

Egyenessereg burkológörbájének meghatározása

című szakdolgozat ismertetése

Vígh-Mácsai Zsanett

SZTE Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

Témavezető: dr. Kurusa Árpád

2010. május 26.

A dolgozatban egyparaméteres egyenessereg burológörbéivel foglalkozunk. A vizsgált alapprobléma a következő: adott egy síkgörbe érintőinek egyparaméteres serege. Határozzuk meg a síkgörbe nyomát!

A dolgozatban egyparaméteres egyenessereg burológörbéivel foglalkozunk. A vizsgált alapprobléma a következő: adott egy síkgörbe érintőinek egyparaméteres serege. Határozzuk meg a síkgörbe nyomát!

Definíció (Egyparaméteres egyenessereg)

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, az

$$F: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, c) \mapsto F(x, y, c)$$

pedig olyan függvény, amely harmadik változója szerint folytonosan differenciálható, valamint minden rögzített c_0 esetén $F(x, y, c_0) = 0$ egy egyenes egyenlete.

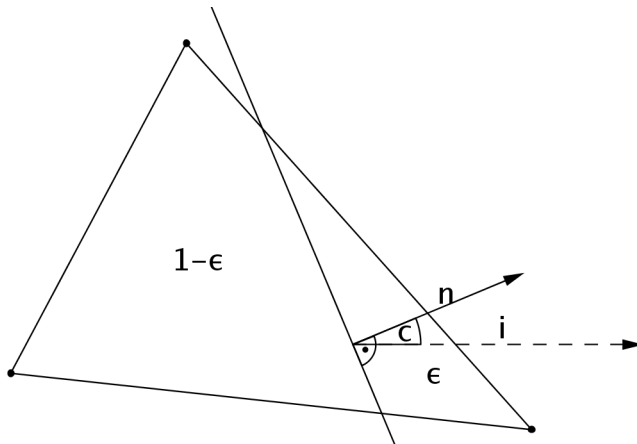
Példa egyparaméteres egyenesseregre

Legyen H hegyesszögű, egységnyi területű háromszög. Tekintsük azon egyenesek $E(\varepsilon)$ halmazát, amelyek H -t két olyan darabra bontják, amelyek területeinek aránya $\varepsilon : (1 - \varepsilon)$ ($\varepsilon < \frac{1}{2}$).

Példa

Az $E(\varepsilon)$ egy egyparaméteres egyenessereg, amelyet az egyeneseinek az ε területű részbe „mutató” normálvektorának irányszöge paraméterez.

Példa egyparaméteres egyenesseregre



A burkológörbe definíciója

Egy síkbeli egyparaméteres egyenessereg burkolója olyan görbe, amely a következő két tulajdonsággal jellemezhető:

A burkológörbe definíciója

Egy síkbeli egyparaméteres egyenessereg burkolója olyan görbe, amely a következő két tulajdonsággal jellemezhető:

1. **feltétel** minden pontja rajta van az egyenessereg egy (a ponttól függő) egyenesén és

A burkológörbe definíciója

Egy síkbeli egyparaméteres egyenessereg burkolója olyan görbe, amely a következő két tulajdonsággal jellemezhető:

1. **feltétel** minden pontja rajta van az egyenessereg egy (a ponttól függő) egyenesén és
2. **feltétel** minden pontjában érinti a egyenessereg egy (megfelelő) egyenesét.

Tétel

Az $r(c) = (x(c), y(c))$ paraméterezés által adott görbe akkor és csak akkor burkolója az $F(x, y, c) = f_1(c) \cdot x + f_2(c) \cdot y + f_3(c)$ egyenesseregnek, ha

$$F(x(c), y(c), c) = f_1(c) \cdot x(c) + f_2(c) \cdot y(c) + f_3(c) \equiv 0 \quad (1)$$

és

$$\partial_3 F(x(c), y(c), c) = f'_1(c) \cdot x(c) + f'_2(c) \cdot y(c) + f'_3(c) \equiv 0. \quad (2)$$

A Butler-transzformáció a görbét görbébe vivő

$$\beta: [t \mapsto (x(t), y(t))] \mapsto [t \mapsto (m_e(t), c_e(t))]$$

leképezés, ahol

$$m_e(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

az érintő meredekségét,

$$c_e(t) = y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot x(t)$$

az érintő y tengellyel vett metszetét jelöli.

Tétel (S. Butler, 2002)

Adott egy $r(t) = (x(t), y(t))$ által paraméterezett görbe, ahol t eleme egy nyílt intervallumnak, $x, y \in \mathcal{C}^2$, $x'(t) \neq 0$ valamint $\kappa(t)|\dot{r}(t)|^3 = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) \neq 0$. Ekkor

$$(x^{2\beta}(t), y^{2\beta}(t)) = (-x(t), y(t)),$$

vagyis $\beta(\beta(r))$ az r görbe y -tengelyre vett tükörképe.

Tétel (S. Butler, 2002)

Adott egy $r(t) = (x(t), y(t))$ által paraméterezett görbe, ahol t eleme egy nyílt intervallumnak, $x, y \in \mathcal{C}^2$, $x'(t) \neq 0$ valamint $\kappa(t)|\dot{r}(t)|^3 = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) \neq 0$. Ekkor

$$(x^{2\beta}(t), y^{2\beta}(t)) = (-x(t), y(t)),$$

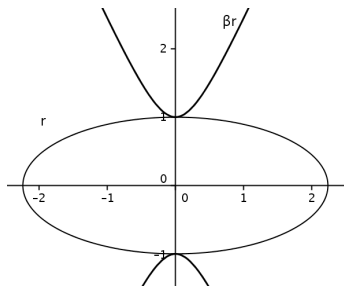
vagyis $\beta(\beta(r))$ az r görbe y -tengelyre vett tükörképe.

Vegyük észre, hogy a tétel használható az eredeti probléma megoldására, hiszen egy görbe Butler-transzformáltja már érintőinek seregéből meghatározható. További elvi jelentősége, hogy valójában nincs szükségünk paraméterezésre az egyenesseregünkön ahhoz, hogy a Butler-transzformáltját meghatározzuk.

Példa görbe Butler-transzformáltjára

Tekintsük az $r = (x(t), y(t)) = (t, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2})$ ellipszist, ahol $t \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Ekkor

$$\beta r(t) = \left(\mp \frac{t}{5\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{5}t^2}} \right). \quad (3)$$



Köszönöm a megtisztelő figyelmet!

Köszönöm a megtisztelő figyelmet!

Köszönöm a megtisztelő figyelmet!