{K}$ testhez analóg módon rendelhető $d^\sigma(t)$ függvény megegyezik $d(t)$ -vel, tehát $d^\sigma(t) \geq 0$, ami azt jelenti, hogy a szimmetrizációval kapott $\overline{\sigma\mathbf{p}\sigma\mathbf{q}}$ szakasz $\sigma\mathcal{K}$ -ban van. Végül figyeljük meg, hogy ha $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ olyanok, hogy az őket összekötő szakaszt belső pontban metszi γ_ℓ , akkor ezt a szakaszt a metszésponttal két részre oszthatjuk, melyekre külön-külön érvényesek a fentebb leírtak.



4. Legyen $s_\mathcal{L}$ az $\mathcal{L}$ egy ℓ egyenesre merőleges húrja. Legyen $s_\mathcal{K} := s_\mathcal{L} \cap \mathcal{K}$. A tartalmazás miatt nyilván $s_\mathcal{K} \subseteq s_\mathcal{L}$. Ezen tartalmazás a szimmetrizálás során megőrződik, hiszen az eltolással nyert $\sigma s_\mathcal{K}$ és $\sigma s_\mathcal{L}$ szakaszok középpontjai ℓ -re esnek. Mivel $s_\mathcal{L}$ tetszőleges volt, így adódik, hogy $\sigma\mathcal{K} \subseteq \sigma\mathcal{L}$. $\square$

Ha ℓ_1 és ℓ_2 két különböző egyenes, akkor élünk a következő rekurzív definícióval: $\mathcal{K}_{\ell_1, \ell_2}^0 := \mathcal{K}$, pozitív n esetén, ha n páratlan, akkor $\mathcal{K}_{\ell_1, \ell_2}^n := \sigma_{\ell_1} \mathcal{K}_{\ell_1, \ell_2}^{n-1}$, ha n páros, akkor pedig $\mathcal{K}_{\ell_1, \ell_2}^n := \sigma_{\ell_2} \mathcal{K}_{\ell_1, \ell_2}^{n-1}$.

1.11. Tétel *Legyen $\mathcal{K}$ egy konvex test a síkon, ℓ_1 és ℓ_2 pedig egyenesek. Ha az egyenesek α bezárt szöge π -vel osztva irracionális szám, akkor a $(\mathcal{K}, \mathcal{K}_{\ell_1, \ell_2}^1, \mathcal{K}_{\ell_1, \ell_2}^2, \dots)$ sorozat egy olyan körhöz konvergál, melynek középpontja $\ell_1 \cap \ell_2$, sugara pedig $\sqrt{|\mathcal{K}|/\pi}$.*

Bizonyítás. Egyfelől a konvergencia [19, 5.1. Tétel] alapján világos. Másfelől a [19, 5.1. Tétel] azt is állítja, hogy a $\mathcal{K}_{\ell_1, \ell_2}^\infty$ határhalmaz mind ℓ_1 -re, mind pedig ℓ_2 -re szimmetrikus. Klasszikus, hogy α irracionális miatt, ha φ jelöli az $\mathbf{a} := \ell_1 \cap \ell_2$ körüli 2α szöggel való forgatást, akkor $\{\varphi^k(\mathbf{p}) : k \in \mathbb{N}_0\}$ sűrű részhalmaza az $\mathbf{a}$ középpontú, $\mathbf{p}$ -n átmenő körvonalnak. Eszerint a $\mathcal{K}_{\ell_1, \ell_2}^\infty$ halmaz egy $\mathbf{a}$ középpontú körlap. A sugárra vonatkozó kifejezés a szimmetrizáció területtartásából azonnal adódik. $\square$

Az α -ra tett irracionálitási feltétel nélkül előfordulhat, hogy a szimmetrizálási eljárás egy bizonyos lépésszám után már invariánsan hagyja a testet. Például ha $\ell_1 \perp \ell_2$, és $\mathcal{K}$ egy ℓ_1 és ℓ_2 tengelyekre szimmetrikus ellipszis, akkor $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\ell_1, \ell_2}^\infty$.

1.3. A Hausdorff-féle momentumprobléma

Legyen adott egy $(m_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ sorozat. A $[0, 1]$ szakasz olyan μ Borel-mértékét keressük, melynek momentumaira

$$m_i = \int_{\mathbb{R}} t^i d\mu(t), \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Ez a *Hausdorff-féle momentumprobléma*. [26]

Tekintsük most az $\mathbb{R}$ feletti $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ polinomok ($n \in \mathbb{N}_0$) lineáris tervét, és definiáljuk rajta, az $(m_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ sorozathoz az $m(P) := \sum_{i=0}^n m_i a_i$ -t rendelő funkcionált. (Speciálisan $m(t^i) = m_i$.)

1.12. Tétel [26, 8. o., (1.20)] *Az $(m_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ sorozat által meghatározott Hausdorff-féle momentumprobléma pontosan akkor oldható meg, ha minden $0 \leq P \in \mathbb{R}[t]$ esetén $m(P) \geq 0$.*

Egy $[0,1]$ -en értelmezett korlátos $f(t)$ függvény n -edfokú Bernstein polinomján a

$$B_n^f(t) := \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

kifejezést értjük.

1.13. Lemma *Legyen $P_k(t)$ egy rögzített k -adfokú polinom. Ekkor*

$$B_n^{P_k}(t) = P_k(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p_{ik}(t)}{n^i},$$

ahol a $p_{ik}(t)$ polinomok függetlenek n -től. (Igaz továbbá, hogy ha $P_k(t) \equiv \text{const.}$, akkor $p_{ik}(t) \equiv 0$.)

1.14. Tétel *Az 1.12. Tétel feltétele ekvivalens azzal, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$ és $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén $m(t^i(1-t)^{n-i}) \geq 0$.*

Bizonyítás. Az egyik irány triviális, mivel nyilván $t^i(1-t)^{n-i} \geq 0$, és így az 1.12. tétel alapján $m(t^i(1-t)^{n-i}) \geq 0$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $m(t^i(1-t)^{n-i}) \geq 0$ teljesül. Legyen P_k nemnegatív, k -adfokú polinom $(0,1)$ -en. Ennek Bernstein polinomjára az 1.13. Lemma szerint

$$B_n^{P_k}(t) = P_k(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p_{ik}(t)}{n^i},$$

áll fenn, ahonnan

$$m(B_n^{P_k}) = m(P_k) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{m(p_{ik})}{n^i} = m(P_k) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ugyanakkor a $B_n^{P_k}$ polinom $t^i(1-t)^{n-i}$ alakú tagok pozitív együtthatós lineáris kombinációja, tehát $m(B_n^{P_k}) \geq 0$. Ebből az $n \rightarrow \infty$ határátmenet adja a bizonyítandó $m(P_k) \geq 0$ összefüggést. $\square$

Ezt követően bevezetjük a

$$\begin{aligned} \Delta^0 m_i &:= m_i, \\ \Delta^1 m_i &:= m_i - m_{i+1}, \\ &\vdots \\ \Delta^k m_i &:= m_i - \binom{k}{1} m_{i+1} + \binom{k}{2} m_{i+2} - \dots + (-1)^k m_{i+k} \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} m_{i+j} = m(t^i(1-t)^k) \end{aligned}$$

differenciákat, melyeken keresztül megfogalmazhatjuk a kívánt ekvivalenciatételt.

1.15. Tétel *A Hausdorff-féle momentum problémának pontosan akkor létezik megoldása, ha minden $k, i \in \mathbb{N}_0$ számok esetén $\Delta^k m_i \geq 0$.*

Ha a Hausdorff-féle momentum problémának létezik megoldása, akkor az a Stone–Weierstrass-féle approximációs tétel miatt egyértelmű, ugyanis minden $[a, b] \subseteq [0, 1]$ intervallum $\chi_{[a, b]}$ indikátorfüggvénye tetszőlegesen egyenletesen közelíthető polinomokkal.

2. FEJEZET

A kovariogram

2.1. Definíció Legyen $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ konvex test $\mathbb{R}^n$ -ben. A

$$g_{\mathcal{K},\mathcal{L}}(\mathbf{v}) := \lambda_n(\mathcal{K} \cap (\mathcal{L} + \mathbf{v}))$$

függvényt a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ testek kovariogramjának nevezzük, ahol $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, λ_n pedig az n -dimenziós Lebesgue-mértéket jelöli. A $g_{\mathcal{K}}(\mathbf{v}) := g_{\mathcal{K},\mathcal{K}}(\mathbf{v})$ függvényt a $\mathcal{K}$ test kovariogramjának hívjuk.

A definíció közvetlen következménye, hogy

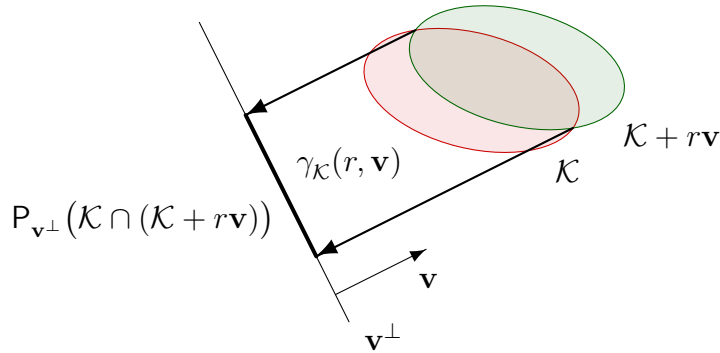
$$g_{\mathcal{K},\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y} + \mathbf{x}) \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = g_{\mathcal{L},\mathcal{K}}(-\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

valamint, hogy $g_{\mathcal{L},\mathcal{K}}(\mathbf{v}) = g_{\mathcal{K},\mathcal{L}}(-\mathbf{v})$, tehát $g_{\mathcal{K}}$ páros függvény.

A kovariogram alapvető tulajdonságait összefoglaló tétel kimondása előtt bevezetünk egy gyakran használt függvényt. Rögzített $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén jelölje $\mathbf{v}^\perp$ az $\mathbf{v}$ -ra merőleges lineáris alteret, és legyen

$$\gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v}) := \lambda_{n-1}(\mathbf{P}_{\mathbf{v}^\perp}(\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + r\mathbf{v}))),$$

ahol $\mathbf{P}_{\mathbf{v}^\perp}$ jelöli az $\mathbf{v}^\perp$ altérre való ortogonális projekciót.



2.2. Tétel Legyen $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ konvex test $\mathbb{R}^n$ -ben, $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ pedig egy rögzített egységvektor. Ekkor

1. $g_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \chi_{\mathcal{K}} * \chi_{-\mathcal{L}}$.
2. $\mathcal{K} \mapsto g_{\mathcal{K}}$ folytonos a Hausdorff-távolságra és a sup-normára nézve.
3. Az $r \mapsto g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v})$ leképezés monoton csökkenő és konvex.
4. $\int_{\mathbb{R}^n} g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\mathcal{K}|^2$.
5. $\text{supp}(g_{\mathcal{K}}) = D(\mathcal{K})$.
6. A $\varphi: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b} + \mathbf{x}\mathbf{A}$ affinitásra, aminek $\mathbf{A}$ a mátrixa,

$$g_{\varphi(\mathcal{K})}(\mathbf{x}) = |\det(\mathbf{A})| g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}\mathbf{A}^{-1}). \quad (2.2)$$

Bizonyítás. 1. A konvolúció definíciója alapján

$$(\chi_{\mathcal{K}} * \chi_{-\mathcal{L}})(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) \chi_{-\mathcal{L}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} = g_{\mathcal{K},\mathcal{L}}(\mathbf{x}).$$

2. A kovariogramok távolsága

$$\begin{aligned}
|g_{\mathcal{K}} - g_{\mathcal{L}}| &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) - g_{\mathcal{L}}(\mathbf{x})| \\
&= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y}) \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \right| \\
&= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) - \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y})) \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y}) (\chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) d\mathbf{y} \right| \\
&\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) - \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y})) \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \right| + \right. \\
&\quad \left. + \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y}) (\chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) d\mathbf{y} \right| \right) \\
&\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) - \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y})| d\mathbf{y} + \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} \right) \\
&= 2|\mathcal{K} \triangle \mathcal{L}|,
\end{aligned}$$

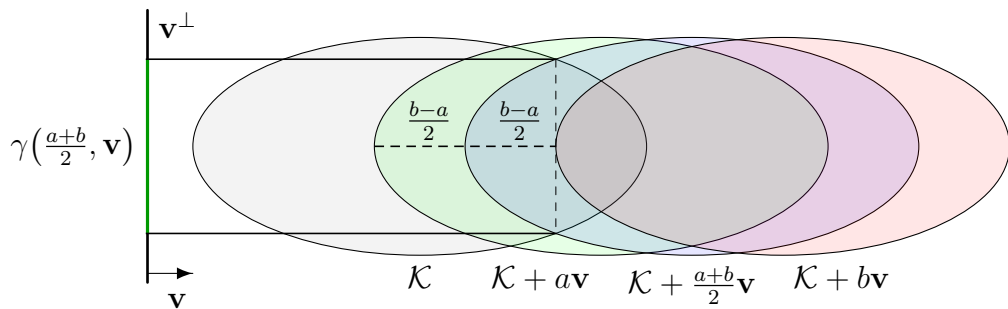
ami az 1.4 tétel szerint nullához tart, ha $d_H(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \rightarrow 0$.

3. A $\mathcal{K}$ konvexitása miatt tetszőleges $r \leq s$ nemnegatív számokra $\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + r\mathbf{v}) \supseteq \mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + s\mathbf{v})$, ami a Lebesgue-mérték monotonitása miatt igazolja, hogy a kovariogram monoton csökkenő.

A $g_{\mathcal{K}}$ konvexitásához elég belátni, hogy

$$g_{\mathcal{K}}(a\mathbf{v}) - g_{\mathcal{K}}\left(\frac{a+b}{2}\mathbf{v}\right) \geq g_{\mathcal{K}}\left(\frac{a+b}{2}\mathbf{v}\right) - g_{\mathcal{K}}(b\mathbf{v}).$$

Az egyenlőtlenség bal oldala éppen $(\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + a\mathbf{v})) \setminus (\mathcal{K} + \frac{a+b}{2}\mathbf{v})$ térfogata, mely $\mathcal{K}$ konvexitása miatt legalább $\frac{b-a}{2} \gamma\left(\frac{a+b}{2}, \mathbf{v}\right)$. Ugyanakkor az egyenlőtlenség jobb oldalán lévő kifejezés pedig $(\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + \frac{a+b}{2}\mathbf{v})) \setminus (\mathcal{K} + b\mathbf{v})$ térfogata, ami legfeljebb $\frac{b-a}{2} \gamma\left(\frac{a+b}{2}, \mathbf{v}\right)$. Meggondolásunkat a 2.1. ábra szemlélteti.

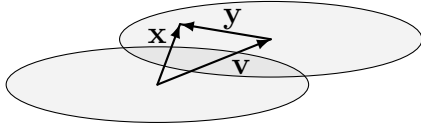


2.1. ábra

4. Valóban,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = |\mathcal{K}|^2.
\end{aligned}$$

5.



Világos, hogy $\lambda_n(\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + \mathbf{v}))$ pontosan akkor nulla, ha $\mathbf{v}$ nincs a $D(\mathcal{K})$ különbség-halmazban.

6. Valóban,

$$\begin{aligned}
 g_{\varphi(\mathcal{K})}(\mathbf{x}) &= \lambda_n(\varphi(\mathcal{K}) \cap (\varphi(\mathcal{K}) + \mathbf{x})) \\
 &= \lambda_n(\{\mathbf{b} + \mathbf{kA} : \mathbf{k} \in \mathcal{K}\} \cap \{\mathbf{b} + \mathbf{kA} + \mathbf{x} : \mathbf{k} \in \mathcal{K}\}) \\
 &= \lambda_n(\{\mathbf{kA} : \mathbf{k} \in \mathcal{K}\} \cap \{\mathbf{kA} + \mathbf{x} : \mathbf{k} \in \mathcal{K}\}) \\
 &= \lambda_n(\{\mathbf{y} : \exists \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_+ \in \mathcal{K}, \text{ hogy } \mathbf{y} = \mathbf{k}_0\mathbf{A} = \mathbf{k}_+\mathbf{A} + \mathbf{x}\}) \\
 &= \lambda_n(\{\mathbf{kA} : \mathbf{k} \in \mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + \mathbf{x}\mathbf{A}^{-1})\}) \\
 &= \lambda_n((\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + \mathbf{x}\mathbf{A}^{-1}))\mathbf{A}) = |\det(\mathbf{A})|g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}\mathbf{A}^{-1}),
 \end{aligned}$$

hiszen a φ affinitás Jacobi-determinánsa éppen $|\det \mathbf{A}|$. $\square$

A $\gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$ leképezés r -ben nyilván folytonos [22, 69. o.], de ennél több is igaz.

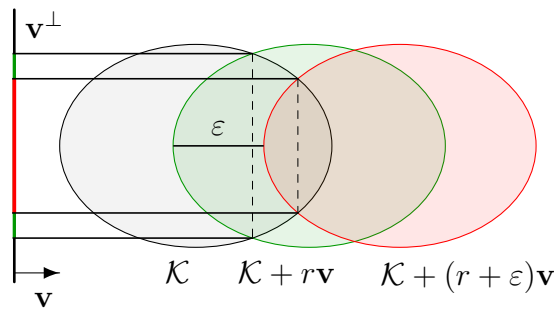
2.3. Tétel Legyen $\mathcal{K}$ konvex test, $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ egy rögzített egységvektor, és $d := \max\{r : g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v}) \neq 0\}$.

1. Az $r \mapsto \gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$ leképezés folytonos $(0, d)$ -n, és jobbról folytonos 0 -ban.
2. Az $r \mapsto g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v})$ leképezés folytonosan differenciálható a $(0, d)$ intervallumon, és ott a deriváltja $-\gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$. Az $r = 0$ pontban a jobb oldali derivált $-\gamma_{\mathcal{K}}(0, \mathbf{v})$.

Bizonyítás. 1. Vegyünk egy $r_n \nearrow r$ sorozatot. Ekkor $\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + r_n\mathbf{v}) \searrow \mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + r\mathbf{v})$, és $P_{\mathbf{v}^\perp}(\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + r_n\mathbf{v})) \searrow P_{\mathbf{v}^\perp}(\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + r\mathbf{v}))$, ahonnan $\gamma_{\mathcal{K}}(r_n, \mathbf{v}) \searrow \gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$, vagyis $\gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$ folytonos balról.

Ha $r \in (0, d)$, akkor a $\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + r\mathbf{v})$ halmaz belsejének $\mathbf{v}^\perp$ síkra vett vetülete megegyezik $P_{\mathbf{v}^\perp}(\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} + r\mathbf{v}))$ belsejével, ezért $\gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$ alulról folytonos, amiből következik a jobbról folytonosság.

2. Rögzítsük az $r \in \mathbb{R}_+$ és $0 < \varepsilon < r$ számokat. Ekkor bármely $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenessel metszve a $\mathcal{K} \cap ((\mathcal{K} + r\mathbf{v}) \setminus (\mathcal{K} + (r + \varepsilon)\mathbf{v}))$ halmazt, a kapott húr hossza legfeljebb ε . Ugyanakkor ezen halmaz $\mathbf{v}^\perp$ hipersíkra vett vetülete legalább $\gamma_{\mathcal{K}}(r + \varepsilon, \mathbf{v})$, és legfeljebb $\gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$, ahogy a 2.2. ábra mutatja.



2.2. ábra

Ezek alapján tehát

$$\varepsilon \gamma_{\mathcal{K}}(r - \varepsilon, \mathbf{v}) \geq g_{\mathcal{K}}((r - \varepsilon)\mathbf{v}) - g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v}) \geq \varepsilon \gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v}),$$

és hasonlóan

$$\varepsilon \gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v}) \geq g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v}) - g_{\mathcal{K}}((r + \varepsilon)\mathbf{v}) \geq \varepsilon \gamma_{\mathcal{K}}(r + \varepsilon, \mathbf{v}),$$

ahonnan $\gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$ folytonosságból következik, hogy $g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v})$ differenciálható, és a $\mathbf{v}$ iránymenti deriváltja $-\gamma_{\mathcal{K}}(r, \mathbf{v})$ minden $r \in (0, d)$ esetén. Az $r = 0$ pontban való jobboldali differenciálhatóság ugyanígy bizonyítható. $\square$

2.4. Tétel *Tetszőleges konvex test kovariogramja Lipschitz-folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}$ konvex test, $g_{\mathcal{K}}$ a kovariogramja, valamint $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor (2.1) szerint

$$\begin{aligned} |g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) - g_{\mathcal{K}}(\mathbf{y})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{z}) (\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{z} - \mathbf{x}) - \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{z} - \mathbf{y})) d\mathbf{z} \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{z} - \mathbf{x}) - \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{z} - \mathbf{y})| d\mathbf{z}, \end{aligned}$$

ahol az abszolút értékben lévő kifejezés értéke -1 , 0 vagy 1 lehet. Ezért

$$\begin{aligned} |g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) - g_{\mathcal{K}}(\mathbf{y})| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{z} - \mathbf{x}) - \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{z} - \mathbf{y}))^2 d\mathbf{z} \\ &= 2g_{\mathcal{K}}(\mathbf{0}) - 2 \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{z} - \mathbf{y}) d\mathbf{z} = 2(g_{\mathcal{K}}(\mathbf{0}) - g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Legyen $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^n$ rögzített. A 2.2. Tétel 3. pontja szerint $g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v})$ r -ben konvex, vagyis

$$g_{\mathcal{K}}(r\mathbf{v}) - g_{\mathcal{K}}(\mathbf{0}) \geq r \partial_{\mathbf{v}} g_{\mathcal{K}}(\mathbf{0}) = -r \gamma_{\mathcal{K}}(0, \mathbf{v}).$$

Legyen $\Gamma := \sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}} \gamma_{\mathcal{K}}(0, \mathbf{v})$. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) - g_{\mathcal{K}}(\mathbf{0}) \geq -\Gamma|\mathbf{x}|$, melyet a (2.3) képletbe helyettesítve

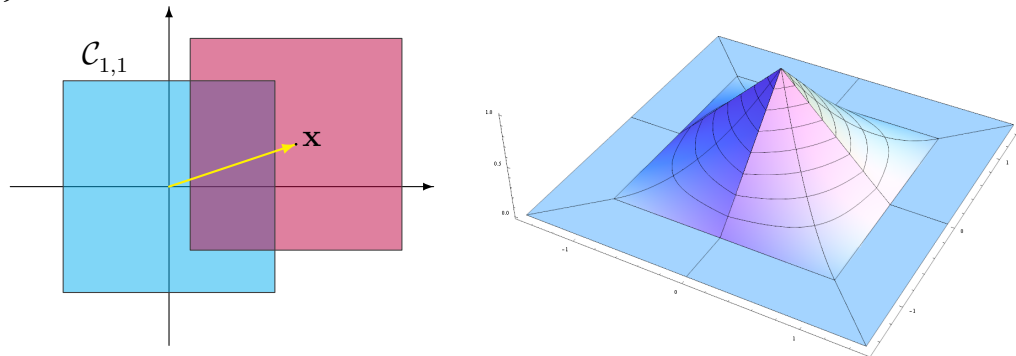
$$|g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) - g_{\mathcal{K}}(\mathbf{y})| \leq 2\Gamma|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

adódik, mely bizonyítja állításunkat. $\square$

Vegyük észre, hogy Γ a $\mathcal{K}$ legnagyobb térfogatú vetületének térfogata.

Néhány elemi siktartomány kovariogramját könnyű kiszámolni.

Téglatest kovariogramja. Tekintsük a $\mathcal{C}_{a_1, \dots, a_n} := \text{conv}\{(\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_n a_n) : \forall i \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$ n -dimenziós téglatestet.

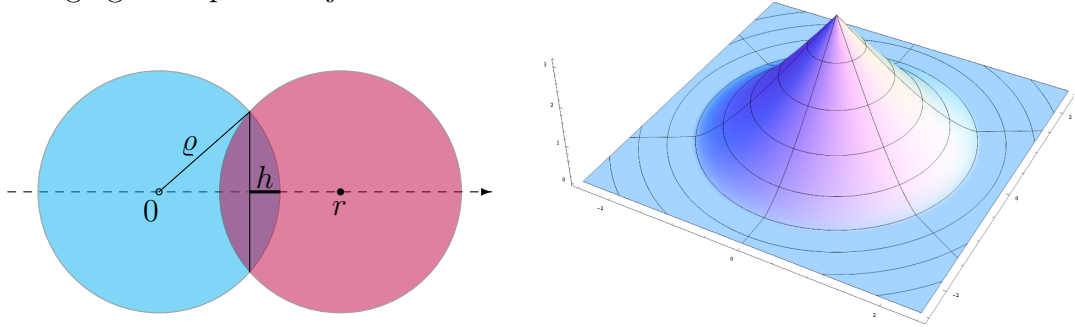


2.3. ábra. Négyzet kovariogramja.

Ezt egy olyan $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ vektorral eltolva, melynek komponenseire $|x_i| < a_i$ teljesül ($1 \leq i \leq n$), a metszet egy olyan téglatest lesz, melynek i . oldalhossza $a_i - |x_i|$. A kovariogram tehát

$$g_{\mathcal{C}_{a_1, \dots, a_n}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n (a_i - |x_i|), & \text{ha minden } 1 \leq i \leq n \text{ esetén } |x_i| < a_i, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \quad \triangle$$

Gömb kovariogramja. Legyen $\mathcal{K} = \varrho\mathbb{B}^n$ a ϱ -sugarú n -dimenziós gömb. Ennek forgásszimmetriája miatt a kovariogram radiális függvény, vagyis előáll $g_{\mathcal{K}}(\mathbf{v}) = \bar{g}_{\mathcal{K}}(r)$ alakban, ahol $r = |\mathbf{v}|$ és $\bar{g}_{\mathcal{K}}$ egy valós függvény. $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K} + \mathbf{v}$ metszete két egybevágó gömbsapka uniója.



2.4. ábra. Körlap kovariogramja.

A 2.4. ábra alapján egy ilyen sapka h magasságára $h = \varrho - \frac{r}{2}$ áll fenn, melyet a gömbsapka térfogatára vonatkozó [30] formulába helyettesítve

$$\bar{g}_{\mathcal{K}}(r) = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \int_0^{\arccos \frac{r}{2\varrho}} \sin^n t \, dt \quad (2.4)$$

adódik. Ez alapján a sík ($n = 2$) egységgörlapjának ($\varrho = 1$) kovariogramja

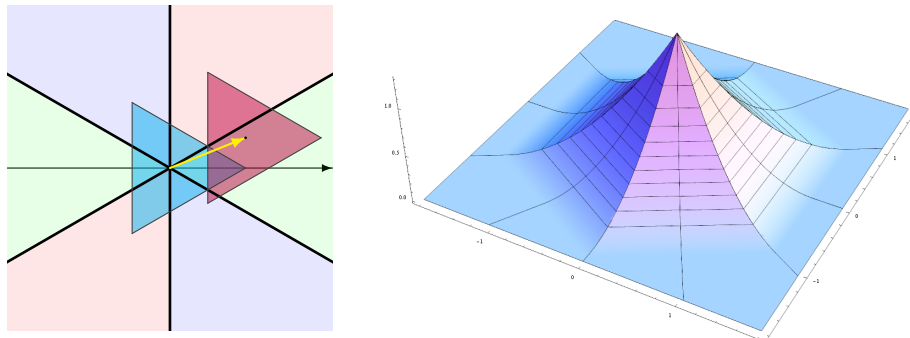
$$g_{\mathbb{B}^2}(\mathbf{x}) = 4 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\arccos \frac{|\mathbf{x}|}{2}} = 2 \arccos \frac{|\mathbf{x}|}{2} - |\mathbf{x}| \sqrt{1 - \left(\frac{|\mathbf{x}|}{2} \right)^2},$$

melynek grafikonja a 2.4. ábrán látható felület. △

Ellipszoid kovariogramja. Ahhoz, hogy eredményünket általánosítsuk ellipszoidokra, írjuk fel azt a mátrixot, melyhez tartozó affinitás a gömböt a kívánt ellipszoidba transzformálja. Ha a_i az i . féltengely hossza, akkor az $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ mátrixra a (2.2) formulát alkalmazva az $\mathcal{E}_{a_1, \dots, a_n}$ ellipszoid kovariogramja

$$g_{\mathcal{E}_{a_1, \dots, a_n}}(\mathbf{x}) = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) g_{B_1^n} \left(\left(\frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n}{a_n} \right) \right). \quad \triangle$$

Szabályos háromszög kovariogramja. Legyen $\mathcal{K}$ az az egységgörbe írható szabályos háromszög, melynek csúcsa az $(1,0)$ pont. A 2.5. ábrán látható szimmetria miatt elegendő azon $\mathbf{x}$ vektorokra kiszámolnunk $g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})$ -et, melyek x -tengellyel bezárt φ szöge $-\pi/6$ és $\pi/6$ közé esik, majd ezt követően periodikusan kiterjeszteniünk a többi $\pi/3$ nagyságú szögtartományra. Nyilván $\mathcal{K}$ és egy eltoltjának metszete (nem-elfajuló esetben) egy szabályos háromszög.



2.5. ábra. Szabályos háromszög kovariogramja.

Jelölje $a(\mathbf{x})$ a metszetháromszög alapját, $m(\mathbf{x})$ pedig annak magasságát. Ekkor egyrészt $a := a(\mathbf{0}) = \sqrt{3}$, és $m := m(\mathbf{0}) = 3/2$, másrészt az $x_1 < m$ esetben $a(\mathbf{x}) = a \frac{m-x_1}{m}$ és $m(\mathbf{x}) = m - x_1$, míg ha $x_1 \geq m$, akkor $a(\mathbf{x}) = m(\mathbf{x}) = 0$. Innen azonnal adódik, hogy $g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \frac{a}{2m}(m-x_1)^2$, mely alapján a fentebb említett kiterjesztés után a kovariogram polárkoordinátás függvénye

$$g_{\mathcal{K}}(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r \cos\left(\overline{\varphi + \frac{\pi}{6}} - \frac{\pi}{6}\right) > m, \\ \frac{a}{2m} \left(m - r \cos\left(\overline{\varphi + \frac{\pi}{6}} - \frac{\pi}{6}\right)\right)^2, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $\overline{}$ azt a függvényt jelöli, mely argumentumának $\pi/3$ -al vett osztási maradékát adja eredményül. $\triangle$

2.1. A kovariogram-probléma

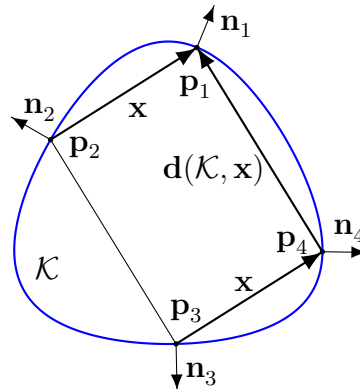
Matheron vetette fel a kérdést, hogy egy konvex testet vajon egyértelműen meghatároz-e a kovariogramja eltolások és az origóra vonatkozó centrális tükrözés erejéig? Ez az úgynevezett *kovariogram probléma*.

2.5. Tétel [3] *Bármely centrálisan szimmetrikus konvex testet eltolás erejéig meghatároz a kovariogramja.*

Bizonyítás. Ha $g_{\mathcal{K}} = g_{\mathcal{L}}$, akkor $D(\mathcal{K}) = D(\mathcal{L})$, melyből az 1.2 Definíció utáni megjegyzésünkből következik, hogy $\mathcal{K} = \mathcal{L}$. $\square$

1986-ban Matheron a síkbeli kovariogram problémára pozitív választ sejtett, de ennek bizonyítása csak később, több lépcsőben történt meg. Ebben a legkiemelkedőbb szerepet Gabriele Bianchi játszotta, akinek munkássága alapján ismertetjük ezen szép tétel bizonyítását [3, 1].

Legyen $\mathcal{K}$ egy szigorúan konvex, C^1 -reguláris test $\mathbb{R}^2$ -ben, jelölje $g_{\mathcal{K}}$ a kovariogramját, továbbá legyen $\mathbf{x} \in \text{int}(\text{supp}(g_{\mathcal{K}})) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Ekkor a szigorú konvexitás miatt egyértelműen léteznek olyan, az óramutató járásával ellentétesen felsorolt $\mathbf{p}_i(\mathcal{K}, \mathbf{x})$ pontok $\partial\mathcal{K}$ -n ($1 \leq i \leq 4$), hogy $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1(\mathcal{K}, \mathbf{x}) - \mathbf{p}_2(\mathcal{K}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}_4(\mathcal{K}, \mathbf{x}) - \mathbf{p}_3(\mathcal{K}, \mathbf{x})$. (2.6. ábra.) Ekkor $P(\mathcal{K}, \mathbf{x}) := \text{conv}\{\mathbf{p}_i : 1 \leq i \leq 4\}$ egy $\mathcal{K}$ -ba írt paralelogramma, melynek élei $\mathbf{0}\mathbf{x}$ és $\mathbf{0}\mathbf{d}(\mathcal{K}, \mathbf{x})$ eltoltsai, ahol $\mathbf{d}(\mathcal{K}, \mathbf{x}) := \mathbf{p}_1(\mathcal{K}, \mathbf{x}) - \mathbf{p}_4(\mathcal{K}, \mathbf{x})$. Bevezetjük továbbá az $\mathbf{n}_i(\mathcal{K}, \mathbf{x})$ jelölést a $\mathcal{K}$ test $\mathbf{p}_i(\mathcal{K}, \mathbf{x})$ -beli egységnyi külső normálisára. Ha a szóban forgó $\mathcal{K}$ test a szöveggörnyezetből világos, akkor az iménti jelölésekből ezt az argumentumot elhagyjuk.



2.6. ábra

Oszlopvektorokat használva a $\pi/2$ szögű, pozitív irányú $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{v}$ forgatás mátrixa $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.6. Tétel *Legyen $\mathcal{K}$ egy szigorúan konvex, C^1 -reguláris test $\mathbb{R}^2$ -ben, jelölje $g_{\mathcal{K}}$ a kovariogramját, továbbá legyen $\mathbf{x} \in \text{int}(\text{supp}(g_{\mathcal{K}})) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Ekkor*

1. A g_K függvény folytonosan differenciálható $\mathbf{x}$ -ben, valamint

$$g'_K(\mathbf{x}) = \mathbf{Ld}(\mathbf{x}). \quad (2.5)$$

2. Minden $1 \leq i \leq 4$ indexre a P , $\mathbf{d}$, $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{n}_i$ függvények folytonosak $\mathbf{x}$ -ben.
 3. Bármely szigorúan konvex, C^1 -reguláris $\mathcal{L}$ test esetén, ha $g_K = g_{\mathcal{L}}$, akkor $P(\mathcal{L}, \mathbf{x})$ a $P(K, \mathbf{x})$ egy eltoltja.

Bizonyítás. 1. Az állítás első felét már bizonyítottuk, a (2.5) formula bizonyítását pedig lásd [23, 6. o. 2.6. Tétel].

2. Ha $\mathbf{x} \in \text{int}(\text{supp}(g_K)) \setminus \{\mathbf{0}\}$, akkor ∂K és $\partial(K + \mathbf{x})$ pontosan a $\mathbf{p}_1(\mathbf{x})$ és a $\mathbf{p}_4(\mathbf{x})$ pontokban metszik egymást, ráadásul K konvexitása garantálja, hogy ezen metszések transzverzálisak. Az implicit függvény tétel miatt a $\mathbf{p}_1(\mathbf{x})$ és $\mathbf{p}_4(\mathbf{x})$ pontok folytonos függvényei $\mathbf{x}$ -nek. A K test C^1 -regularitása miatt a $\mathbf{p} \in \partial K$ pontbeli $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ külső normális folytonos függvénye $\mathbf{p}$ -nek. Így nyilván minden $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén, a folytonos függvények összetételeként előálló $\mathbf{n}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{p}_i(\mathbf{x}))$ függvény is folytonos.

3. A (2.5) formula alapján világos, hogy $\mathbf{Ld}(K, \mathbf{x}) = \mathbf{Ld}(\mathcal{L}, \mathbf{x})$, mely bizonyítja állításunkat. $\square$

A könnyebb formalizmus érdekében azt a konvenciót követjük, hogy a fentebb bevezetett funkcionálok indexeit mindig modulo 4 értjük. (A későbbiekben két, közös átlóval rendelkező parallelogramma konvex burkaként nyerhető hatszögekkel is dolgozunk majd, amikor az indexelés nyilván modulo 6 értendő.)

2.7. Lemma Tetszőleges $1 \leq i \leq 4$ indexre

$$\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_{i+1}) > 0. \quad (2.6)$$

Bizonyítás. Bizonyításként elég észrevenni, hogy $\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_{i+1}) = \langle \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_{i+1}, \mathbf{m} \rangle > 0$, ahol $\mathbf{m}$ a sík olyan normálvektora, melyre a konvex ∂K görbe körüljárása pozitív. $\square$

A továbbiakban, ha a K test g_K kovariogramja kétszer differenciálható $\mathbf{x}$ -ben, akkor $\mathbf{G}_K$ jelöli a g_K Hesse-mátrixát.

2.8. Tétel Legyen K egy szigorúan konvex, C^1 -reguláris test $\mathbb{R}^2$ -ben, jelölje g_K a kovariogramját. Minden $\mathbf{x} \in \text{int}(\text{supp}(g_K)) \setminus \{\mathbf{0}\}$ esetén:

$$\mathbf{G}_K = \frac{\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_1^T}{\det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1)} - \frac{\mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_4^T}{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)} = \frac{\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2^T}{\det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1)} - \frac{\mathbf{n}_4 \otimes \mathbf{n}_3^T}{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)}, \quad (2.7)$$

$$\det \mathbf{G}_K = -\frac{\det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \det(\mathbf{n}_4, \mathbf{n}_1)}{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) \det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} < 0, \quad (2.8)$$

$$1 + \det \mathbf{G}_K = \frac{\det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_4) \det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3)}{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) \det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}, \quad (2.9)$$

valamint

$$\mathbf{n}_1^T \mathbf{G}_K^{-1} \mathbf{n}_3 = 0 \text{ és } \mathbf{n}_2^T \mathbf{G}_K^{-1} \mathbf{n}_4 = 0. \quad (2.10)$$

Bizonyítás. (2.7): Lásd [23, 2.5. Tétel].

(2.8): A (2.7) összefüggés alapján felírható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_K \mathbf{L} \mathbf{n}_2 &= -\frac{\mathbf{n}_4 \otimes \mathbf{n}_3^T}{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)} \mathbf{L} \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{n}_4 (\mathbf{n}_3^T \cdot \mathbf{n}_2^\perp)}{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)} = \frac{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2)}{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)} \mathbf{n}_4, \\ \mathbf{G}_K \mathbf{L} \mathbf{n}_3 &= \frac{\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2^T}{\det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1)} \mathbf{L} \mathbf{n}_3 = \frac{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2)}{\det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1)} \mathbf{n}_1. \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva

$$\mathbf{G}_K \mathbf{L}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \det^2(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2)(\mathbf{n}_4, \mathbf{n}_1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1)} \end{pmatrix}$$

írható fel, majd mindkét oldal determinánsát véve adódik, hogy

$$\det \mathbf{G}_K \det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \det^2(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2) \det(\mathbf{n}_4, \mathbf{n}_1) \frac{1}{\det(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) \det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1)}.$$

A (2.6). formula miatt mindkét oldalt eloszthatjuk $\det(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ -mal, mely éppen a bizonyítandót adja.

(2.9): A Jacobi-azonosság alapján tetszőleges $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \det(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1) = \det(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4),$$

melyet a (2.8) formulába helyettesítve adódik a kívánt formula.

(2.10): Ha a (2.7) formulát az $\mathbf{n}_1^T \mathbf{L}$ vektorral balról, az $\mathbf{L} \mathbf{n}_3$ vektorral pedig jobbról beszorozzuk, akkor $\mathbf{n}_1^T \mathbf{L} \mathbf{G}_K \mathbf{L} \mathbf{n}_3 = 0$ adódik. Ha a $\mathbf{G}_K$ mátrix elemeit $g_{i,j}$ jelöli, akkor $\mathbf{L} \mathbf{G}_K \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_{22} & g_{21} \\ g_{12} & -g_{11} \end{pmatrix}$. Ugyanakkor (2.8) miatt $\det \mathbf{G}_K \neq 0$, így az inverz mátrixra $\mathbf{G}_K^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{G}_K} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$ teljesül, tehát $\mathbf{L} \mathbf{G}_K \mathbf{L} = -\det \mathbf{G}_K \mathbf{G}_K^{-1}$. $\square$

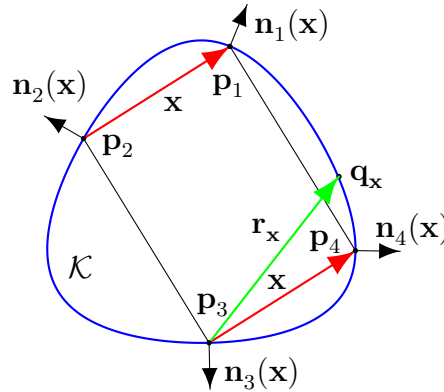
2.9. Tétel *Ha K egy szigorúan konvex, C^1 -reguláris test $\mathbb{R}^2$ -ben, akkor a következők ekvivalensek:*

1. K centrálszimmetrikus;
2. a K -ba írt parallelogrammáknak legalább az egyik átlója K affin átmérője;
3. $\det \mathbf{G}_K(\mathbf{x}) = -1$ ha $\mathbf{x} \in \text{int}(\text{supp}(g_K)) \setminus \{0\}$.

Bizonyítás. (1. $\implies$ 2.) Triviális.

(2. $\iff$ 3.) A (2.9) formulából azonnal adódik, hisz $\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_{i+2}) = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{n}_i \parallel \mathbf{n}_{i+2}$.

(2. $\implies$ 1.) Először azt látjuk be, hogy ha az egyik átló affin átmérő, akkor a másik is az. Indirekt módon tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor van olyan $\mathbf{x} \in \text{int}(\text{supp}(g_K)) \setminus \{0\}$, hogy $P(\mathbf{x})$ -nek pontosan az egyik átlója affin átmérője K -nak, mondjuk $\overline{\mathbf{p}_1(\mathbf{x})\mathbf{p}_3(\mathbf{x})}$. Legyen $\mathbf{q}_x: [0,1] \rightarrow \partial K$, a ∂K egy kicsiny, $\mathbf{p}_4(\mathbf{x})$ -et tartalmazó részívének olyan folytonos paraméterezése, melyre $\mathbf{q}_x(0) = \mathbf{p}_4(\mathbf{x})$. Legyen $\mathbf{r}_x(t) := \mathbf{q}_x(t) - \mathbf{p}_3(\mathbf{x})$, így $\mathbf{r}_x(0) = \mathbf{x}$ és nyilván $\mathbf{p}_3(\mathbf{r}_x(t)) = \mathbf{p}_3(\mathbf{x})$, valamint $\mathbf{p}_4(\mathbf{r}_x(t)) = \mathbf{q}_x(t)$, amint az a 2.7. ábrán látható.



2.7. ábra

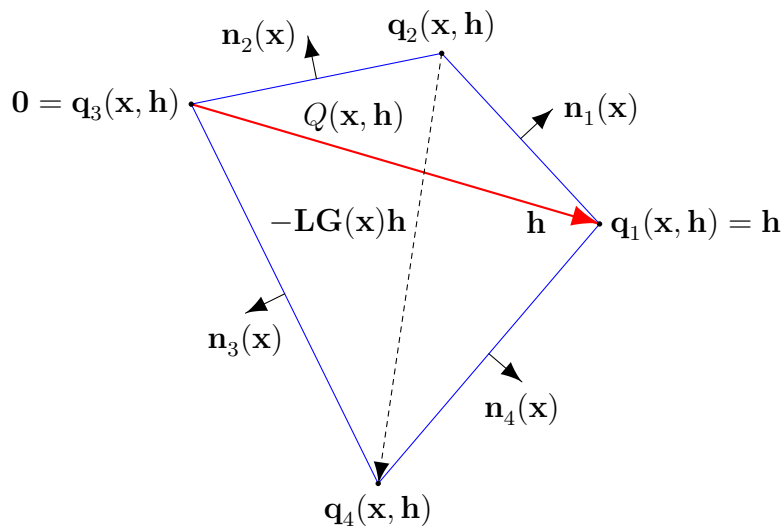
Mivel $\overline{\mathbf{p}_2(\mathbf{x})\mathbf{p}_4(\mathbf{x})}$ nem affin átmérő, elég kicsi $t > 0$ esetén $\overline{\mathbf{p}_2(\mathbf{r}_x(t))\mathbf{p}_4(\mathbf{r}_x(t))}$ sem lehet affin átmérő, mert közel van $\overline{\mathbf{p}_2(\mathbf{x})\mathbf{p}_4(\mathbf{x})}$ -hez. Eszerint minden elég kicsi t esetén

a $\overline{\mathbf{p}_1(\mathbf{r}_x(t))\mathbf{p}_3(\mathbf{r}_x(t))}$ átló affin átmérője $\mathcal{K}$ -nak. A $\mathcal{K}$ -ra feltett C^1 -regularitás következtében $\mathbf{p}_1(\mathbf{x})$ az egyetlen olyan pont $\partial\mathcal{K}$ -n, amelyben a kifelé mutató egységnyi normálvektor ellentétes a $\mathbf{p}_3(\mathbf{x})$ -belivel, így $\mathbf{p}_3(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{p}_3(\mathbf{x})$ miatt $\overline{\mathbf{p}_1(\mathbf{r}(t))\mathbf{p}_3(\mathbf{r}(t))} = \overline{\mathbf{p}_1(\mathbf{x})\mathbf{p}_3(\mathbf{x})}$. Ebből az következik, hogy a paralelogramma középpontjára, vagyis a $\overline{\mathbf{p}_1(\mathbf{x})\mathbf{p}_3(\mathbf{x})}$ szakasz felezőpontjára tükrözve, a kapott ív is íve $\partial\mathcal{K}$ -nak, tehát $\overline{\mathbf{p}_2(\mathbf{x})\mathbf{p}_4(\mathbf{x})}$ is affin átmérő, ami ellentmondás.

Ha $\overline{\mathbf{p}_2(\mathbf{x})\mathbf{p}_4(\mathbf{x})}$ egy affin átmérő, akkor fentiek szerint minden ilyen átlójú beírt paralelogramma másik átlója is átmérő, így a $\overline{\mathbf{p}_2(\mathbf{x})\mathbf{p}_4(\mathbf{x})}$ szakaszt felező pont éppen $\mathcal{K}$ centruma. $\square$

A most következő tételek abba az irányba mutatnak, hogy $g_{\mathcal{K}} = g_{\mathcal{L}}$ esetén bebizonyítsuk, hogy van „közös íve” $\partial\mathcal{K}$ -nak és $\partial\mathcal{L}$ -nek.

Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ lineárisan független vektorok. Bevezetjük a $P_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2}$ leképezést, mely az argumentumát $\mathbf{v}_2$ mentén $\text{lin}(\mathbf{v}_1)$ -re vetíti. Ha tehát $\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$, akkor $P_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2}(\mathbf{y}) = \lambda_1 \mathbf{v}_1$.



2.8. ábra. A 2.10. Lemma jelölései.

2.10. Lemma Legyen $\mathcal{K}$ egy szigorúan konvex, C^1 -reguláris test $\mathbb{R}^2$ -ben, továbbá $\mathbf{x} \in \text{int}(\text{supp}(g_{\mathcal{K}})) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Legyen továbbá $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ olyan, hogy $\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \prec \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) \prec -\mathbf{h}/|\mathbf{h}| \prec \mathbf{n}_3(\mathbf{x}) \prec \mathbf{n}_4(\mathbf{x}) \prec \mathbf{h}/|\mathbf{h}|$. Tekintsük a $Q(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \text{conv}\{\mathbf{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) : 1 \leq i \leq 4\}$ konvex négyszöget, ahol $\mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{h}$, $\mathbf{q}_3(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}$, és minden $1 \leq i \leq 4$ indexre a $\overline{\mathbf{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{h})\mathbf{q}_{i+1}(\mathbf{x}, \mathbf{h})}$ normálvektora $\mathbf{n}_i(\mathbf{x})$. Ekkor $\mathbf{q}_4(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - \mathbf{q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = -\mathbf{L}G_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})\mathbf{h}$.

Bizonyítás. A Cramer-szabály miatt

$$P_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathbf{y} = \frac{\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{y})}{\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)} \mathbf{v}_1 = -\frac{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2^T}{\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)} \mathbf{L} \mathbf{y},$$

ami azt mutatja, hogy

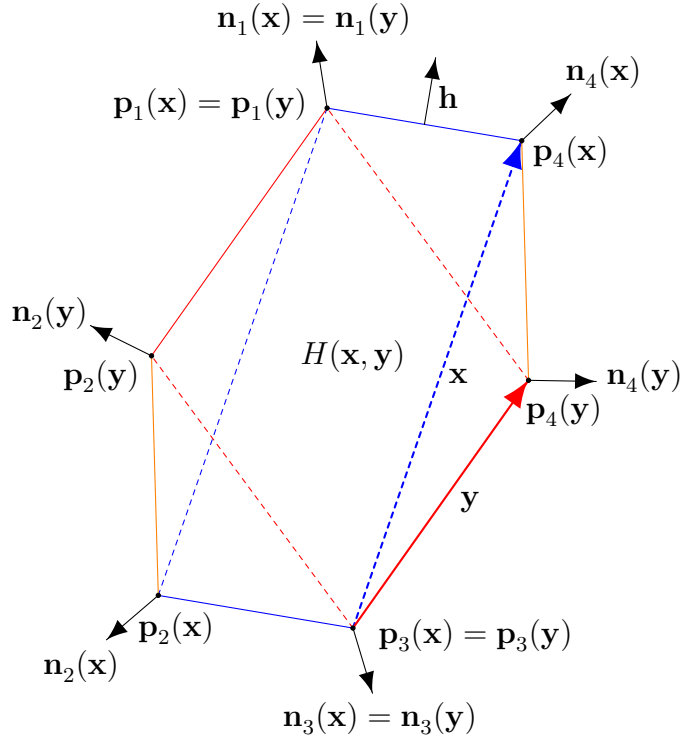
$$P_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} = -\frac{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2^T}{\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)} \mathbf{L}.$$

Könnyen látszik, hogy $P_{\mathbf{L}\mathbf{v}_1}^{\mathbf{L}\mathbf{v}_2} = -\mathbf{L}P_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2}\mathbf{L}$, melynek felhasználásával (2.7) alapján

$$-\mathbf{L}G_{\mathcal{K}} = -\mathbf{L} \left(P_{\mathbf{n}_1}^{\mathbf{n}_2} \mathbf{L} - P_{\mathbf{n}_4}^{\mathbf{n}_3} \mathbf{L} \right) = P_{\mathbf{L}\mathbf{n}_1}^{\mathbf{L}\mathbf{n}_2} - P_{\mathbf{L}\mathbf{n}_4}^{\mathbf{L}\mathbf{n}_3}$$

adódik. Ebből már könnyen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_4(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - \mathbf{q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) &= (\mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - \mathbf{q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{h})) + (\mathbf{q}_4(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - \mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{h})) \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{L}\mathbf{n}_1}^{\mathbf{L}\mathbf{n}_2} \mathbf{h} - \mathbf{P}_{\mathbf{L}\mathbf{n}_4}^{\mathbf{L}\mathbf{n}_3} \mathbf{h} = -\mathbf{L}\mathbf{G}_{\mathcal{K}} \mathbf{h}. \end{aligned} \quad \square$$



2.9. ábra. A 2.11. Lemma jelölései.

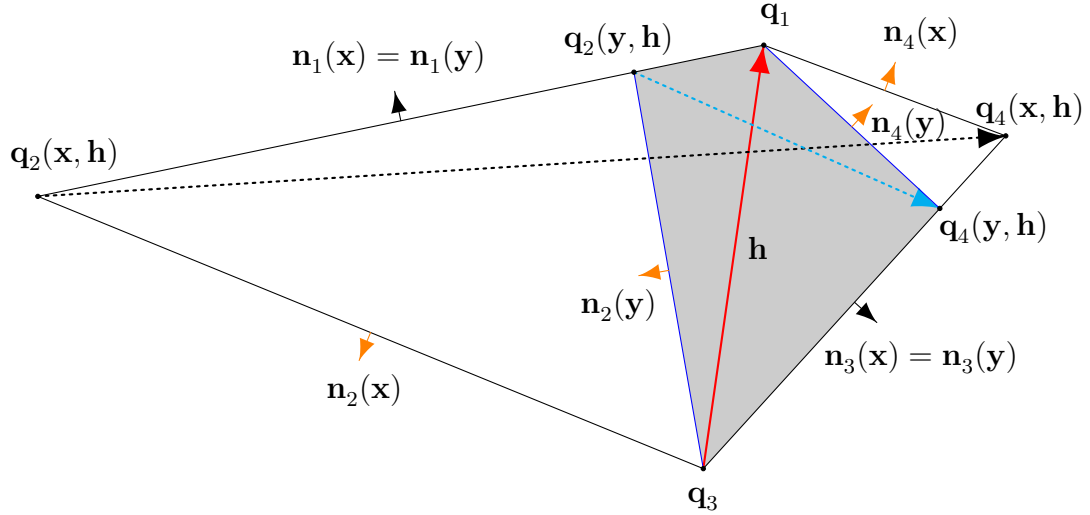
2.11. Lemma Legyen $\mathcal{K}$ egy szigorúan konvex, C^1 -reguláris test $\mathbb{R}^2$ -ben, továbbá a különböző $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{int}(\text{supp}(g_{\mathcal{K}})) \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektorok olyanok, hogy $i \in \{1, 3\}$ -ra a $\mathbf{p}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_i(\mathbf{y}) =: \mathbf{p}_i$ végpontú $\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3}$ húr ne legyen affin átmérő. Ekkor a $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})\mathbf{G}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{y})$ mátrixnak két különböző valós sajátértéke van. Továbbá, ha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{S}^1$ két különböző sajátvektora a $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})\mathbf{G}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{y})$ mátrixnak, melyekre $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \geq 0$ teljesül, akkor $\{\mathbf{n}_1(\mathbf{x}), -\mathbf{n}_3(\mathbf{x})\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$.

Bizonyítás. A feltétel szerint $i \in \{1, 3\}$ esetén $\mathbf{p}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_i(\mathbf{y})$, melyből következik, hogy $\mathbf{n}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_i(\mathbf{y}) =: \mathbf{n}_i$. A (2.10) formulát az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ helyeken felírva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{n}_1^T \mathbf{G}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_3 = 0, \quad \text{és} \quad \mathbf{n}_1^T \mathbf{G}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{y}) \mathbf{n}_3 = 0.$$

Ezekből következik, hogy $\mathbf{n}_1^T$ mind $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{n}_3$ -ra, mind $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{n}_3$ -ra merőleges, tehát $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{n}_3 \parallel \mathbf{G}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{n}_3$, amivel ekvivalens, hogy $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})\mathbf{G}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{n}_3 \parallel \mathbf{n}_3$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{n}_3$ sajátvektora $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})\mathbf{G}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{y})$ -nak. Analóg módon belátható, hogy $\mathbf{n}_1$ is sajátvektor. Legyen $H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) := \text{conv}(P(\mathbf{x}) \cup P(\mathbf{y}))$. Ez a $\mathbf{p}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_i(\mathbf{y})$ ($i \in \{1, 3\}$) feltétel miatt egy centrálisan szimmetrikus hatszög. Az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok esetleges cseréjével elérhető, hogy $\mathbf{p}_1(\mathbf{x}) \prec \mathbf{p}_2(\mathbf{y}) \prec \mathbf{p}_2(\mathbf{x}) \prec \mathbf{p}_3(\mathbf{x})$.

Jelölje $\mathbf{h}$ a $\mathbf{p}_1(\mathbf{x})\mathbf{p}_4(\mathbf{x})$ szakasz kifelé mutató normálvektorát. Legyenek $Q(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ és $Q(\mathbf{y}, \mathbf{h})$ a 2.10. Lemmában látott konstrukcióval kapott négyszögek. A $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ hatszög oldalainak normálvektoraira egyfelől nyilván $\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_1(\mathbf{y})$, $\mathbf{n}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_3(\mathbf{y})$, másfelől pedig $\mathbf{n}_2(\mathbf{y}) \prec \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) \prec \mathbf{n}_4(\mathbf{y}) \prec \mathbf{n}_4(\mathbf{x})$ teljesül.

2.10. ábra. A $Q(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ és $Q(\mathbf{y}, \mathbf{h})$ négyszögek.

Emiatt $\overline{0\mathbf{h}}$ közös átlója a $Q(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ és $Q(\mathbf{y}, \mathbf{h})$ négyszögeknek. A 2.10. ábra alapján felírható, hogy $Q(\mathbf{y}, \mathbf{h}) \ni \mathbf{q}_2(\mathbf{y}, \mathbf{h}) \in \text{relint}(\overline{\mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{h})\mathbf{q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{h})}) \subset Q(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ és $Q(\mathbf{y}, \mathbf{h}) \ni \mathbf{q}_4(\mathbf{y}, \mathbf{h}) \in \text{relint}(\overline{\mathbf{q}_3(\mathbf{x}, \mathbf{h})\mathbf{q}_4(\mathbf{x}, \mathbf{h})}) \subset Q(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, amelyekből következik, hogy $\overline{\mathbf{q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{h})\mathbf{q}_4(\mathbf{x}, \mathbf{h})} \not\parallel \overline{\mathbf{q}_2(\mathbf{y}, \mathbf{h})\mathbf{q}_4(\mathbf{y}, \mathbf{h})}$. A 2.10. Lemma alapján így $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})\mathbf{h} \not\parallel \mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{y})\mathbf{h}$, azaz $\mathbf{h}$ nem sajátvektora a $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})\mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{y})^{-1}$ mátrixnak. Összefoglalva, $\mathbf{n}_1(\mathbf{x})$ és $\mathbf{n}_3(\mathbf{x})$ független sajátvektorai $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})\mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{y})^{-1}$ -nek, ahogy állítottuk. $\square$

A következő tételben bizonyos megszorítások mellett jellemezzük, hogy egy hatszög mikor írható be egy konvex halmazba.

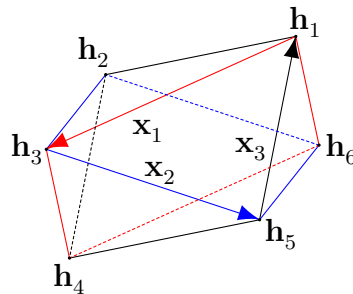
2.12. Tétel *Legyen $\mathcal{K}$ szigorúan konvex, C^1 -reguláris test $\mathbb{R}^2$ -ben, H pedig egy centráliszimmetrikus hatszög, amelynek csúcsaira $\mathbf{h}_1 \prec \dots \prec \mathbf{h}_6$ teljesül. Defináljuk továbbá az $\mathbf{x}_i := \mathbf{h}_{2i+1} - \mathbf{h}_{2i-1}$ vektorokat. A H pontosan akkor írható be $\mathcal{K}$ -ba, ha minden $i \in \{1, 2, 3\}$ esetén teljesül, hogy*

$$\mathbf{d}(\mathcal{K}, \mathbf{x}_i) = \mathbf{h}_{2i+2} - \mathbf{h}_{2i+1}, \quad (2.11)$$

(ahol az indexelés modulo 6 értendő), továbbá

$$\prod_{i=1}^3 (1 + \det \mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}_i)) \geq 0. \quad (2.12)$$

Bizonyítás. ($\implies$) A (2.11) és (2.12) formulák invariánsak H eltolására, ezért feltehető, hogy H már bele van írva $\mathcal{K}$ -ba.



2.11. ábra. A 2.12. Tétel jelölései.

Az $\mathbf{x}_i$ és $\mathbf{p}_j$ definíciója és a 2.11. ábra alapján nyilvánvalóak a következő összefüggések.

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{x}_i) = \mathbf{h}_{2i+2}, \quad \mathbf{p}_2(\mathbf{x}_i) = \mathbf{h}_{2i-2}, \quad \mathbf{p}_3(\mathbf{x}_i) = \mathbf{h}_{2i-1}, \quad \mathbf{p}_4(\mathbf{x}_i) = \mathbf{h}_{2i+1}. \quad (2.13)$$

Mivel $\mathbf{d}(\mathcal{K}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{p}_4(\mathbf{x})$, így (2.13) alapján (2.11) adódik.

Ugyanakkor a (2.9) formula szerint

$$s := \prod_{i=1}^3 (1 + \det \mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}_i)) = \frac{s_1 s_2}{s_3}$$

írható fel, ahol

$$s_1 := \prod_{i=1}^3 \det(\mathbf{n}_1(\mathbf{x}_i), \mathbf{n}_3(\mathbf{x}_i)), \quad s_2 := \prod_{i=1}^3 \det(\mathbf{n}_2(\mathbf{x}_i), \mathbf{n}_4(\mathbf{x}_i)),$$

$$s_3 := \prod_{i=1}^3 \det(\mathbf{n}_1(\mathbf{x}_i), \mathbf{n}_2(\mathbf{x}_i)) \det(\mathbf{n}_3(\mathbf{x}_i), \mathbf{n}_4(\mathbf{x}_i)).$$

A (2.6) formula miatt $s_3 > 0$. Másfelől a (2.13) formulából azonnal következnek a

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{x}_{i+1}) = \mathbf{p}_2(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{p}_3(\mathbf{x}_{i+1}) = \mathbf{p}_4(\mathbf{x}_i),$$

$$\det(\mathbf{n}_1(\mathbf{x}_{i+1}), \mathbf{n}_3(\mathbf{x}_{i+1})) = \det(\mathbf{n}_2(\mathbf{x}_i), \mathbf{n}_4(\mathbf{x}_i))$$

összefüggések, ahol $i \in \{1, 2, 3\}$, melyből azonnal látszik, hogy $s_1 = s_2$, tehát $s \geq 0$, amely éppen a bizonyítandó (2.12) képlet.

($\Leftarrow$) Indirekt módon fogunk bizonyítani. Tegyük fel, hogy valamely $\mathcal{K}$ -ra és H -ra teljesülnek a (2.11) és (2.12) feltételek, de H -nak egyetlen eltoltja sem $\mathcal{K}$ -ba írt. A (2.11) formula miatt minden i egészre a $P(\mathbf{x}_i)$ parallelogramma a $\text{conv}\{\mathbf{h}_{2i-2}, \mathbf{h}_{2i-1}, \mathbf{h}_{2i+1}, \mathbf{h}_{2i+2}\}$ egy eltoltja, továbbá (2.13) alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_i) &= \mathbf{a}_i + \mathbf{h}_{2i+2}, & \mathbf{p}_2(\mathbf{x}_i) &= \mathbf{a}_i + \mathbf{h}_{2i-2}, \\ \mathbf{p}_3(\mathbf{x}_i) &= \mathbf{a}_i + \mathbf{h}_{2i-1}, & \mathbf{p}_4(\mathbf{x}_i) &= \mathbf{a}_i + \mathbf{h}_{2i+1}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

a megfelelő $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^2$ vektorokra. Ha valamely különböző $i, j \in \{1, 2, 3\}$ indexekre $P(\mathbf{x}_i)$ -nek és $P(\mathbf{x}_j)$ -nek van közös átlója, akkor H a $\text{conv}(P(\mathbf{x}_i) \cup P(\mathbf{x}_j))$ egy eltoltja, ami nyilván ellentmondás. Amennyiben semmilyen egymástól különböző i, j pár esetén nincs közös átló, akkor bármely $i \in \mathbb{Z}$ -re, a (2.14) összefüggések alapján következik, hogy

$$\mathbf{h}_{2i-2} - \mathbf{h}_{2i+1} = \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{p}_3(\mathbf{x}_{i+1}) = \mathbf{p}_2(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}_4(\mathbf{x}_i).$$

Ez azt mutatja, hogy a $P(\mathbf{x}_{i+1})$ parallelogramma $\overline{\mathbf{p}_1(\mathbf{x}_{i+1})\mathbf{p}_3(\mathbf{x}_{i+1})}$ átlója, és a $P(\mathbf{x}_i)$ parallelogramma $\overline{\mathbf{p}_2(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}_4(\mathbf{x}_i)}$ átlója eltolással egymásba vihető. Mivel ezek az átlók a feltétel szerint nem esnek egybe, ezért $\mathcal{K}$ két különböző húrját adják, melyek a $\overline{\mathbf{h}_{2i+1}\mathbf{h}_{2i-2}}$ szakasz eltoltjai. Ugyanakkor $\mathcal{K}$ szigorú konvexitása miatt

$$\text{sgn} \det(\mathbf{n}_1(\mathbf{x}_{i+1}), \mathbf{n}_3(\mathbf{x}_{i+1})) = -\text{sgn} \det(\mathbf{n}_2(\mathbf{x}_i), \mathbf{n}_4(\mathbf{x}_i)) \neq 0,$$

melyből következően a fentebb definiált s_i -kre teljesül, hogy $\text{sgn} s_1 = -\text{sgn} s_2 \neq 0$, de ebből $s_3 > 0$ miatt $s < 0$ következik, ami viszont ellentmond a (2.12) feltételnek. $\square$

2.13. Tétel *Legyen $\mathcal{K}$ szigorúan konvex, C^1 -reguláris test $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x} \in \text{int}(\text{supp}(g_{\mathcal{K}})) \setminus \{\mathbf{0}\}$ esetén ha $\det \mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) \neq -1$, akkor a $g_{\mathcal{K}}$ kovariogram egyértelműen meghatározza az $\{\mathbf{n}_1(\mathbf{x}), -\mathbf{n}_3(\mathbf{x})\}$ halmazt.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy rögzített $\mathbf{x}$ mellett létezik olyan ettől különböző $\mathbf{y} \in \text{int}(\text{supp}(g_{\mathcal{K}})) \setminus \{\mathbf{0}\}$, hogy ha $i \in \{1, 3\}$, akkor $\mathbf{p}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_i(\mathbf{y})$. Jelölje $\mathbf{c}$ a $P(\mathbf{x})$ centrumát, $\cdot_{\mathbf{c}}$ pedig az ezen pontra vonatkozó tükrözést. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $1 + \det \mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})$ pozitív vagy negatív. Az első esetben a (2.9) és a (2.6) formulák miatt

$$\text{sgn det}(\mathbf{n}_1(\mathbf{x}), \mathbf{n}_3(\mathbf{x})) = \text{sgn det}(\mathbf{n}_2(\mathbf{x}), \mathbf{n}_4(\mathbf{x})) \neq 0.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \prec \mathbf{n}_3(\mathbf{x}) \iff \mathbf{n}_2(\mathbf{x}) \prec \mathbf{n}_4(\mathbf{x})$, melyből az következik, hogy $\partial \mathcal{K}$ és $\partial \mathcal{K}_{\mathbf{c}}$ transzverzálisan metszi egymást a $\mathbf{p}_i(\mathbf{x})$ pontokban, ahol $i \in \{1, \dots, 4\}$. Ez alapján tehát két eset lehetséges. Vagy a $[\mathbf{p}_1(\mathbf{x}), \mathbf{p}_2(\mathbf{x})]_{\mathcal{K}}$ ív egy $\mathbf{p}_1(\mathbf{x})$ pontot tartalmazó kis részíve benne van $\mathcal{K}_{\mathbf{c}}$ -ben és egy $\mathbf{p}_2(\mathbf{x})$ pontot tartalmazó kis részíve benne van $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{K}_{\mathbf{c}}$ -ben, vagy fordítva, azaz a $[\mathbf{p}_1(\mathbf{x}), \mathbf{p}_2(\mathbf{x})]_{\mathcal{K}}$ ív egy $\mathbf{p}_1(\mathbf{x})$ pontot tartalmazó kis részíve benne van $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{K}_{\mathbf{c}}$ -ben és egy $\mathbf{p}_2(\mathbf{x})$ pontot tartalmazó kis részíve benne van $\mathcal{K}_{\mathbf{c}}$ -ben. Ebből következőleg a $[\mathbf{p}_1(\mathbf{x}), \mathbf{p}_2(\mathbf{x})]_{\mathcal{K}}$ és $[\mathbf{p}_1(\mathbf{x}), \mathbf{p}_2(\mathbf{x})]_{\mathcal{K}_{\mathbf{c}}}$ ívek egy $\mathbf{p}_1(\mathbf{x})$ és $\mathbf{p}_2(\mathbf{x})$ pontoktól különböző $\mathbf{q}$ pontban metszik egymást. Legyen $\mathbf{y} := \mathbf{p}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{q}$. A konstrukció miatt $\mathbf{p}_1(\mathbf{x}), \mathbf{q}, \mathbf{p}_3(\mathbf{x}), \mathbf{q}_{\mathbf{c}}$ egymást követő csúcsai a $P(\mathbf{y})$ paralelogrammának, tehát $\mathbf{y}$ megfelel a bizonyítás elején rótt követelményeknek.

A másik esetben, amikor $1 + \det \mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) < 0$, akkor hasonló megfontolással adódik, hogy a $[\mathbf{p}_4(\mathbf{x}), \mathbf{p}_1(\mathbf{x})]_{\mathcal{K}}$ és $[\mathbf{p}_4(\mathbf{x}), \mathbf{p}_1(\mathbf{x})]_{\mathcal{K}_{\mathbf{c}}}$ ívek egy $\mathbf{q} \in \{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ pontban metszik egymást, amely esetben az $\mathbf{y} := \mathbf{q} - \mathbf{p}_3(\mathbf{x})$ választás megfelelő.

Legyen most már $\mathcal{L}$ szigorúan konvex, C^1 -reguláris síkbeli test, melyre $g_{\mathcal{K}} = g_{\mathcal{L}}$. A 2.12. Tétel alapján $H := \text{conv}(P(\mathcal{K}, \mathbf{x}) \cup P(\mathcal{L}, \mathbf{y}))$ beírható $\mathcal{L}$ -be. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy H már be van írva $\mathcal{L}$ -be, tehát $P(\mathcal{K}, \mathbf{x}) = P(\mathcal{L}, \mathbf{x})$ és $P(\mathcal{K}, \mathbf{y}) = P(\mathcal{L}, \mathbf{y})$. Vegyük észre, hogy $1 + \det \mathbf{G}(\mathbf{x}) \neq 0$ miatt a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3$ szakasz nem affin átmérője sem $\mathcal{K}$ -nak, sem $\mathcal{L}$ -nek. Emiatt használható a 2.11. Lemma, mely éppen a bizonyítandó $\{\mathbf{n}_1(\mathcal{K}, \mathbf{x}), -\mathbf{n}_3(\mathcal{K}, \mathbf{x})\} = \{\mathbf{n}_1(\mathcal{L}, \mathbf{x}), -\mathbf{n}_3(\mathcal{L}, \mathbf{x})\}$ eredményt adja. $\square$

2.14. Tétel *Legyen $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ szigorúan konvex, C^1 -reguláris síkbeli test, melyek kovariogramjára $g_{\mathcal{K}} = g_{\mathcal{L}}$. Ekkor létezik $\partial \mathcal{L}$ -nek olyan nem degenerált részíve, mely centrális tükrözéssel és eltolással $\partial \mathcal{K}$ egy részívébe vihető.*

Bizonyítás. Amennyiben $\mathcal{K}$ centrálszimmetrikus, akkor a 2.9. Tétel miatt $\mathcal{L}$ is az. Ekkor a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ halmazok az $\frac{1}{2}\text{supp}g_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}\text{supp}g_{\mathcal{L}}$, mely bizonyítja állításunkat. Tegyük most fel, hogy $\mathcal{K}$ nem centrálszimmetrikus. Ekkor szintén a 2.9. Tétel miatt van olyan $\mathbf{x}_0 \in \text{intsupp}g_{\mathcal{K}} \setminus \{\mathbf{0}\}$, melyre $\det \mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}_0) \neq -1$, melyből arra következtetünk, hogy $\mathbf{n}_1(\mathcal{K}, \mathbf{x}_0) \neq -\mathbf{n}_3(\mathcal{K}, \mathbf{x}_0)$. Legyen N_1 és N_3 rendre az $\mathbf{n}_1(\mathcal{K}, \mathbf{x}_0)$ és $-\mathbf{n}_3(\mathcal{K}, \mathbf{x}_0)$ egy-egy diszjunkt nyílt környezete. A 2.6. és 2.13. Tételek miatt feltehető, hogy $P(\mathcal{K}, \mathbf{x}_0) = P(\mathcal{L}, \mathbf{x}_0)$ és $i \in \{1, 3\}$ esetén $\mathbf{n}_i(\mathcal{K}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{n}_i(\mathcal{L}, \mathbf{x}_0)$. Legyen $\mathbf{q}(t) : [0, 1] \rightarrow \partial \mathcal{K}$ egy óramutató járásával ellentétes irányú, folytonos paraméterezése a $\partial \mathcal{K}$ határgörbe egy kicsiny részívének úgy, hogy $\mathbf{q}(0) = \mathbf{p}_4(\mathcal{K}, \mathbf{x}_0)$. Legyen továbbá $\mathbf{r}(t) := \mathbf{q}(t) - \mathbf{p}_3(\mathcal{K}, \mathbf{x}_0)$. Ekkor $t \in [0, 1]$ esetén $\det \mathbf{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{r}(t)) \neq -1$, $\mathbf{n}_1(\mathcal{K}, \mathbf{r}(t)) \in N_1$ és $-\mathbf{n}_3(\mathcal{K}, \mathbf{r}(t)) \in N_3$. Azt állítjuk, hogy ekkor $i \in \{1, 3\}$ esetén $\mathbf{n}_i(\mathcal{K}, \mathbf{r}(t)) = \mathbf{n}_i(\mathcal{L}, \mathbf{r}(t))$ teljesül. Ennek bizonyításához indirekt tegyük fel, hogy nem teljesül az összefüggés. Ekkor a 2.13. Tétel alapján van olyan $t_1 \in (0, 1]$, hogy $\mathbf{n}_1(\mathcal{K}, \mathbf{r}(t_1)) = -\mathbf{n}_3(\mathcal{L}, \mathbf{r}(t_1))$ valamint $\mathbf{n}_1(\mathcal{L}, \mathbf{r}(t_1)) = -\mathbf{n}_3(\mathcal{K}, \mathbf{r}(t_1))$. Így $\mathbf{n}_1(\mathcal{L}, \mathbf{r}(t_1)) \in N_3$. Mivel $\mathbf{n}_1(\mathcal{L}, \mathbf{r}(0)) = \mathbf{n}_1(\mathcal{K}, \mathbf{r}(0)) \in N_1$ és $N_1 \cap N_3 = \emptyset$, ezért létezik olyan $t_2 \in (0 < t_2 < t_1)$, melyre $\mathbf{n}_1(\mathcal{L}, \mathbf{r}(t_2)) \notin N_1 \cup N_3 =: N$, tehát $\{\mathbf{n}_1(\mathcal{L}, \mathbf{r}(t_2)), -\mathbf{n}_3(\mathcal{L}, \mathbf{r}(t_2))\} \not\subseteq N$. Ezzel szemben a fentiek szerint $\{\mathbf{n}_1(\mathcal{K}, \mathbf{r}(t_2)), -\mathbf{n}_3(\mathcal{K}, \mathbf{r}(t_2))\} \subseteq N$, ami ellentmond a 2.13. Tételnek.

Az $\mathbf{r}(t)$ függvény definíciója folytán minden $t \in [0,1]$ paraméterre $\mathbf{p}_3(\mathcal{K}, \mathbf{r}(t)) = \mathbf{p}_3(\mathcal{K}, \mathbf{x}_0)$, melyből következik, hogy $\mathbf{n}_3(\mathcal{K}, \mathbf{r}(t)) = \mathbf{n}_3(\mathcal{K}, \mathbf{x}_0)$. Egyfelől az imént bizonyított összefüggés alapján világos, hogy $\mathbf{n}_3(\mathcal{L}, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{n}_3(\mathcal{L}, \mathbf{x}_0)$, másfelől $\mathcal{L}$ szigorú konvexitása miatt $\mathbf{p}_3(\mathcal{L}, \mathbf{r}(t)) = \mathbf{p}_3(\mathcal{L}, \mathbf{x}_0)$ is fennáll, melyből

$$[\mathbf{p}_4(\mathcal{K}, \mathbf{r}(0)), \mathbf{p}_4(\mathcal{K}, \mathbf{r}(1))]_{\mathcal{K}} = [\mathbf{p}_4(\mathcal{L}, \mathbf{r}(0)), \mathbf{p}_4(\mathcal{L}, \mathbf{r}(1))]_{\mathcal{L}}$$

adódik, mely bizonyítja állításunkat. $\square$

Bizonyítás nélkül közlünk két eredményt a [3] cikkből, melyekre támaszkodva az iméntiek bizonyítják a kovariogram injektivitását a síkon.

2.15. Tétel *Legyenek $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ konvex testek úgy, hogy $g_{\mathcal{K}} = g_{\mathcal{L}}$. Tegyük fel, hogy a két test közül valamelyik nem szigorúan konvex, vagy nem C^1 -reguláris, vagy a határa tartalmaz két szemközti C^2 -ívet (tehát nyílt ívek olyan párját, melyekben van egy-egy pont, hogy az ezekben állított külső normálisok ellentétesek). Ekkor $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ eltolással vagy pontra való tükrözéssel egymásba vihető.*

2.16. Tétel *Legyenek $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ olyan konvex testek, melyeknek megegyezik a kovariogramjuk, és tegyük fel, hogy a két test határának van közös, nem-degenerált részíve. Ekkor $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ eltolás és tükrözés erejéig egybeesik.*

Mindezek alapján tehát kimondhatjuk a síkon a kovariogram-tételt.

2.17. Tétel *Minden síkbeli konvex testet eltolás és pontra való centrális tükrözés erejéig egyértelműen meghatároz a kovariogramja.*¹

A térben egyelőre a politópok esete tisztázott.

2.18. Tétel [4] *A $\mathbb{R}^3$ -beli konvex politópok meghatározhatók a kovariogramjukból.*

Tetszőleges dimenzióban igaz viszont, hogy a kovariogramjuk által meghatározott konvex testek „sokan” vannak.

2.19. Tétel [16] *Azok a testek, melyeket nem határoz meg a kovariogramja, Baire 1 kategóriájú halmazt alkotnak a konvex halmazok terében.*

A most következő tétel lényegében eljárást mutat arra, hogyan konstruáljunk 4-nél magasabb dimenzióban ellenpéldákat.

2.20. Tétel [3] *Legyenek $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^m$ konvex testek, és legyen $T \in \text{End}(\mathbb{R}^{n+m})$. Ekkor*

1. $T(\mathcal{K} \times \mathcal{L})$ és $T(\mathcal{K} \times (-\mathcal{L}))$ kovariogramja megegyezik.
2. Ha $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ egyike sem centrálszimmetrikus, akkor $T(\mathcal{K} \times (-\mathcal{L}))$ nem kapható meg eltolással vagy origóra való tükrözéssel $T(\mathcal{K} \times \mathcal{L})$ -ből.

Bizonyítás. 1. A 2.2. Tétel 6. pontjából azonnal következik, hogy ha két halmaz kovariogramja egyenlő, akkor azok lineáris transzformáltjainak kovariogramja is megegyezik. Ugyanez persze eltolásra és az origóra való tükrözésre is igaz, így feltehető, hogy $T = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+m}}$. A 2.2. Tétel 1. pontját és az F Fourier-transzformációt használva

$$\begin{aligned} |F\chi_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}}|^2 &= F\chi_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}} \overline{F\chi_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}}} = F\chi_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}}(\mathbf{x}) e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle} d\mathbf{x} \\ &= F\chi_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}} F\chi_{-(\mathcal{K} \times \mathcal{L})} = F(\chi_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}} * \chi_{-(\mathcal{K} \times \mathcal{L})}) = F(g_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}}) \end{aligned}$$

¹ Algoritmus is van arra, hogyan rekonstruáljunk egy konvex testet annak kovariogramjából. [2]

adódik. Legyenek $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ és $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ tetszőleges vektorok $\mathbb{R}^{n+m}$ -ben. Ekkor

$$\begin{aligned} F\chi_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}}(\mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}} e^{i\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle, (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \rangle} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \\ &= \int_{\mathcal{K}} e^{i\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1 \rangle} d\mathbf{x}_1 \int_{\mathcal{L}} e^{i\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_2 \rangle} d\mathbf{x}_2 = F\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_1) F\chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{u}_2), \end{aligned}$$

és analóg módon $F\chi_{\mathcal{K} \times (-\mathcal{L})}(\mathbf{u}) = F\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_1) F\chi_{-\mathcal{L}}(\mathbf{u}_2)$. Ezekből az

$$\begin{aligned} |F\chi_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}}(\mathbf{u})|^2 &= F\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_1) F\chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{u}_2) \overline{F\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_1)} \overline{F\chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{u}_2)} \\ &= F\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_1) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle} d\mathbf{x} \right] \overline{F\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_1)} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{-\mathcal{L}}(\mathbf{x}) e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle} d\mathbf{x} \right] \\ &= F\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_1) \overline{F\chi_{-\mathcal{L}}(\mathbf{u}_2)} \overline{F\chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_1)} F\chi_{-\mathcal{L}}(\mathbf{u}_2) = |F\chi_{\mathcal{K} \times (-\mathcal{L})}(\mathbf{u})|^2 \end{aligned}$$

adódik, mely éppen a bizonyítandó $Fg_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}} = |F\chi_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}}|^2 = |F\chi_{\mathcal{K} \times (-\mathcal{L})}|^2 = Fg_{\mathcal{K} \times (-\mathcal{L})}$ egyenlőséget adja.

2. Mivel $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ eltoltjainak szorzata $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ egy eltoltjának felelnek meg, így feltehető, hogy mindkét halmaz súlypontja az origóban van. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+m}$ vektor, melyre $\mathcal{K} \times \mathcal{L} = \mathcal{K} \times (-\mathcal{L}) + \mathbf{v}$ vagy $\mathcal{K} \times \mathcal{L} = -(\mathcal{K} \times (-\mathcal{L})) + \mathbf{v}$. A $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ test súlypontja nyilván szintén az origóban van, ezért $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Az indirekt feltevés két esete közül az első $\mathcal{L}$, míg a második $\mathcal{K}$ centrálszimmetriáját bizonyítja. $\square$

3. FEJEZET

Blaschke-féle integrálok

3.1. Definíció Legyen $\mathcal{K}$ egy konvex test a síkon. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén az

$$I_n(\mathcal{K}) := \int \sigma^n(G) dG$$

integrált, ahol $\sigma(G)$ a G egyenes által $\mathcal{K}$ -ból kimetszett húr hosszát jelöli, a $\mathcal{K}$ test n -edik momentumának nevezzük. Az $I(\mathcal{K}) := (I_n(\mathcal{K}))_{n=0}^\infty$ sorozatot *Blaschke-vektornak*, vagy *momentum-vektornak* hívjuk.

A formalizmust könnyítendő, mostantól ha csak egy konvex testről beszélünk, akkor azt a képletekben nem jelöljük, így például $I_n(\mathcal{K})$ helyett röviden csak I_n -t írunk.

Körlap Blaschke-vektora. Legyen $\mathcal{K} := \mathbb{B}_r^1$, és számítsuk ki a hozzá tartozó I_n számokat. A forgásszimmetria miatt elegendő egy rögzített irány szerint venni a húrhatványok integráljait, majd ezt π -vel megszorozni. Ezek szerint

$$I_n = \pi \int_{-r}^r \left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right)^n dx = \pi(2r)^n r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} \xi \, d\xi. \quad (x = r \sin \xi)$$

Az utóbbi, C_{n+1} -el jelölendő integrálra a

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \xi) \cos^{n-1} \xi \, d\xi = C_{n-1} - \frac{1}{n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} n \sin^2 \xi \cos^{n-1} \xi \, d\xi \\ &= C_{n-1} + \frac{1}{n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n \xi)' \sin \xi \, d\xi = C_{n-1} + \frac{1}{n} \left([\cos^n \xi \sin \xi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - C_{n+1} \right) \end{aligned}$$

összefüggés teljesül, ahol $n \geq 1$ esetén az utóbbi zárójeles kifejezés első tagja zéró. Átrendezéssel így a

$$C_{n+1} = \frac{n}{n+1} C_{n-1}$$

rekurziót kapjuk, ahol a kezdeti értékek $C_0 = \pi$ és $C_1 = 2$.

Ezt zárt alakra hozva, majd visszahelyettesítve, az

$$I_n(\mathbb{B}_r^1) = \frac{\pi}{2} \frac{n!!}{(n+1)!!} (2r)^{n+1} \begin{cases} 2, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \pi, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \quad (3.1)$$

eredmény adódik. △

Definiáljuk minden $m \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ számra a

$$J_m(\mathcal{K}) := \int_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{K}} |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^m d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2$$

integrálokat. Ezek szoros kapcsolatban vannak a $\mathcal{K}$ test momentumaival.

3.2. Tétel Minden $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ és $m \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ esetén

$$I_n = \frac{n(n-1)}{2} J_{n-3} \quad \text{és} \quad J_m = \frac{2}{(m+2)(m+3)} I_{m+3}. \quad (3.2)$$

Bizonyítás. Csak a második összefüggést bizonyítjuk, mert abból az első átrendezéssel adódik. Ehhez az 1.8. Tételben írottakat használjuk fel, tehát egy rögzített egyenesen integráljuk a pontpárokat, majd ezen egyenes szerint integrálunk. Így

$$\begin{aligned}
 J_m &= \int |t_2 - t_1|^{m+1} dt_1 dt_2 dG \\
 &= \int \left(\int_{a(G)}^{t_2} (t_2 - t_1)^{m+1} dt_1 + \int_{t_2}^{b(G)} (t_1 - t_2)^{m+1} dt_1 \right) dt_2 dG \\
 &= \frac{1}{m+2} \int \left(\int_{a(G)}^{b(G)} (t_2 - a(G))^{m+2} + (b(G) - t_2)^{m+2} dt_2 \right) dG \\
 &= \frac{1}{(m+2)(m+3)} \int (b(G) - a(G))^{m+3} dG,
 \end{aligned}$$

ahol $a(G)$ és $b(G)$ rendre a G által kimetszett húron fekvő határpontokhoz tartozó t paraméterek. $\square$

A (3.2) formulát felhasználva, a (3.1) eredmény alapján

$$J_m(\mathbb{B}_r^1) = \frac{\pi}{m+2} \frac{(m+1)!!}{(m+4)!!} (2r)^{m+4} \begin{cases} \pi, & \text{ha } m \text{ páros,} \\ 2, & \text{ha } m \text{ páratlan.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Blaschke vetette fel [8] a $\mathcal{K} \mapsto I(\mathcal{K})$ leképezés injektivitásának problémáját. Ennek érdekében születtek eredmények, melyek a $\mathcal{K}$ test jellemzőit kapcsolják össze az $I(\mathcal{K})$ Blaschke-vektorral, illetve ezen sorozat elemei közti összefüggéseket állítanak fel.

3.3. Tétel [10] Legyen $\mathcal{K}$ egy konvex test a síkban. Ekkor

$$1. \quad I_0 = |\partial\mathcal{K}|, \quad 2. \quad I_1 = \pi|\mathcal{K}|, \quad 3. \quad I_3 = 3|\mathcal{K}|^2.$$

Bizonyítás. 1. Legyen $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ a $\partial\mathcal{K}$ görbe ívhossz szerinti paraméterezése, $G(p, \varphi)$ pedig egy $\mathcal{K}$ -t metsző egyenes. Legyen $\mathbf{r}(s)$ egy olyan pont, ahol ez az egyenes metszi a határgörbét. Jelölje θ az ezen ponthoz tartozó támaszegyenes és a $G(p, \varphi)$ egyenes által zárt szöget. Ezen paraméterezés mellett az 1.9. Tétel szerint írhatjuk, hogy

$$I_0 = \int_{G \cap \mathcal{K} \neq \emptyset} dG = \frac{1}{2} \int_0^{|\partial\mathcal{K}|} \int_0^\pi \sin \theta d\theta ds = \int_0^{|\partial\mathcal{K}|} ds = |\partial\mathcal{K}|,$$

ahol az $\frac{1}{2}$ -es szorzót az indokolja, hogy kétszer számoltunk meg minden olyan egyenest, amely metszi $\mathcal{K}$ -t.

2. Ha $\sigma(p, \varphi)$ jelöli a $G = (p, \varphi)$ egyenes által kimetszett húr hosszát, akkor

$$I_1 = \int_0^\pi \left(\int_{-\infty}^\infty \sigma(p, \varphi) dp \right) d\varphi = \int_0^\pi |\mathcal{K}| d\varphi = \pi|\mathcal{K}|.$$

3. A (3.2) képlet felhasználásával adódik, hogy

$$I_3 = 3J_0 = 3 \int_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{K}} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 = 3 \int_{\mathbf{p}_2 \in \mathcal{K}} |\mathcal{K}| d\mathbf{p}_2 = 3|\mathcal{K}|^2. \quad \square$$

3.4. Tétel Ha $0 \leq m \leq n \leq p$ egészek, akkor

$$1. \quad I_{2m} I_{2n} \geq I_{m+n}^2, \quad 2. \quad I_m^{p-n} I_p^{n-m} \geq I_n^{p-m}.$$

Bizonyítás. 1. Az

$$I_{m+n}^2 = \left(\int \sigma^m \sigma^n dG \right)^2 \leq \left(\int \sigma^{2m} dG \right) \left(\int \sigma^{2n} dG \right) = I_{2m} I_{2n}$$

egyenlőtlégláncból adódik, melyben a Schwarz-egyenlőtlenséget használtuk.

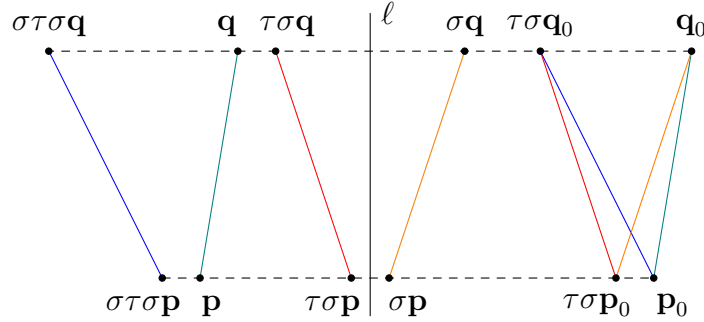
2. A Hölder-egyenlőtlenséget [28] alkalmazva írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sigma^{m \frac{p-n}{p-m}} \sigma^{p \frac{n-m}{p-m}} dG \\ &\leq \left(\int (\sigma^{m \frac{p-n}{p-m}})^{\frac{p-m}{p-n}} dG \right)^{\frac{p-n}{p-m}} \left(\int (\sigma^{p \frac{n-m}{p-m}})^{\frac{p-m}{n-m}} dG \right)^{\frac{n-m}{p-m}} = I_m^{\frac{p-n}{p-m}} I_p^{\frac{n-m}{p-m}}, \end{aligned}$$

mely éppen a bizonyítandó összefüggés. $\square$

3.5. Tétel *A $\mathcal{K}$ konvex test tetszőleges ℓ egyenesre való Steiner-féle szimmetrizálásával kapott $\sigma_\ell \mathcal{K}$ testre $J_m(\mathcal{K}) \geq J_m(\sigma_\ell \mathcal{K})$, továbbá egyenlőség pontosan akkor van, ha $\mathcal{K}$ -nak van ℓ -el párhuzamos szimmetriatengelye.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ a $\mathcal{K}$ konvex test két különböző pontja. Jelölje $\tau_\ell =: \tau$ az ℓ egyenesre való tükrözést. A tekintett pontokat és azok képeit a 3.1. ábra szemlélteti.



3.1. ábra

Toljuk el a szakaszokat párhuzamosan a $\mathbf{q}_0$ és $\tau\sigma\mathbf{q}_0$ pontokba úgy, hogy a $\overline{\mathbf{q}\sigma\tau\sigma\mathbf{q}}$ és $\overline{\sigma\mathbf{q}\tau\sigma\mathbf{q}}$ szakaszok egybeessenek. Ez azért tehető meg, mert a szimmetrizálási eljárás az ℓ -re merőleges húrok hosszát megtartja. Az így kapott szakaszok végpontjait $\cdot_0$ jelöli az ábrán. Azt látjuk, hogy a $\mathbf{q}_0\tau\sigma\mathbf{q}_0\tau\sigma\mathbf{p}_0$ egyenlő szárú háromszög és a $\mathbf{q}_0\tau\sigma\mathbf{q}_0\mathbf{p}_0$ háromszög területe megegyezik. Ezt kihasználva, az oldalhosszak hatványaira a

$$|\mathbf{q} - \mathbf{p}|^m + |\sigma\tau\sigma\mathbf{q} - \sigma\tau\sigma\mathbf{p}|^m \geq |\sigma\mathbf{q} - \sigma\mathbf{p}|^m + |\tau\sigma\mathbf{q} - \tau\sigma\mathbf{p}|^m$$

elemi egyenlőtlenség igaz, ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a két háromszög egybeesik, azaz $\tau\sigma\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0$.

A $\sigma\mathcal{K}$ test szimmetriája és a szimmetrizálás területtartása miatt adódnak a

$$d(\sigma\mathbf{p}) = d(\tau\sigma\mathbf{p}), \quad d\mathbf{p} = d(\sigma\mathbf{p}), \quad d\mathbf{p} = d(\tau\mathbf{p})$$

összefüggések. Ezekkel az állított egyenlőtlenséget a

$$\begin{aligned} 2J_m(\mathcal{K}) &= \int_{\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}} |\mathbf{q} - \mathbf{p}|^m d\mathbf{p} d\mathbf{q} + \int_{\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}} |\tau\mathbf{q} - \tau\mathbf{p}|^m d\overline{\mathbf{p}} d\overline{\mathbf{q}} \\ &= \int_{\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}} |\mathbf{q} - \mathbf{p}|^m + |\tau\mathbf{q} - \tau\mathbf{p}|^m d\mathbf{p} d\mathbf{q} \\ &\geq \int_{\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}} |\sigma\mathbf{q} - \sigma\mathbf{p}|^m + |\tau\sigma\mathbf{q} - \tau\sigma\mathbf{p}|^m d\mathbf{p} d\mathbf{q} \\ &= \int_{\sigma\mathcal{K}} \int_{\sigma\mathcal{K}} |\sigma\mathbf{q} - \sigma\mathbf{p}|^m + |\tau\sigma\mathbf{q} - \tau\sigma\mathbf{p}|^m d(\sigma\mathbf{p}) d(\sigma\mathbf{q}) = 2J_m(\sigma\mathcal{K}) \end{aligned}$$

levezetés igazolja.

Végül egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{K}$ minden ℓ -re merőleges húrjának középpontja egy ℓ -el párhuzamos egyenes mentén fekszik. $\square$

Iménti lemmánk azonnali következménye, hogy ha $J_m(\mathcal{K})$ minimális, akkor $\mathcal{K}$ csak kör lehet, hiszen ellenkező esetben lenne olyan irány, mellyel nincs $\mathcal{K}$ -nak párhuzamos szimmetriatengelye, de arra elvégezve a szimmetrizálást $J_m(\mathcal{K}) > J_m(\sigma\mathcal{K})$ állna fenn, ami ellentmond a minimalitásnak.

Utóbbi lemmánk alapján a J_m integrálok jól becsülhetők.

3.6. Lemma *Tetszőleges $\mathcal{K}$ konvex testre teljesül, hogy*

$$J_m(\mathcal{K}) \geq \frac{\pi}{m+2} \frac{(m+1)!!}{(m+4)!!} \left(\frac{4|\mathcal{K}|}{\pi} \right)^{\frac{m+4}{2}} \begin{cases} \pi, & \text{ha } m \text{ páros,} \\ 2, & \text{ha } m \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Amennyiben egyenlőség van, akkor $\mathcal{K}$ egy kör.

Bizonyítás. Az 1.11. Tétel alapján bizonyítunk. A jelölés könnyítése érdekében az abban szereplő sorozat elemeit jelölje rendre $(\mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots)$ és legyen $\mathcal{C} := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}_n$.

A 3.5. Tétel miatt

$$J_m(\mathcal{K}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} J_m(\mathcal{K}_n) = J_m(\mathcal{C}).$$

Ebből a (3.3) formula adja az állítást. $\square$

3.7. Tétel (Általánosított izoperimetrikus egyenlőtlenség.) *Tetszőleges $\mathcal{K}$ konvex testre*

$$I_n \geq \frac{n!!}{(n+1)!!} \frac{2^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}{\pi^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} I_1^{\frac{n+1}{2}}.$$

Bizonyítás. 1. Az $n = 0$ esetben $I_0^2 \geq 4I_1$ a bizonyítandó, ami a klasszikus izoperimetrikus egyenlőtlenség.

Legyen $\mathbf{r}(s)$ a $\partial\mathcal{K}$ görbe egy ívhossz szerinti paraméterezése, illetve vegyünk ezt metsző G és G' egyeneseket. Legyen ezek egy-egy metszéspontja a görbével $\mathbf{r}(s)$ és $\mathbf{r}(s')$. Jelölje ezekben a pontokban rendre θ és θ' ezen egyeneseknek a megfelelő pontbeli támaszegyenessel bezárt szögét. Legyen továbbá rendre σ és σ' az egyenesek által $\mathcal{K}$ -ból kimetszett húr hossza. Tekintsük a nemnegatív

$$A = \int_0^\pi \int_0^{|\partial\mathcal{K}|} \int_0^\pi \int_0^{|\partial\mathcal{K}|} (\sigma \sin \theta' - \sigma' \sin \theta)^2 ds d\theta ds' d\theta' \quad (3.4)$$

integrált. Az 1.9. Tétel szerint $dG = \sin \theta ds \wedge d\theta$, és $dG' = \sin \theta' ds' \wedge d\theta'$, amivel

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \int_0^{|\partial\mathcal{K}|} \sigma^2 ds d\theta \int_0^\pi \int_0^{|\partial\mathcal{K}|} \sin^2 \theta' ds' d\theta' + \\ &+ \int_0^\pi \int_0^{|\partial\mathcal{K}|} \sigma'^2 ds' d\theta' \int_0^\pi \int_0^{|\partial\mathcal{K}|} \sin^2 \theta ds d\theta - 8 \int_{G \cap \mathcal{K} \neq \emptyset} \left(\int_{G' \cap \mathcal{K} \neq \emptyset} \sigma \sigma' dG \right) dG' \end{aligned}$$

adódik, ahol a 8-as szorzó abból ered, hogy a (3.4) integrálban minden egyenest kétszer számoltunk meg.

Tekintsünk a $\partial\mathcal{K}$ görbére most úgy, mint az $(x(s_0), y(s_0))$ pontból a $(\sigma(s), \theta(s))$ polárkoordinátával megadott függvényre. Ekkor a görbe által körbezárt terület ismert képlete szerint $\int_0^\pi \sigma^2 d\theta = 2|\mathcal{K}|$. Figyelembe véve még az elemi $\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$ formulát is, adódik, hogy

$$A = 2\pi |\partial\mathcal{K}|^2 |\mathcal{K}| - 8 \int_{G \cap \mathcal{K} \neq \emptyset} \sigma dG \int_{G' \cap \mathcal{K} \neq \emptyset} \sigma' dG',$$

amibe a 3.3. Tétel 2. formuláját helyettesítve az $A = 2\pi|\mathcal{K}|(|\partial\mathcal{K}|^2 - 4\pi|\mathcal{K}|)$ eredményre jutunk. Minthogy $A \geq 0$, ez igazolja az izoperimetrikus egyenlőtlenséget.

2. Az $n = 1$ eset triviális.

3. Legyen most $n \geq 2$ rögzített, természetes szám. Ekkor a (3.2) formula, a 3.6. Lemma és a 3.3. Tétel 2. pontja alapján

$$\begin{aligned} I_n(\mathcal{K}) &= \frac{n(n-1)}{2} J_{n-3}(\mathcal{K}) \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2} \frac{\pi}{n-1} \frac{(n-2)!!}{(n+1)!!} \frac{2^{n+1}}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} |\mathcal{K}|^{\frac{n+1}{2}} \begin{cases} 2, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \pi, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \\ &= \frac{n!!}{(n+1)!!} \frac{2^n}{\pi^n} I_1^{\frac{n+1}{2}}(\mathcal{K}) \begin{cases} 2, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \pi, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

3.8. Tétel Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \frac{2^{n+i} I_{n+i}}{I_0^{n+i}} \geq 0.$$

Bizonyítás. Legyen $M := \sup_G \sigma(G)$ a $\mathcal{K}$ leghosszabb húrja, melyre a háromszög-egyenlőtlenség miatt $M < \frac{|\partial\mathcal{K}|}{2}$ teljesül. Tekintsük most a $\bar{\sigma} := \frac{\sigma}{s}$ véletlen változót, ahol $s \geq M$ tetszőleges valós szám. Ekkor nyilván minden G egyenesre $0 \leq \bar{\sigma}(G) \leq 1$. Másfelől, ha $F_{\bar{\mathcal{K}}}$ jelöli a $\bar{\sigma}$ véletlen változó eloszlásfüggvényét, akkor ennek momentumai $m_n := \int_0^1 x^n dF_{\bar{\mathcal{K}}} = \int_0^M \left(\frac{x}{s}\right)^n dF_{\mathcal{K}} = \frac{I_n(\mathcal{K})}{s^n}$.

Mivel $I_0(\mathcal{K}) = |\partial\mathcal{K}|$, így az $s := \frac{I_0(\mathcal{K})}{2}$ választás megfelelő. Az ezen paraméterrel előállított $\bar{\sigma}$ -ra az 1.15. Tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}_0$ esetén $\Delta^k m_i = \Delta^k \frac{2^i I_i(\mathcal{K})}{I_0^i(\mathcal{K})} \geq 0$, amely éppen a bizonyítandó. $\square$

3.1. Húrhosszak eloszlása

Legyen $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ egy konvex test. Jelölje $F_{\mathcal{K}}(x)$ a $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ húrhossz-eloszlásfüggvényét, mely tehát azt a valószínűséget adja meg, hogy egy véletlen egyenes legfeljebb x hosszúságú húr metsz ki $\mathcal{K}$ -ből.

A következőkben néhány elemi test húrhossz-eloszlásfüggvényének sűrűségfüggvényét közöljük [9, (1.66)-(1.68)] alapján.

Ha $\mathcal{K}$ egy r -sugarú körlap, akkor (3.3) alapján

$$f_{\mathcal{K}}(x) = \frac{x}{2r\sqrt{4r^2 - x^2}}.$$

Amennyiben $\mathcal{K}$ egy olyan ellipszis, melynek fél nagytengelye a , fél kistengelye pedig b , akkor

$$f_{\mathcal{K}}(x) = 3\pi \frac{|\mathcal{K}|}{|\partial\mathcal{K}|} abx \int_{\max\{x, 2b\}}^{2a} \frac{dy}{y^3 \sqrt{y^2 - 4b^2} \sqrt{y^2 - x^2} \sqrt{4a^2 - y^2}}.$$

Tekintsünk most egy olyan téglalapot, melynek hosszabbik oldala a , rövidebbik oldala pedig b . Ekkor [15, 14]

$$f_{\mathcal{K}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a+b}, & \text{ha } 0 \leq x \leq b, \\ \frac{ab^2}{x^2(a+b)\sqrt{x^2-b^2}}, & \text{ha } b < x \leq a, \\ \frac{ab}{x^2(a+b)} \left(\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{x^2-b^2}} \right) - \frac{1}{a+b}, & \text{ha } a < x \leq \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Ha $\mathcal{K}$ egy a -oldalú szabályos háromszög, akkor [27, 14]

$$f_{\mathcal{K}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right), & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a, \\ -\frac{1}{x} \sqrt{1 - \frac{3a^2}{4x^2}} + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}a}{2x} \right), & \text{ha } \frac{\sqrt{3}}{2}a < x \leq a. \end{cases}$$

Ha $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^n$ egy egységvektor, akkor azt az $F_{\mathcal{K},\mathbf{v}}(x)$ függvényt, mely annak valószínűségét adja meg, hogy egy $\mathbf{v}$ irányvektorú véletlen egyenes $\mathcal{K}$ -ból legfeljebb x hosszú húrt metsz ki, a $\mathcal{K}$ test $\mathbf{v}$ irány szerinti húrhossz-eloszlásának nevezzük.

Matheron vette észre [22, 86. oldal], hogy egy $\mathcal{K}$ konvex test $g_{\mathcal{K}}$ kovariogramjának $\mathbf{v}$ iránymenti deriváltja a $\mathcal{K}$ test $\mathbf{v}$ -val párhuzamos húrjai hosszának eloszlását adja meg.

3.9. Tétel *Tetszőleges $\mathcal{K}$ konvex test $g_{\mathcal{K}}$ kovariogramjából, annak bármely $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ irány szerinti $F_{\mathcal{K},\mathbf{v}}$ húrhossz-eloszlása kiszámítható. Az irányonkénti $F_{\mathcal{K},\mathbf{v}}$ húrhossz-eloszlásfüggvények ismeretében előállítható az $F_{\mathcal{K}}$ húrhossz-eloszlásfüggvénye, abból pedig kiszámítható az $I(\mathcal{K})$ Blaschke-vektor.*

Bizonyítás. Valóban, egy rögzített $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ vektor esetén vegyük a $\mathbf{v}^\perp$ hipersík egy véletlen $\mathbf{x}$ pontját $P_{\mathbf{v}^\perp}(\mathcal{K})$ -n egyenletes eloszlással. Jelölje $\ell_{\mathcal{K},\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ az $\mathbf{x}$ ponton átmenő $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes által meghatározott húr hosszát, azaz $\ell_{\mathcal{K},\mathbf{v}}(\mathbf{x}) := \lambda_1(\mathcal{K} \cap \{\mathbf{x} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\})$. Ekkor nyilván fennáll a

$$P(\ell_{\mathcal{K},\mathbf{v}} \geq l) = \frac{\gamma_{\mathcal{K}}(l, \mathbf{v})}{\gamma_{\mathcal{K}}(0, \mathbf{v})}$$

összefüggés, melyből a 2.3. Tétel alapján

$$F_{\mathcal{K},\mathbf{v}}(l) = 1 - \frac{\partial_{\mathbf{v}} g_{\mathcal{K}}(l\mathbf{v})}{\partial_{\mathbf{v}} g_{\mathcal{K}}(\mathbf{0})}. \quad (3.5)$$

Nyilván $F_{\mathcal{K}}(x) = \int_{\mathbb{S}^1} F_{\mathcal{K},\mathbf{v}}(x) d\mathbf{v}$, a transzformációtétel [11, 114. o.] alkalmazásával pedig

$$I_n(\mathcal{K}) = \int \sigma^n(G) dG = \int_{\mathbb{R}} x^n dF_{\mathcal{K}}(x). \quad \square$$

Az eddigiek alapján

$$\mathcal{K} \implies g_{\mathcal{K}} \implies \{F_{\mathcal{K},\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}\} \implies F_{\mathcal{K}} \implies I(\mathcal{K}),$$

ahol $x \implies y$ azt jelöli, hogy x ismeretében y meghatározható.

Következő tételünkben ennek megfordíthatóságát tisztázzuk.

3.10. Tétel

$$\mathcal{K} \iff g_{\mathcal{K}} \iff \mathbb{S}^{n-1} \ni \mathbf{v} \mapsto F_{\mathcal{K},\mathbf{v}} \implies F_{\mathcal{K}} \iff I(\mathcal{K}).$$

Bizonyítás. $F_{\mathcal{K}}$ előállíthatósága a Blaschke-vektorból a Hausdorff-féle momentum-probléma unicitás része.

A húrhossz-eloszlásból nyilván nem állítható vissza az irányonkénti húrhossz-eloszlás. Ez még poligonokra sem igaz, melyet a 3.11. Tétel igazol.

Most tegyük fel, hogy ismerjük $F_{\mathcal{K},\mathbf{v}}$ -t minden $\mathbf{v}$ egységvektor esetén. Mivel

$$g_{\mathcal{K}}(s\mathbf{v}) = \int_0^s \partial_{\mathbf{v}} g_{\mathcal{K}}(t\mathbf{v}) dt + |\mathcal{K}|, \quad (3.6)$$

a (3.5) formula alapján

$$g_{\mathcal{K}}(s\mathbf{v}) = \int_0^s d_{\mathbf{v}} g_{\mathcal{K}}(\mathbf{0})(1 - F_{\mathcal{K},\mathbf{v}}(t)) dt + |\mathcal{K}|.$$

Figyeljük meg, hogy $F_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}$ -ből kiolvasható a szélesség, mégpedig a $\Delta_{\mathcal{K}}(\mathbf{v}) := \inf\{\sigma : F_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}(\sigma) = 1\}$ összefüggésén keresztül.

Mivel $|\mathcal{K}| = \frac{1}{\pi} I_1(\mathcal{K}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} x dF_{\mathcal{K}}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} x dF_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}(x) d\mathbf{v}$, így

$$0 = g_{\mathcal{K}}(\Delta_{\mathcal{K}}(\mathbf{v})\mathbf{v}) = \int_0^{\Delta_{\mathcal{K}}(\mathbf{v})} \partial_{\mathbf{v}} g_{\mathcal{K}}(\mathbf{0})(1 - F_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}(t)) dt + |\mathcal{K}|,$$

melyből átrendezéssel

$$\partial_{\mathbf{v}} g_{\mathcal{K}}(\mathbf{0}) = -\frac{|\mathcal{K}|}{\int_0^{\Delta_{\mathcal{K}}(\mathbf{v})} 1 - F_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}(t) dt},$$

vagyis

$$g_{\mathcal{K}}(s\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{\int_0^s 1 - F_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}(t) dt}{\int_0^{\Delta_{\mathcal{K}}(\mathbf{v})} 1 - F_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}(t) dt} \right) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} x dF_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}(x) d\mathbf{v}.$$

A kovariogramból $\mathcal{K}$ meghatározása a kovariogram probléma megoldása, melyről a 2. szakaszban volt szó. $\square$

3.11. Tétel [20] *Van két különböző poligon, melyek húr hossz-eloszlása megegyezik.*

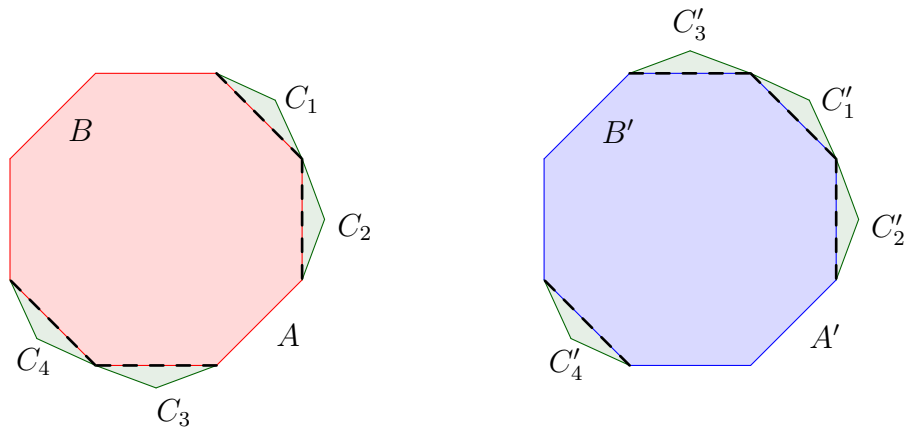
Bizonyítás. A továbbiakban használni fogjuk az $(E_1, E_2, \dots) =: \mathbf{E}$ vektorjelölést, mely vektor elemei halmazok. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{F}$ vektorok egybevágóak, ha létezik olyan egybevágósági transzformáció, mely ezen vektorok azonos indexű elemei közt egybevágóságot biztosít. Ezt $\mathbf{E} \cong \mathbf{F}$ jelöli.

Az ellenpéldául szolgáló

$$\mathcal{A} = B \cup \left(\bigcup_{i=1}^n C_i \right) \quad \text{és} \quad \mathcal{A}' = B' \cup \left(\bigcup_{i=1}^n C'_i \right)$$

halmazok előállításáról (ahol B és B' lehetnek akár üresek is), a következőket tételezzük fel:

1. A $\{B, C_1, C_2, \dots, C_n\}$ és a $\{B', C'_1, C'_2, \dots, C'_n\}$ halmazrendszerek elemei diszjunktak.
2. Létezik olyan $(i, j) \mapsto (i', j')$ bijekció $(1 \leq i < j \leq n)$, hogy $(B, C_i, C_j) \cong (B', C'_{i'}, C'_{j'})$.
3. Tetszőleges G egyenes a $\{C_1, C_2, \dots\}$ halmaznak legfeljebb két elemét metszi. Ugyanez teljesül a $\{C'_1, C'_2, \dots\}$ halmazra is.



3.2. ábra. Mallows és Clark példájának speciális esete, melyben a B és B' szabályos 8-szögekhez egyenlő szárú háromszögeket ragasztottunk.

A bizonyítás lépéseit a 3.2. ábra példáján követjük végig.

A valószínűségelméleti eszközök használhatósága érdekében vegyünk egy tetszőleges $\mathcal{R}$ halmazt, mely tartalmazza B -t és B' -t is, a problémát pedig vizsgáljuk az egyenesek $\Gamma := \{G : \sigma_{\mathcal{R}}(G) > 0\}$ halmazára megszorítva úgy, hogy a mértéket Γ (pozitív és véges) mértékével normáljuk.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Bármely $\mathbf{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$, $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ és F halmazok esetén jelölje $S_F^x(\mathbf{D}; \mathbf{E}) = S_F^x(D_1, D_2, \dots; E_1, E_2, \dots)$ azon G egyenesek halmazát, melyekre $\sigma_F(G) \leq x$, $\sigma_{D_i}(G) > 0$ és $\sigma_{E_j}(G) = 0$ minden $i, j \in \mathbb{N}$ esetén. Fontos megjegyezni, hogy a definícióban a $\mathbf{D}$ és $\mathbf{E}$ vektorok hossza esetleg nulla. Világos, hogy $\{G : \sigma_{\mathcal{A}}(G) \leq x\} = S_{\mathcal{A}}^x(;;)$. Bizonyítjuk, hogy

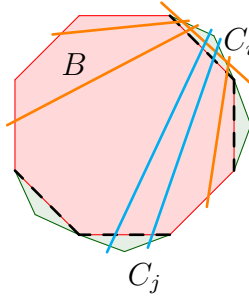
$$P(S_{\mathcal{A}}^x(;;)) = P(S_{\mathcal{A}'}^x(;;)),$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol P a fentebb elkészített valószínűségi mérték a Γ halmazon. A továbbiakban x -et rögzítjük, ezért S felső indexében nem jelöljük.

Legyen $C := \bigcup_{i=1}^n C_i$ és $C' := \bigcup_{i=1}^n C'_i$.

Tekintsük azon egyeneseket, melyek belemetszenek C -be. Ekkor a 3. feltétel alapján minden $i \in \mathbb{N}$ esetén

$$S_{B \cup C_i}(C_i;) \cong \left(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} S_{B \cup C_i}(C_i, C_j;) \right) \cup S_{B \cup C_i}(C_i; C \setminus C_i). \quad (3.7)$$



$\mathcal{A} = B \cup C$ miatt nyilván

$$S_{B \cup C_i}(C_i; C \setminus C_i) \cong S_{\mathcal{A}}(C_i; C \setminus C_i). \quad (3.8)$$

Analóg összefüggések érvényesek $\mathcal{A}'$ -re is, továbbá a 2. feltétel miatt

$$S_{B \cup C_i}(C_i;) \cong S_{B' \cup C'_i}(C'_i;), \quad (3.9)$$

és

$$S_{B \cup C_i}(C_i, C_j;) \cong S_{B' \cup C'_i}(C'_i, C'_j;). \quad (3.10)$$

Ezek felhasználásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}}(C_i; C \setminus C_i) &\stackrel{(3.8)}{\cong} S_{B \cup C_i}(C_i; C \setminus C_i) \stackrel{(3.7)}{\cong} S_{B \cup C_i}(C_i;) \setminus \left(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} S_{B \cup C_i}(C_i, C_j;) \right) \\ &\stackrel{(3.9)}{\cong} S_{B' \cup C'_i}(C'_i;) \setminus \left(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} S_{B' \cup C'_i}(C'_i, C'_j;) \right) \\ &\stackrel{(3.10)}{\cong} S_{B' \cup C'_i}(C'_i; C' \setminus C'_i) \stackrel{(3.8)}{\cong} S_{\mathcal{A}'}(C'_i; C' \setminus C'_i), \end{aligned}$$

tehát

$$P(S_{\mathcal{A}}(C_i; C \setminus C_i)) = P(S_{\mathcal{A}'}(C'_i; C' \setminus C'_i)). \quad (3.11)$$

A 2. feltétel alapján

$$S_{\mathcal{A}}(C_i, C_j;) \cong S_{\mathcal{A}'}(C'_{i'}, C'_{j'};),$$

a 3. feltétel szerint pedig

$$S_{\mathcal{A}}(C;) \cong \left(\bigcup_{i=1}^n S_{\mathcal{A}}(C_i; C \setminus C_i) \right) \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} S_{\mathcal{A}}(C_i, C_j;) \right).$$

Utóbbi analógja persze fennáll $\mathcal{A}'$ -re is. Az iméntiek és (3.11) összevetésével kapjuk, hogy

$$P(S_{\mathcal{A}}(C;)) = P(S_{\mathcal{A}'}(C';)). \quad (3.12)$$

Most azon egyenesekkel foglalkozunk, melyek B -be és C -be is belemetszenek. Az előbb tárgyalt esethez hasonlóan, ezúttal is egy felbontást írunk fel, mely nyilván $\mathcal{A}'$ -re is elvégezhető.

$$S_B(B, C_i;) \cong \left(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} S_B(B, C_i, C_j;) \right) \cup S_B(B, C_i; C \setminus C_i).$$

Egyfelől a megfelelő indexekre a $(B, C_i) \cong (B', C'_{i'})$ egybevágóságból következik, hogy $S_B(B, C_i;) \cong S_{B'}(B', C'_{i'};)$. Másfelől ismét a 2. feltétel adja, hogy a megfelelő indexekre $S_B(B, C_i, C_j;) \cong S_{B'}(B', C'_{i'}, C'_{j'};)$. Ezen három összefüggést egybeolvasztva, az előző esetben tárgyalthoz hasonló

$$P(S_B(B, C_i; C \setminus C_i)) = P(S_{B'}(B', C'_{i'}; C' \setminus C'_{i'})) \quad (3.13)$$

összefüggés adódik. Szintén az első esethez hasonlóan felírható, hogy

$$S_B(B, C;) = \left(\bigcup_{i=1}^n S_B(B, C_i; C \setminus C_i) \right) \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} S_B(B, C_i, C_j;) \right). \quad (3.14)$$

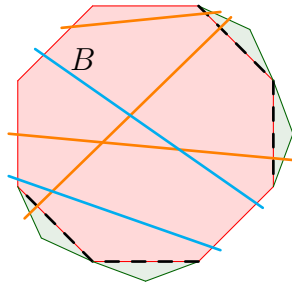
Analóg eredmény igaz $\mathcal{A}'$ -re, mely a (3.13) és (3.14) összefüggésekkel együtt a

$$P(S_B(B, C;)) = P(S_{B'}(B', C';)) \quad (3.15)$$

egyenlőségre vezet.

Az utolsó vizsgálandó eset a B -be metsző egyenesekre vonatkozik. Nyilván $B \cong B'$ miatt $S_B(B;) \cong S_{B'}(B';)$, továbbá

$$S_B(B;) \cong S_B(B, C;) \cup S_B(B; C). \quad (3.16)$$



Azonnal látszik az is, hogy $S_B(B; C) \cong S_{\mathcal{A}}(B; C)$. Ugyanezek analógonjai persze $\mathcal{A}'$ -re is érvényesek. Ezekből, valamint a (3.15) és (3.16) formulákból kapjuk, hogy

$$P(S_{\mathcal{A}}(B; C)) = P(S_{\mathcal{A}'}(B'; C')).$$

Világos továbbá az is, hogy

$$S_{\mathcal{A}} \cong S_{\mathcal{A}}(C;) + S_{\mathcal{A}}(B; C) \quad \text{és} \quad S_{\mathcal{A}'} \cong S_{\mathcal{A}'}(C';) + S_{\mathcal{A}'}(B'; C').$$

Eddigi formuláinkat összekapcsolva a

$$\begin{aligned} P(S_{\mathcal{A}}(;)) &= P(S_{\mathcal{A}}(C;)) + P(S_{\mathcal{A}}(B; C)) \\ &= P(S_{\mathcal{A}'}(C';)) + P(S_{\mathcal{A}'}(B'; C')) = P(S_{\mathcal{A}'}(;)) \end{aligned}$$

egyenlőséglánchoz jutunk, mely bizonyítja állításunkat. $\square$

Jegyezzük meg, hogy a 3.9. Tétel értelmében ebből következik, hogy a Blaschke-vektor sem határozza meg a testet.

3.12. Definíció A $\mathcal{K}$ konvex test $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos húrjai hosszának $F_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}$ eloszlását a $\mathcal{K}$ test $\mathbf{v}$ irányú (párhuzamos) sztochasztikus röntgenképének hívjuk.

Felmerül a kérdés, hogy esetleg véges sok sztochasztikus röntgenkép elegendő a $\mathcal{K}$ konvex test meghatározására. P.C. Hammer [17] hasonló kérdésére R. J. Gardner és P. McMullen [13] bizonyította, hogy $\ell_{\mathcal{K}, \mathbf{v}}$ ismerete négy jól megválasztott univerzális vektorra már elegendő bármely konvex $\mathcal{K}$ tartomány meghatározására.

További vizsgálat tárgya lehet, hogy leírjuk azon g függvényeket, melyek valamely $\mathcal{K}$ konvex tartomány $g_{\mathcal{K}}$ kovariogramjával egyeznek meg. Más szóval a $\mathcal{K} \mapsto g_{\mathcal{K}}$ leképezés képterének jellemzése lehet cél. Ebben a Blaschke-vektorra ismert leírások (lásd e fejezet elején) jelenthetik az első lépést.

Jelölések és konvenciók

A dolgozatban végig az $\mathbb{R}^n$ szokásos koordinátázásával dolgozunk, ezért nem különböztetjük meg a pontot, és a pontba mutató helyvektort. A dolgozatban mindig oszlopvektorokat használunk.

Amikor a síkon dolgozunk, használjuk az $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ jelölést az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ oszlopvektorok egymás mellé írásával kapott mátrixra.

Vegyük észre, hogy eszerint $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^\perp \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{m} \rangle = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m})$, ahol $\mathbf{m}$ a sík egy megfelelő egységnyi normálisa, továbbá $\mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} \times \mathbf{m}$ pedig $\mathbf{L}\mathbf{v}$, ahol $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\frac{\pi}{2}$ -vel való megfelelő irányú elforgatás mátrixa.

Ha $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ és $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, akkor $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}^T := \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$.

$\mathbb{S}_r^n := r\mathbb{S}^n$, ahol $\mathbb{S}^n$ jelöli az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér egységgömbjének felületét. $\mathbb{B}_r^n := r\mathbb{B}^n$, ahol $\mathbb{B}^n$ jelöli $\mathbb{R}^n$ egységgömbjét. Az $\mathbb{R}^n$ tér önmagára való homomorfizmusait $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ jelöli.

A nemnegatív egészek halmazára az $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ jelölést használjuk.

Egy $\mathcal{K}$ halmaz határát $\partial\mathcal{K}$, területét $|\mathcal{K}|$, kerületét $|\partial\mathcal{K}|$ jelöli.

Egy $\mathcal{H}$ halmaz indikátorfüggvényét $\chi_{\mathcal{H}}$ -val jelöljük. Ennek mintájára bevezetjük a $\chi(P)$ jelölést is, mely egy adott P logikai kifejezés teljesülése esetén 1-et, különben pedig 0-át ad eredményül. Így tehát egy $\mathcal{H}$ halmazra $\chi_{\mathcal{H}}(x) = \chi(x \in \mathcal{H})$.

Egy f függvény $\text{supp}(f)$ tartóján azon pontok halmazának lezártját értjük, melyekre f nem nulla.

Az $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ függvények konvolúcióján az

$$(f * g)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y}$$

függvényt értjük.

Egy f függvény $\mathbf{v}$ vektor szerinti iránymenti deriváltját $\partial_{\mathbf{v}}f$ jelöli.

Ha $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \partial\mathcal{K}$ különböző pontok, akkor $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]_{\mathcal{K}}$ jelöli $\partial\mathcal{K}$ -nak azt az óramutató járásával ellentétesen irányított ívét, melynek kezdőpontja $\mathbf{p}$, végpontja pedig $\mathbf{q}$. (Kerek zárójelet használunk, amikor valamelyik végpontot nem tekintjük a szóban forgó ív részének.)

Egy $\mathcal{H}$ ponthalmaz konvex burkát $\text{conv}\mathcal{H}$ jelöli.

Akkor mondjuk, hogy két síktartomány határgörbéi transzverzálisan metszik egymást, ha a metszéspont egy kis környezetében mindkét görbének van olyan pontja, mely a másik tartomány belsejébe, és olyan, amely a másik tartomány külsejébe esik.

A dolgozatban alapvető szerepet játszik egy véletlen G egyenes által egy rögzített $\mathcal{K}$ konvex testből kimetszett húr hossza. Azt a véletlen változót, mely ezt a leképezést létesíti, $\sigma_{\mathcal{K}}$ -val jelöljük. Ezen véletlen változó $F_{\mathcal{K}}$ eloszlásfüggvényét $\mathcal{K}$ húrhoroz-eloszlásfüggvényének nevezzük.

Irodalomjegyzék

- [1] G. Averkov és G. Bianchi, *Confirmation of Matheron's Conjecture on the Covariogram of a Planar Convex Body*, *J. Europe Math. Soc.*, **11** (2009), 118–1202.
- [2] G. Bianchi, R. J. Gardner és M. Kiderlen, Phase retrieval for characteristic functions of convex bodies and reconstruction from covariograms, *J. Amer. Math. Soc.*, **24** (2011), 293–343.
- [3] G. Bianchi, Matheron's conjecture for the covariogram problem, *J. London Math. Soc.*, **29** (2004) 1–18.
- [4] G. Bianchi, The covariogram determines three-dimensional convex polytopes, *Adv. Math.*, **220** (2009), 1771–1808.
- [5] G. Bianchi, F. Segala, A. Volčič, *The solution of the covariogram problem for plane $\mathcal{C}_+^2$ convex bodies*, *J. Differential Geom.* **60** (2002), no. 2, 177–198. MR 2003h:52001
- [6] W. Blaschke, *"Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises"*, *Math. Z.* **1** (1918), 52–57.
- [7] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Leipzig, Verlag von Veit & Comp., 1916.
- [8] W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, 3rd. ed. Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1955.
- [9] S. N. Chiu, D. Stoyan, W. S. Kendall és J. Mecke, *Stochastic Geometry and its Applications*, 3. kiadás, Wiley, 2013.
- [10] M. W. Crofton, *Probability, Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., Vol. 19(1885), pp. 768–788.
- [11] Sándor Csörgő, *Fejezetek a valószínűségelméletből*, Polygon Könyvtár, 2010.
- [12] R. J. Gardner, *Geometric Tomography*, 2. kiadás, Cambridge University Press, 2006.
- [13] R. J. Gardner és P. McMullen, *On Hammer's X-ray problem*, *J. London Math. Soc.*, **21**:2 (1980), 171–175.
- [14] W. Gille, *Particles, Puzzles and Scattering Patterns - Mysteries of Small-Angle Scattering*, (2014) (megjelenés alatt)
- [15] W. Gille, *The chord length distribution on parallelepipeds with their limiting cases*, *Exp. Technik Phys.*, **36** (1988), 197–208.
- [16] P. Goodey, R. Schneider és W. Weil, On the Determination of Convex Bodies by Projection Functions, *Bull. London Math. Soc.*, **29** (1997), 82–88.
- [17] P. C. Hammer, Problem 2., *Proc. of Symposium in Pure Math.*, vol. VII.: Convexity, Amer. Math.Soc., (1963)
- [18] Daniel A. Klain és Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability*, Cambridge University Press, 1997.
- [19] Daniel A. Klain, *Steiner symmetrization using a finite set of directions*, *Adv. Appl. Math.*, **48**:2 (2012), 340–353. DOI: 10.1016/j.aam.2011.09.004
- [20] C. L. Mallows és J. M. C. Clark, *Linear-Intercept Distributions Do Not Characterize Plane Sets*, *J. Appl. Probab.*, **7**(1970), 240–244.
- [21] G. Matheron, *Le covariogramme géométrique des compacts convexes des $\mathbb{R}^2$* , Centre de Géostatistique, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. 1986.
- [22] G. Matheron, *Random sets and integral geometry*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1975.
- [23] M. Meyer, S. Reisner, M. Schmuckenschläger, *The volume of the intersection of a convex body with its translates*, *Mathematika* **40** (1993), no. 2, 278–289. MR 94m:52009
- [24] W. Nagel, *Orientation-dependent chord length distributions characterize convex polygons.*, *J. Appl. Prob.*, **30**, 730–736 (1993)
- [25] Luis A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley Publishing Company, 1976.
- [26] J. A. Shohat és J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1943.
- [27] R. Sulanke, *"Die Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren," Math. Nachr.* **23** (1961), 51–74.

- [28] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Hölder's_inequality
- [29] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Moment_problem
- [30] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_cap#Hyperspherical_cap

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, dr. Kurusa Árpádnak, aki türelmes magyarázataival és precíz útmutatásával hatalmas segítséget nyújtott jelen dolgozat elkészítésében.

Hálával tartozom továbbá családomnak és barátaimnak a rengeteg támogatásért, és hogy mindvégig mellettem álltak.

Nyilatkozat

Alulírott Zombory Tibor (ZOTSAAT.SZE) kijelentem, hogy a diplomamunkámban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2015. május 4.

.....

Zombory Tibor