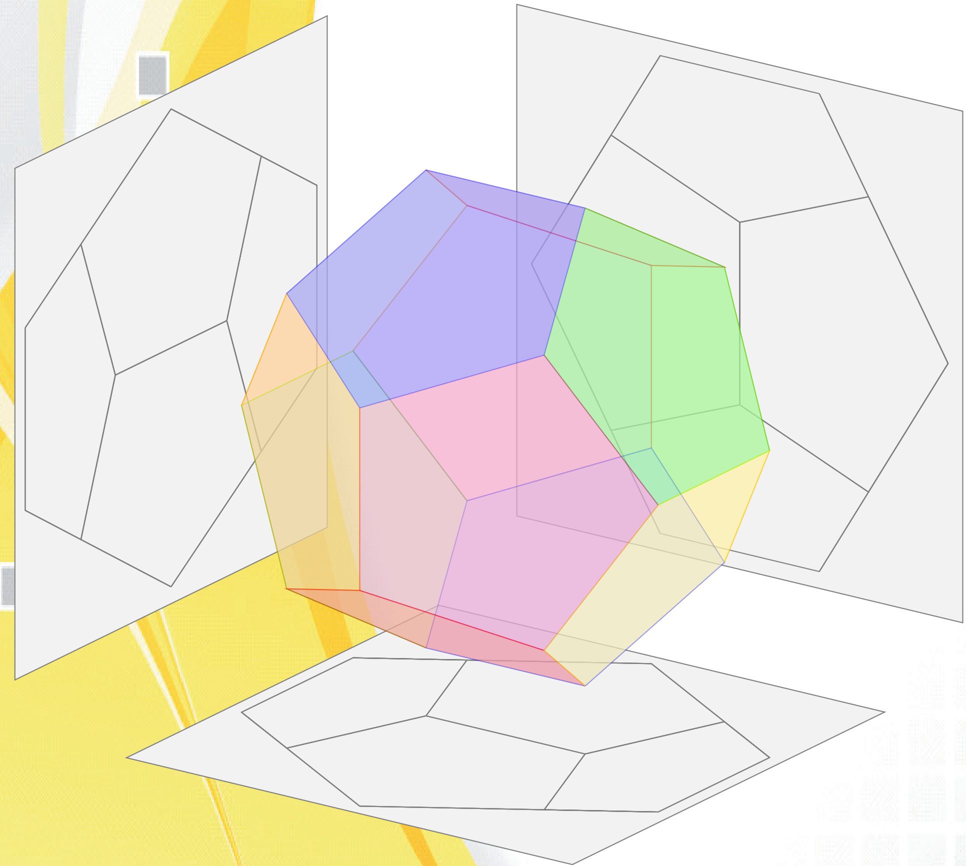
MatematiKA JegyzeteK 2

Kurusa Árpád – Szemők Árpád

A számítógépes ábrázoló geometria alapjai



http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa

MatematiKA JegyzeteK 2

Kurusa Árpád – Szemők Árpád

A számítógépes ábrázoló geometria alapjai

A címlapon egy szabályos dodekaéder
és három merőleges vetülete látható.

Előszó

Ez a könyv az 1999-ben ugyancsak „A számítógépes ábrázoló geometria alapjai” címmel a Polygon Kiadó Jegyzettár sorozatában megjelent könyv új verziója.

Ez az új verzió azonban több szempontból is jelentős előrelépés és az idő előrehaladtával remélhetőleg további fejlődést fog mutatni.

A legfontosabb változás az, hogy a tartalomban minden ismert hiba korrigálása megtörtént, néhány ponton pedig javult a prezentáció és a logikai felépítés is.

A kivitelezésben is jelentős változás történt: a korábbi TEX-rendszert felváltotta a LATEX, amely többek között lehetővé teszi, hogy a Ti*k*Z megjelenésének hála sokkal könnyebben kerülhessenek új ábrák az anyagba. Az új rendszer a tartalom fejlesztését is könnyebbé teszi, melynek követését az igen pontos verziószámozás teszi lehetővé.

A 2020. április 11-ei verziónak a létrejöttében alapvető szerepet játszott a SARS-CoV-2 vírus miatt 2020-ban kialakult COVID-19 világjárvány elfojtására alkalmazott közösségi távolságtartás.

Szeged, 2020. április 11.

dr. Kurusa Árpád

Eredeti előszó

Nyugodtan mondhatjuk, hogy a klasszikus ábrázoló geometria, mely e könyv első fejezetét alkotja, már a múlt században elérte teljes fejlettségét. A matematika e témakörét a különböző térbeli alakzatok síkbeli ábrázolásának igénye szülte, melyre elsősorban a mérnöki tudományoknak és a művészeteknek volt szüksége, de ahogy az gyakran előfordul a matematikában, később a terület a matematika önálló fejezetévé vált, mely belső törvényei szerint fejlődött tovább. A meglehetősen sokféle ábrázolás mindegyikénél megadták az euklideszi szerkesztések köréből nem kilépő térbeli szerkesztések síkbeli végrehajtásának lehetőségeit, módjait. Sem az ábrázolási módok, sem a rendelkezésre álló euklideszi szerkesztések nem tették lehetővé tetszőleges térbeli alakzatok ábrázolását. Néhány kivételtől eltekintve csak a sík, az egyenes és a pont volt ábrázolható térbeli elem. Ezen a fejlettségi szinten az ábrázoló geometria lényegében a mérnökök gyakorlati eszközévé vált.

Természetesen a mérnöki igények ennél jóval tovább mentek, és találtak is bizonyos, matematikailag nem értékelhető megoldásokat. Az egyik legfontosabb ilyen igény a görbék ábrázolásával kapcsolatosan merült fel. Ez már akkor probléma volt, amikor hajókat terveztek, és annak például a víztörő orrát kellett megrajzolni. Ez nagyon fontos darabja volt a hajónak, mert nagyban megszabta a hajó sebességét. A szerkesztéskor a hajó orrából már megtervezett néhány pontot kellett egy „szép”, sima görbével összekötniük. Ezt még az ötvenes években is egy rugalmas faléccel, melyet az angolok „spline”-nak (ejtsd: „szplájn”) neveztek, végezték el úgy, hogy azt a megadott pontokra ráfeszítették, majd mellette meghúzták a vonalat.

Az 1960-as évek elején, amikor a nagyobb ipari központokban már eléggé elterjedt a számítógép, a fentiekben vázolthoz igen hasonló probléma vetődött fel a számítógépet használó tervezők előtt. Már szinte minden méretezési számítást számítógéppel végeztek, de magát a tervet mégis nekik kellett a rajzasztalon megrajzolni, vagyis éppen a legnagyobb munkához nem sikerült alkalmazni a számítógépet. De más oldalról is szorított a helyzet, hiszen már megjelentek az első számjegyvezérlésű maró- és esztergagépek, melyeknek meglehetősen kicsi volt a memóriájuk, ezért bonyolultabb munkadarabok megmunkálását nehézkes volt elvégeztetni velük.

A mérnökök egy olyan komplett, számítógépes rendszerről kezdtek álmodozni, mely a tervezéssel egyidőben szolgáltatja az adatokat, a szükséges változtatásokat a mérnöki utasításoknak megfelelően önállóan elvégzi, majd a kész terv alapján levezényli a gyártást. Ezt a rendszert, mellyel a tervező tényleg csak az érdemi szellemi munkára koncentrálhat, ma *CAD* (ejtsd: „ked”) rendszernek nevezik, az angol

„Computer Aided Design”, magyarul Számítógéppel Segített Tervezés, rövidítése alapján.

Az ehhez a rendszerhez vezető út egyik jelentős akadályát az amerikai MIT (Massachusetts Institute of Technology) kutatóintézetben küzdötték le, kifejlesztve az első grafikus kiviteli és beviteli perifériát a számítógéphez. Ez az 1963-ban létrehozott grafikus rendszer a képernyő és a fényceruza volt. Ezzel már nemcsak számokat lehetett közölni a számítógéppel, hanem közvetlenül a képernyőn vizuálisan kiválasztott pontokra is rá lehetett mutatni, sőt speciális programokkal már különféle ábrákat is lehetett rajzolni.

A másik, és inkább elméleti problémát Európában sikerült megoldani. Olyan görbékre volt szükség a fentebb már részletezett okokból, melyek aránylag kevés adattal megadhatók, de ugyanakkor elég flexibilisek ahhoz, hogy *gyakorlatilag* mindent le lehessen rajzolni velük. Fontos feltétel volt az is, hogy az a néhány meghatározó adat „emberileg” is követhetően írja le a görbét, és a számítógép is gyorsan, aránylag kevés művelettel tudja kiszámolni a görbét. További feltétel volt, hogy mivel a mérnöki gyakorlatban a térbeli alakzatot annak merőleges vetületével szokás ábrázolni (lásd axonometrikus és Monge-féle ábrázolás), a görbe merőleges vetületét is gyorsan lehessen számolni, rajzolni.

A megoldás a Citroën és a Renault autógyáraknál gyakorlatilag egyidőben született meg. Azt, hogy a fenti feltételek mennyire egyértelműen meghatározzák a megoldást, jól mutatja, hogy mind a két helyen azonos eredményre jutottak. A Citroënnél de Casteljau (ejtsd: „dökasztelzsó”) 1959-ben, a Renaultnál Bézier (ejtsd: „bezié”) 1962-ben fedezte fel az új görbéket, melyeket ma már az első nyilvános közlés alapján egyértelműen Bézier görbéknek neveznek.

Az ábrázoló geometria mint tudomány szempontjából ez az új eljárás és az ezt kikényszerítő új eszköz hozta el a teljes megújulást. A terület új neve *CAGD* lett, ami az angol „Computer Aided Geometric Design” rövidítése, és magyarul Számítógéppel Segített Geometriai Tervezést jelent. Ez a *CAD* rendszernek a szerkesztéssel foglalkozó részét jelenti, mely lényegében a térbeli görbék és felületek síkbeli számítógépes ábrázolásának problémakörét vizsgálja.

Felfogásunk szerint a *CAGD* újdonsága a klasszikus ábrázoló geometriához képest nem céljában, hanem eszközében található meg, vagyis könyvünk olyan ábrázoló geometriáról szól, amelyben a legfontosabb szempont a számítógép mint ábrázolási eszköz — ezért lett könyvünk címe „A *számítógépes* ábrázológeometria”.

E könyv tartalma abból az immár az új szempontokat is érvényesítő ábrázológeometriai előadásból nőtt ki, amelyet először Kurusa Árpád tartott a József Attila Tudományegyetemen 1992-ben. Két évvel később az előadásokat Szemők Árpád már a megújult formában vette át, és ő volt az, aki az akkor javarészben kész jegyzetet pontosította és kiteljesítette.

E könyv tartalma a teljes területnek rendkívül kicsi töredéke, mégis azt reméljük, hogy aki e könyv anyagát kellő *fantáziával* elsajátítja, az képessé válik ezen a területen tovább haladni, nem is annyira ismeretei mennyisége, mint inkább megfelelően kialakult szemlélete okán, melyet a terület általunk ismert irodalmát nem jellemző, e könyvben viszont következetesen alkalmazott matematikai szigor alakít ki.

Köszönjük mindazok segítségét, akik hozzájárultak e könyv tartalmának és formájának kialakításához. Köszönet a Polygon Kiadónak, amiért könyvünket kiadásra érdemesnek találta, és külön köszönet dr. Kozma Józsefnek az ábrák gondos kivitelezéséért.

Mindenkinek kellemes olvasást kívánunk!

Szeged, 1999. május 31.

dr. Kurusa Árpád és Szemők Árpád

P.s.: Kérünk mindenkit, hogy ha talál a könyvben hibát, még a legegyszerűbbet is, jelezze a kurusa@math.u-szeged.hu és a szemok@math.u-szeged.hu elektronikus levelezési címeken! [1]

[1] Ezt a munkát is elősegítette a T020066 és F016226 számú OTKA támogatás, valamint a TEMPUS JEP-06015-93 program.

Tartalomjegyzék

Előszó **i**
Tartalomjegyzék **v**

1. Klasszikus ábrázoló geometria **1**
1.1. Perspektivikus ábrázolás . . . 1
1.2. Nyompáros és mérőszámos módszer . . . 8
1.3. Axonometrikus ábrázolás . . . 13
1.4. Monge-féle ábrázolás . . . 21
1.5. Sztereografikus projekció . . . 29

2. Görbemodellezés **33**
2.1. Lagrange-görbék . . . 35
2.2. Bézier-görbék . . . 37
2.3. Összetett Bézier-görbék . . . 53
2.4. B-szplájngörbék . . . 60
2.5. Racionális Bézier-görbék . . . 66

3. Felületek modellezése **71**
3.1. Bézier-háromszögfelületek . . . 71
3.2. Bézier-négyszögfelületek . . . 76
3.3. Összetett Bézier-négyszög- vagy szplájn-felületek . . . 80

F. Függelék **85**
F.1. A projektív geometria alapfogalmai . . . 85
F.2. Művészet . . . 89
F.3. Informatika . . . 90
F.4. Polárformák . . . 92
F.5. Bernstein-polinomok . . . 96
F.6. B-szplájnfüggvények . . . 102
F.7. További előismeretek . . . 110

Irodalomjegyzék **117**
Jelölések és konvenciók **119**
Név- és tárgymutató **121**
Tennivalók listája **125**

1

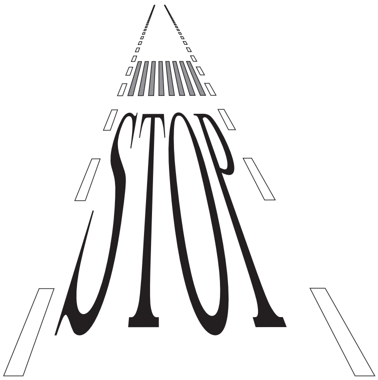
Klasszikus ábrázoló geometria

Ebben a fejezetben a tér síkbeli ábrázolásainak klasszikus módszereit tekintjük át. A régebbi könyvek hangvételéhez képest lényeges hangsúlyeltolódást fog tapasztalni az olvasó, hiszen a számítógép által hozott új szempontok átértékelik a régebbi eredmények fontosságát — legszembetűnőbb a bonyolult szerkesztési eljárások háttérbe szorulása.

Minden ábrázolási módnak megvan a maga mindmáig fontos alkalmazási területe, mégis a perspektivikus ábrázolás felértékelődése figyelhető meg, aminek elsődleges oka a valósághű ábrázolás iránti igény fokozódása, valamint a számítógépes háttér erőteljes növekedése. Ez utóbbi okozza a bonyolult körzős-vonalzós szerkesztések háttérbe szorulását is, miközben az alapszerkesztések fontosságát az ábrázolások könnyebb számítógépes implementációja tartja fenn.

1.1. Perspektivikus ábrázolás

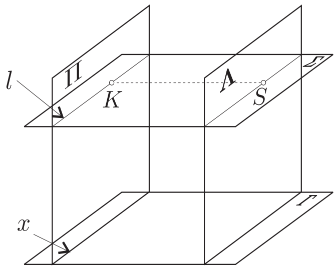
Ha egy fényképezőgépet veszünk a kezünkbe, vagy csak egyszerűen belenézünk a világba, mindig a perspektivikus ábrázolás gyakorlati megvalósulását látjuk.



1.1.1. Ábra. Példa a perspektív ábrázolásra

Az alábbi definíció lényegében ezek matematikai modellje. Az egyetlen, de annál lényegesebb különbség abban rejlik, hogy a két szemünkkel két perspektivikus képet látunk, ami sokkal több információt ad, mint csak egy.

1.1.1. Definíció. A *perspektivikus vetítőrendszer* elemei a következőek: S — a *szempont*, Π — a *képsík*, Σ — a *szemsík*, Γ — az *alapsík* vagy *tárgysík*, Λ — a *főhomloksík*, $l = \Pi \cap \Sigma$ — a *látóhatár*, K — az S vetülete a Π síkra, a *képközéppont* és $x = \Pi \cap \Gamma$ — a *képsíktengely* vagy x-tengely.
Ezek egymáshoz viszonyított helyzete: $\Pi \parallel \Lambda \perp \Sigma \parallel \Gamma$.



A térbeli $P \notin \Sigma$ pont képe az a P' pont a Π képsíkon, melyet az SP egyenes metsz ki. Egy adott térbeli alakzat pontjaiból a Π képsíkon nyert síkbeli képet nevezzük az *alakzat perspektív képének*.

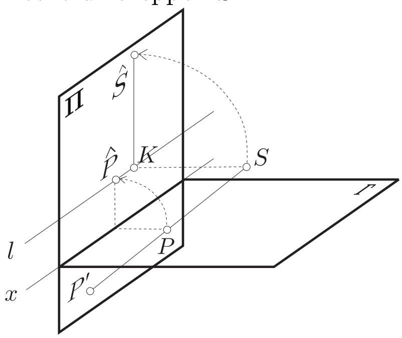
1.1.2. Definíció. A Γ alapsíknak az x képsíktengely körüli 90°-os elforgatását a tárgysík képsíkba való *beforgatásának* nevezzük. Ennek irányát általában úgy szokás választani, hogy a Γ sík súrolja az S szempontot.

Az alábbi tételnek ebben a szakaszban rengeteg analógja lesz, érdemes tehát alaposan áttanulmányozni a bizonyítását.

1.1.3. Tétel. *Ha a Γ tárgysíkot beforgatjuk a Π képsíkba, akkor a képsík és a beforgatott tárgysík pontjai között egy tengelyes perspektivitás lesz, melynek tengelye az x képsíktengely, centruma pedig az S szempontnak az l látóhatár körüli azonos irányba való beforgatottja a képsíkba.*

Bizonyítás. Legyen az S szempont beforgatottja a $\hat{S}$ pont, továbbá a $P \in \Gamma$ pont beforgatottja $\hat{P}$.

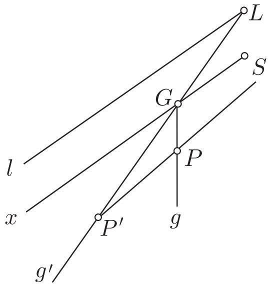
A térbeli ábrázolásból nyilvánvaló, hogy a $P \mapsto P'$ leképezés egyenes- és kettősviszonytartó, így ilyen a Π képsík $P \mapsto \hat{P}$ leképezése is. Ez tehát egy projektivitás, melynek persze az x-tengely fix egyenese. Projektív geometriából ismert, hogy egy ilyen leképezés csak perspektivitás lehet. A tétel bizonyításához ezért elég megmutatni, hogy ennek centruma éppen $\hat{S}$.



1.1.2. Ábra. A beforgatott perspektív vetítőrendszer elemei

Húzzunk egy tetszőleges g egyenest a Γ tárgysíkban a P ponton keresztül, mely az x-tengelyt a G pontban metszi. Ennek képe a Π síkban legyen g'.

A g' nyilván átmegy a P' ponton és metszi az l látóhatár egyenest egy L pontban.



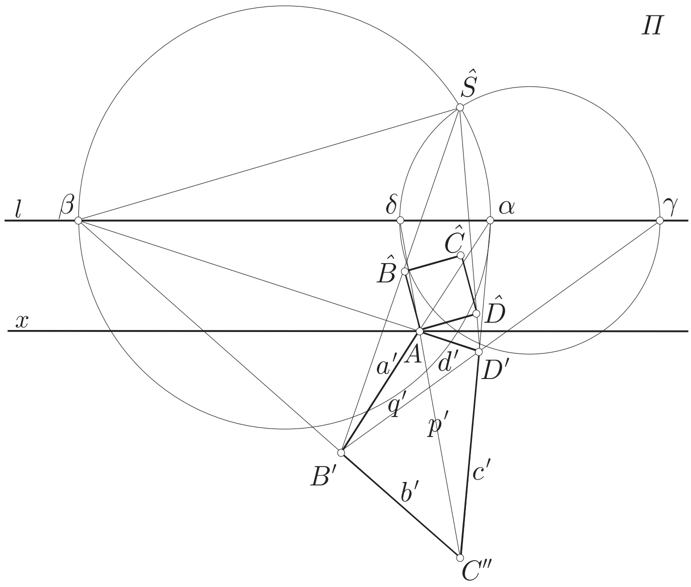
Az SL szakasz párhuzamos a g egyenessel, mert SL és g egy síkban vannak, valamint SL és g a párhuzamos Σ és Γ síkokra is illeszkedik.

Ha most egyszerre forgatjuk a Γ tárgysíkot és a Σ szemsíkot az x-tengely és az l látóhatár egyenese körül, ez a párhuzamosság megmarad, amiért az $SLP'GP$ pontok mindvégig egy síkban maradnak.

Eszerint $SLP'\triangle$ és a $PGP'\triangle$ hasonló. Ahogy közelít a forgatás a 90° felé, úgy közelít az S és a P pont az $\hat{S}$ illetve a $\hat{P}$ ponthoz. Tehát $\hat{S}LP'\triangle \sim \hat{P}GP'\triangle$, amiért az $\hat{S}P'\hat{P}$ pontok egy egyenesre esnek. ■

Perspektivitás alaptétele. *Bármely konvex négyszög, ha legalább egyik szemközti oldalpárja nem párhuzamos, bármely méretű, a tárgysíkon lévő alkalmas négyzet képe.*

Bizonyítás. A bizonyítást csak akkor végezzük el, ha a Γ tárgysíkon lévő $ABCD$ négyzetnek a képe a Π képsíkon, melynek A csúcsa az x-tengelyen van.



1.1.3. Ábra. Az $ABCD$ négyzet beforgatottja és annak képe a beforgatott rendszerben

Legyen tehát a beforgatott négyzet képe $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$, oldalegyenesei a, b, c és d, melyek beforgatottjai $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, középpontja O, és két átlója p és q, melyek beforgatottjai $\hat{p}$ és $\hat{q}$. Mivel $a \parallel c$, az a' és a c' egyenesek az l látóhatár egyenesen metszik egymást. Legyen ez a metszéspont α. Hasonlóképpen adódik a $\beta = b' \cap d'$ pont az l egyenesen. Legyen $\gamma = q' \cap l$, és $\delta = p' \cap l$. Ekkor $\delta\hat{S}\gamma\sphericalangle = 90°$, és $\beta\hat{S}\alpha\sphericalangle = 90°$, hiszen $p \perp q$, $a \perp d$, és $\hat{p} \parallel \delta\hat{S}$, $\hat{q} \parallel \hat{S}\gamma$, $\hat{a} \parallel \alpha\hat{S}$, $\hat{d} \parallel \hat{S}\beta$. (A párhuzamosságok az előző tétel azon részéből következnek, ahol beláttuk, hogy $SL \parallel g$, illetve $\hat{S}L \parallel \hat{g}$.)

Megfigyeléseink alapján nyilvánvaló, hogy az l egyenest akkor is meg tudjuk szerkeszteni, ha csak az $A'B'C'D'$ négyszöget ismerjük. Ehhez egyszerűen össze kell kötnünk az α és a β pontokat. Ha valamelyik nem jönne létre, akkor az annak megfelelő oldallal kell párhuzamost húznunk a létezőn keresztül. Ezután már a γ és a δ pontokat is meg tudjuk szerkeszteni, majd a $\gamma\delta$ és az $\alpha\beta$ szakaszokra illeszkedő Thalész-körök segítségével kapjuk az $\hat{S}$ pontot. Végül az x-tengelyből és a rajta létrejövő metszéspontokból az oldalak és az $\hat{S}$ pontból kiinduló szakaszok párhuzamossága alapján tudjuk megszerkeszteni magát az $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$ négyszöget. Ehhez elegendő csupán például $\hat{B}$-ot megszerkeszteni, hiszen ebből a többi csúcs könnyedén megkapható. $\hat{B}$ az $\hat{S}B'$ egyenesen van. Mivel $\hat{S}\alpha \parallel \hat{a}$, így A-n keresztül $\hat{S}\alpha$-val párhuzamost húzva megkapjuk $\hat{A}\hat{B} = \hat{a}$-t, ami az $\hat{S}B'$ egyenesből kimetszi $\hat{B}$-t.

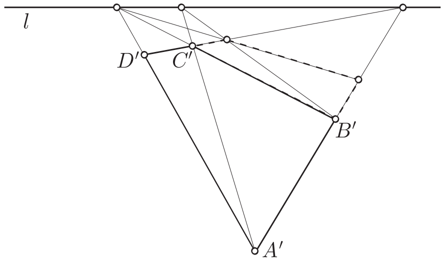
Ezzel beláttuk, hogy egy, a feltételnek eleget tevő négyszögből egy valamely négyzet perspektivikus képéből nyert ábrához igen hasonló ábrát tudunk szerkeszteni. Állításunk teljes igazolásához így már csak az hiányzik, hogy megmutassuk, hogy egy ilyen ábra valóban egy létező négyzetből kapható. Ehhez azonban egyszerűen az előző tétel bizonyításában elmondott érveket kell fordítva felsorakoztatnunk, amint az ábrát az l és az x egyenes mentén 90°-kal behajlítjuk. ■

Ezzel lényegében azt bizonyítottuk be, hogy a perspektivikus kép nem elegendő az eredeti alakzat maradéktalan visszaállításához. Az alábbi definíció utáni tétel azonban azt mondja, hogy amennyiben egy négyzet képét ismerjük, akkor a tárgysíkról minden metrikus információ „átjön” a képre.

1.1.4. Definíció. *Möbius-rácsnak* nevezzük a Γ tárgysíkra rajzolt négyzetrács perspektivikus képét.

1.1.5. Tétel. *Egyetlen elemi négyzet képéből a teljes Möbius-rács megszerkeszthető.*

Bizonyítás. Elég azt bizonyítanunk, hogy egy négyzetből annak oldalszomszédjai megszerkeszthetők. Ehhez csak azt kell észrevennünk, hogy nem csak az oldalak párhuzamosak, de a szomszédos négyzetek átlói is, tehát ezek is egy, az l egyenesen lévő pontban metszik egymást. A szerkesztés menete tehát a következő.



1.1.4. Ábra. A Möbius-rács szerkesztése

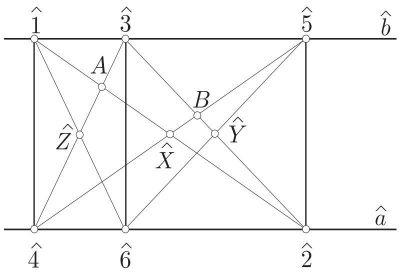
Épp úgy, ahogy az előző tételnél, megszerkesztjük az l egyenest, majd annak az $A'C'$ egyenessel való metszetét. Ezt összekötve a B' ponttal, a keletkező egyenes a $C'D'$ egyenesből kimetszi a szomszédos négyzet egyik újabb csúcsát. Ezt a csúcsot összekötve a hozzá tartozó ismeretlen oldalnak megfelelő, az l egyenesen lévő ponttal, a szomszéd négyzet utolsó oldalát is megkapjuk. ∎

1.1.1. Példák és feladatok

1.1.6. Tétel. *Ha egy hatszög csúcsai felváltva az a' és a b' egyenesekre esnek, akkor szemben lévő oldalainak metszéspontjai egy egyenesre esnek.*

Bizonyítás. Legyenek a hatszög csúcsai rendre $1, 2, 3, 4, 5$ és 6 úgy, hogy a páratlanok esnek az a' egyenesre, a párosak pedig a b' egyenesre. A szemben fekvő oldalak metszéspontjai: $X' = 12 \cap 54$, $Y' = 32 \cap 56$ és $Z' = 34 \cap 16$.

Másoljuk a hatszöget a két egyenessel úgy egy perspektivikus vetítőrendszer Π képsíkjára, hogy az a' egyenes essen az l látóhatár egyenesre. Vetítsük most az ábrát az S szempontból vissza a Γ tárgysíkra.



1.1.5. Ábra. A két egyenesre csúcsaival felváltva illeszkedő hatszög perspektivikus „visszavetítettje”

Ekkor a tárgysíkon már három párhuzamos egyenespárt látunk, mely a b' egyenes eredeti b egyenesének három pontján megy át. A beforgatott Γ tárgysíkon tehát azt látjuk, hogy $\hat{4}, \hat{6}, \hat{2} \in \hat{b}$. Továbbá $\hat{X} = \hat{2}_1 \cap \hat{4}_5$, $\hat{Y} = \hat{2}_3 \cap \hat{6}_5$, és $\hat{Z} = \hat{4}_3 \cap \hat{6}_1$, ahol $\hat{i}_j$ az ij egyenes őskképének beforgatottját jelöli. Természetesen $\hat{i}_j \parallel \hat{k}_j$. Mivel a perspektív ábrázolás egyenestartó, elég bizonyítanunk, hogy az $\hat{X}$, $\hat{Y}$ és a $\hat{Z}$ pontok egy egyenesre esnek.

Legyen $A = \hat{4}_3 \cap \hat{2}_1$, és $B = \hat{4}_5 \cap \hat{2}_3$. Ekkor a párhuzamos szelők tétele alapján

$$\frac{\hat{4}\hat{Z}}{\hat{Z}A} = \frac{\hat{4}\hat{6}}{\hat{6}\hat{2}} = \frac{B\hat{Y}}{\hat{Y}\hat{2}}.$$

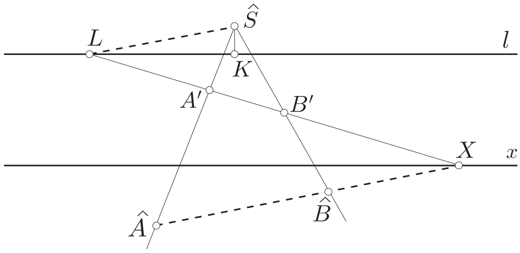
Ehhez hozzáadva 1-et, majd a reciprokát véve, a $\hat{Z}A\colon \hat{4}A = \hat{Y}\hat{2}\colon B\hat{2}$ egyenlőség adódik. Ezt és újra a párhuzamos szelők tételét felhasználva adódik, hogy

$$\frac{\hat{Z}A}{\hat{Y}\hat{2}} = \frac{\hat{4}A}{B\hat{2}} = \frac{A\hat{X}}{\hat{2}\hat{X}}.$$

Ez bizonyítja, hogy a $\hat{Z}A\hat{X}\triangle$ háromszög és a $\hat{Y}\hat{2}\hat{X}\triangle$ háromszög hasonló, amiért a $\hat{Z}\hat{X}A\sphericalangle$ szög és a $\hat{2}\hat{X}\hat{Y}\sphericalangle$ szög csúcsszögek, vagyis a $\hat{Z}$, $\hat{X}$, $\hat{Y}$ pontok egy egyenesre esnek. ■

1.1.7. Probléma. Adott a K képközéppont, a KS távolság és az x-tengely. Szerkesszük meg annak a Γ tárgysíkon lévő AB szakasznak a hosszát, mely az $A'B'$ képével adott!

Megoldás. Az l látóhatár egyenes átmegy a K képközépponton, és párhuzamos az x-tengellyel, tehát meg tudjuk szerkeszteni. Ebből viszont az S szempont $\hat{S}$ beforgatottja is megszerkeszthető, hiszen $l \perp \hat{S}K$ és a $K, \hat{S}K$ adott.



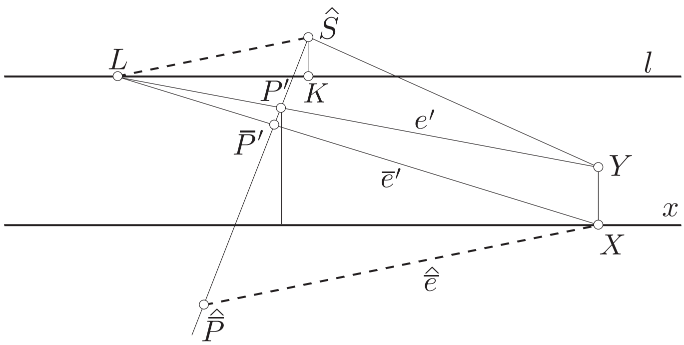
1.1.6. Ábra. Egy szakasz képéből a hosszának szerkesztése megegyezik beforgatottjának szerkesztésével

Miután így a vetítőrendszert rekonstruáltuk, keressük meg az $A'B'$ szakasz egyenesének az l látóhatárral vett L metszetét és az x-tengellyel való X metszéspontját. Az eredeti AB szakasz $\hat{A}\hat{B}$ beforgatottjának $\hat{e}$ egyenese ekkor párhuzamos lesz az $L\hat{S}$ szakasszal, és átmegy az X ponton, ezért szerkeszthető. Mivel a kép és beforgatottja között $\hat{S}$ középpontú perspektivitás van, az $\hat{A}$ és a $\hat{B}$ pontokat most már könnyen meg tudjuk szerkeszteni, hiszen azokat az $\hat{e}$ egyenesből az $\hat{S}A'$, illetve az $\hat{S}B'$ egyenesek metszik ki. A keresett hosszúság az $|\hat{A}\hat{B}| = |AB|$ lesz. ■

1.1.8. Probléma. Adott egy P pont a térben a Γ tárgysíktól vett d távolságával, és az arra eső $\bar{P}$ merőleges vetületének $\hat{\bar{P}}$ beforgatottjával. Szerkesszük meg a P' képét, ha adott az x-tengely, a K képközéppont és a KS távolság!

Megoldás. A vetítőrendszert az előző feladatnál látott módon rekonstruáljuk.

A $\bar{P}$ pont $\bar{P}'$ képét is meg tudjuk szerkeszteni, ha felveszünk rajta keresztül a Γ tárgysíkban egy tetszőleges $\bar{e}$ egyenest, amely metszi az x-tengelyt egy X pontban. Ennek az egyenesnek a képét úgy szerkesztjük meg a $\hat{\bar{e}}$ beforgatottjából, mely természetesen átmegy az X és a $\hat{\bar{P}}$ pontokon, hogy vele párhuzamost húzunk az S szempont $\hat{S}$ beforgatottján keresztül. Ez az egyenes messe az l látóhatár egyenest az L pontban. Ekkor az LX szakasz egyenese lesz az $\bar{e}$ egyenes $\bar{e}'$ képe. Most az $\hat{S}\hat{\bar{P}}$ egyenese az $\bar{e}'$ egyenesből kimetszi a $\bar{P}$ pont $\bar{P}'$ képét.



1.1.7. Ábra. A tárgysík felett adott magasságban lévő pont perspektivikus képének szerkesztése.

A P' pont szerkesztéséhez most már csak két dolgot kell megfigyelnünk. Először is, mivel a $P\bar{P}$ merőleges a Γ síkra, a $P'\bar{P}'$ szakasz merőleges lesz az x-tengelyre. Másodszor, ha az $\bar{e}$ egyenessel párhuzamost húzunk a P ponton keresztül, legyen ez e, akkor annak képe átmegy az L ponton, másrészt a Π képsíkot egy olyan Y pontban metszi, melynek távolsága az X ponttól éppen d, és az YX egyenes merőleges az x-tengelyre. Eszerint az e egyenes e' képét meg tudjuk szerkeszteni, majd abból az első észrevételünk alapján a P' pontot is. ■

1.1.9. Feladat. Szerkesszük meg egy kocka perspektív képét, ha adott az e éle, az x-tengely, a K képközéppont, valamint a $KS = d$ távolság! Tudjuk, hogy a kocka egyik lapja rajta van a Γ tárgysíkon, másik lapja pedig párhuzamos a Π képsíkkal, és a képsík nem metszi a kockát.

1.1.10. Feladat. Forgassuk meg az előző feladat kockáját a Π-hez legközelebbi Γ-ra merőleges éle körül 45°-kal úgy, hogy ne messe a Π képsíkot! Szerkesszük meg ennek a kockának a perspektív képét!

1.1.11. Feladat. Szerkesszük meg annak a szabályos tetraédernek a perspektív képét, melynek egyik éle az x-tengelyre esik, egyik lapja a tárgysíkra, és a képsík a szemponttól elválasztja!

1.1.12. Feladat. Szerkesszük meg egy tetszőlegesen adott P pont P' képét a sík azon önmagára vett perspektivitása mellett, amely egy $ABC\triangle$ háromszöggel és annak $A'B'C'\triangle$ képével adott!

1.1.13. Feladat. Igazoljuk, hogy minden tárgysíkon lévő kör perspektív képe ellipszis!

1.1.14. Feladat. Igaz-e, hogy minden kúpszelet perspektív képe kúpszelet?

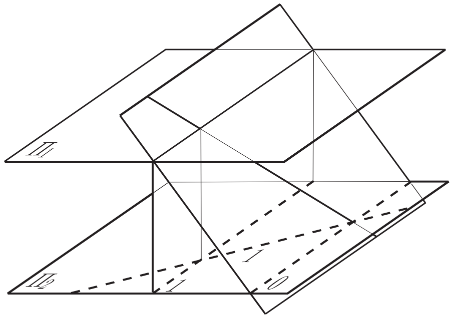
1.2. Nyompáros és mérőszámos módszer

Ennek a két módszernek azonos a gyökere, ezért együtt tárgyaljuk őket. A nyompáros módszernél a térelemeknek két síkkal vett metszetét tekintjük a képnek, míg a mérőszámos módszer, mely matematikailag úgy is felfogható, mint a nyompáros módszer továbbfejlesztése, több síkkal való metszetet veszünk, és ezeket meg is számozzuk a síkokhoz rendelt számokkal.

A nyompáros módszer gyakorlatilag csak a sík, az egyenes és valamelyest a pont ábrázolását teszi lehetővé.

1.2.1. Definíció. A *nyompáros vetítőrendszer* két fő eleme a térben a $z = 0$, illetve a $z = 1$ egyenlettel meghatározott Π_0, illetve Π_1 sík. A térbeli elemek, síkok és egyenesek, metszeteit ezekkel a síkokkal *nyomoknak*, *nyomvonalnak* és *nyompontnak* nevezzük. Ezek a nyomok alkotják az elemek képeit az egyes síkokon. A képet a Π_1 síknak a Π_0 síkra való merőleges, z irányú, vetítésével kapjuk.

Eszerint egy sík képe a nyompáros ábrázolási módnál általában két párhuzamos egyenes. Egy egyenes képe két pont.



1.2.1. Ábra. Egy sík és egy egyenes nyompáros ábrázolása

1.2.2. Definíció. Egy sík két nyomvonalának képeit *nyomképvonalaknak*, egy egyenes két nyompontjának képei között feszülő vektort pedig *nyomvektornak* nevezzük.

1.2.3. Definíció. Egy P pontnak a „nyoma” valamelyik Π_i $(i = 0, 1)$ síkon legyen a z irányú merőleges vetülete az adott síkra, és a vetülete körül a síktól mért távolságával mint sugárral rajzolt kör. Az ilyen kört a pontnak a síkra vonatkozó *distanciakörének* nevezzük.

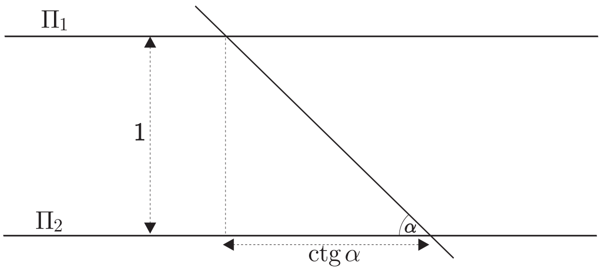
Bár a pontok ilyen *ciklográfiának* nevezett ábrázolása merőben idegen az első definícióban megjelenő koncepciótól, mégis aránylag jól illeszkedik be a rendszerbe. Egy pont képe általában egy pont és két koncentrikus kör lesz.

1.2.4. Tétel.

ı) *Két sík akkor és csak akkor párhuzamos, ha nyomképvonalaik párhuzamosak és azonos távolságra vannak.*

ıı) *Két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha nyomvektoraik megegyeznek.*

Bizonyítás. *ı)* Ha a két sík párhuzamos, akkor bármely síkkal vett metszetük is párhuzamos. A nyomképvonalak közötti távolság egyedül az ábrázolandó síknak, és a Π_0 síknak a szögétől függ, annak éppen kotangense (lásd az ábrát), ezért a nyomképvonalak közötti távolságok tényleg egyenlőek.



1.2.2. Ábra. Egy sík nyomképvonalainak távolsága

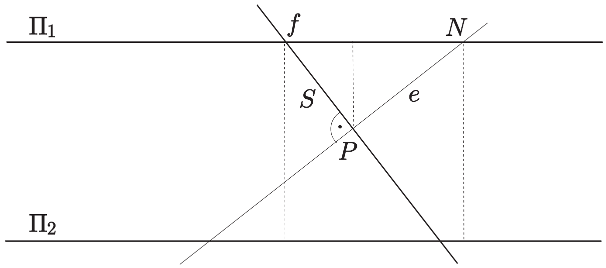
Visszafelé, ha a nyomképvonalak távolságai egyenlőek, akkor az adott síkok és a Π_0 sík szögei is megegyeznek. Ugyanakkor a nyomképvonalak párhuzamosságából adódik, hogy a Π_0 síkkal való metszetük párhuzamos, amiért a két sík egymás eltoltja, vagyis párhuzamosak.

ii) Itt elég megjegyeznünk, hogy egy egyenes irányvektora éppen a nyomvektorának és a $(0, 0, 1)$ vektornak az összege. ■

1.2.5. Tétel.

i) *Egy S sík akkor és csak akkor merőleges egy e egyenesre, ha f nyomvonala az e egyenes N nyompontjának antipolárisa a P metszéspontjuk distanciakörére nézve. Azaz P vetületének N-től és f-től vett távolságának szorzata egyenlő a P distanciakörének sugárnégyzetével.*

ii) *Egy sík akkor és csak akkor merőleges egy egyenesre, ha nyomvonalai merőlegesek az egyenes nyomvektorára, és a nyomképvonalak közti távolságnak és a nyomvektor hosszának szorzata* 1*.*



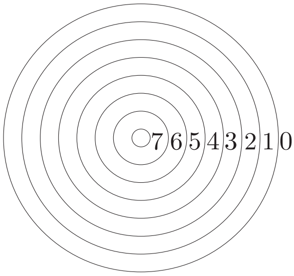
1.2.3. Ábra. Egy S sík és egy rá merőleges e egyenes nyomainak helyzete

Bizonyítás. *i*) Ez az állítás lényegében a derékszögű háromszög magasságtétele és annak megfordítása. A P metszéspont vetülete ugyanis annak a háromszögnek a magassága, melyet az adott e egyenesen átmenő, a képsíkokra merőleges sík metsz ki. Ennek a magasságnak a nagysága viszont éppen a distanciakör sugara.

ii) Vegyük észre, hogy az egyenes két nyompontját összekötő egyenes éppen az egyenes merőleges vetülete a képsíkon. Nézzük meg, mi alakul ki, ha az egyenesnek és merőleges vetületének síkját metsszük el az összes többi elemmel. Az egyenes és a sík is egy-egy derékszögű háromszöget hoz létre, melyeknek az átfogói közti szög éppen a sík és az egyenes szöge. Eszerint a két háromszögnek hasonlónak kell lennie, amiért átellenes befogóik szorzata 1. ■

A mérőszámos módszerrel leginkább a térképészetnél találkozhatunk, hiszen ez a legelterjedtebb megoldás a magassági adatok közlésére.

1.2.6. Definíció. A *mérőszámos vetítőrendszer* a $z = k_i$ egyenletű Π_i síkokból áll. Ezek száma és eloszlása nem meghatározott, mindig a szükségletnek megfelelő. A térbeli elemek metszeteit ezekkel a síkokkal nyomoknak, nevezzük. Ezek a nyomok alkotják az elemek képeit az egyes síkokon. A képet az összes Π_i síknak a Π_0 síkra való merőleges, z irányú vetítésével kapjuk úgy, hogy a Π_i sík vetítéséből adódó képet az i-vel címkézzük.



1.2.4. Ábra. Egyenes körkúp mérőszámos ábrázolása

Érdemes átgondolni, hogy például az egyenes képe eszerint egy számozott pontsorozat, a sík képe egy számozott párhuzamos egyenessorozat lesz. Egy olyan kúpnak, amelynek tengelye a z-tengellyel párhuzamos, a képe nyilván egy számozott koncentrikus körsorozat lesz.

A pontok ábrázolása itt is problémás, de itt az előző megoldásnál egyszerűbben is célt érhetünk, bevezetve minden egyes pontra egy újabb képsíkot.

Két szomszédos képsíkot tekintve, mindazok a tulajdonságai a nyompáros módszernek, amelyek a síkok és az egyenesek elhelyezkedésére vonatkoztak, analóg módon átfogalmazva itt is igazak.

1.2.1. Példák és feladatok

1.2.7. Probléma. Adott egy egyenes két nyompontja és egy sík két nyomvonala. Szerkesszük meg metszéspontjuk képét!

Megoldás. Vegyünk fel a nyompontokon keresztül egy párhuzamos egyenespárt. Ez az egyenespár egy, az egyenest tartalmazó sík két nyomvonala. E sík és az eredetileg adott sík metszésvonalának nyompontjait a síkok megfelelő nyomvonalainak metszetei adják. A metszésvonal és az eredetileg adott egyenes metszéspontja adja az egyenes és a sík metszéspontját. A distanciakör sugarát a metszéspontnak a nyompontokkal alkotott osztóviszonyából szerkesztjük meg. ■

1.2.8. Tétel. *Egy forgáskúp és egy, az egyik alkotójával párhuzamos sík metszete mindig parabola.*

Bizonyítás. Vegyük fel a koordináta-rendszert úgy, hogy annak z-tengelye a kúp forgástengelyével essen egybe. Ekkor a kúp egyenlete $z = c\sqrt{x^2+y^2}$, valamely $c > 0$ konstansra. Mivel a sík párhuzamos az egyik, mondjuk, az xz-síkban lévő, alkotóval, egyenlete $z = cx + d$ ($d > 0$). Ábrázoljuk a síkot és a kúpot mérőszámos módszerrel, elméletileg minden képsíkot felhasználva, gyakorlatilag persze csak néhányat. A sík esetén az i ($i \geq d/2$) címkéjű kép az $i = cx + d$ egyenletű egyenes lesz az xy-síkon. A kúp i címkéjű képe az $i = c\sqrt{x^2+y^2}$ egyenletű kör lesz. Eszerint a sík és a kúp metszetének i címkéjű pontja az $\left(\frac{i-d}{c}, \frac{\sqrt{(2i-d)d}}{c}\right)$ koordinátájú pont az xy-síkban. Ezen pontok együtt éppen a kúp és a sík metszetének merőleges vetületét adják a $z = 0$ síkra. E vetületnek az i kiküszöbölésével kapjuk a $cx + d = c\sqrt{x^2+y^2}$ egyenletét, amiből $x = \frac{c}{2d}\left(y^2 - \frac{d^2}{c^2}\right)$. Ez egy parabola egyenlete, amelynek tengelye az x-tengely.

Tekintsük most a $z = cx + d$ síkon azt a ts koordinátarendszert, melynek t-tengelye a síknak a $z = 0$ síkkal való metszete, s-tengelye pedig erre merőleges, és átmegy a z-tengelyen. Vegyük észre, hogy az xy-síkra való merőleges vetítés esetén a (t, s) pont az $\left(x = \frac{s}{\sqrt{1+c^2}} - \frac{d}{c}, y = t\right)$ pontba megy át. Eszerint a (t, s) rendszerben a kúp és a sík metszetének egyszerű behelyettesítésével kapott egyenlete

$$s = \left(\frac{d}{2c} + \frac{c}{2d}t^2\right)\sqrt{1+c^2}.$$

Minthogy ez egy parabola egyenlete, az állítást igazoltuk. ∎

1.2.9. Probléma. Az $x = y^2 + z^2$ paraboloid és az $x + z = 4$ egyenletű sík metszete ellipszis.

Megoldás. Mérőszámos módszerrel megmutatjuk, hogy a metszet merőleges vetülete az xy-síkon egy kör.

A paraboloid i címkéjű képe az $x = y^2 + i^2$ fekvő parabola. A sík i címkéjű képe ugyanakkor az $x + i = 4$ egyenes. Ezek metszete a paraboloid és a sík metszetének i címkéjű pontja. Ez a $(4 - i, \pm\sqrt{4 - i - i^2})$ pont. Az i kiejtésével adódó $4,25 = y^2 + (x - 4,5)^2$ egyenlet mutatja, hogy ezek a pontok egy körre illeszkednek.

Mivel a metszet merőleges vetülete kör, rajta kell legyen azon a hengeren, melyet a kör minden pontjából az xy-síkra merőleges egyenesek alkotnak. Eszerint a metszet nem más, mint ennek a hengernek és a $x + z = 4$ síknak a metszete, amiről tudott, hogy ellipszis. ∎

1.2.10. Feladat. Mi lesz a nyompáros képe az $ax + by + cz = d$ síknak?

1.2.11. Feladat. Mi lesz a nyompáros képe az $|x| = y^2 + z^2$ egyenletű kúpnak?

1.2.12. Feladat. Mi lesz a mérőszámos képe annak a kockának, melynek $\sqrt{3}$ hosszúságú testátlója a z-tengelyre esik, egyik csúcsa az origóban van, és egyik ebből kiinduló élének merőleges vetülete az x-tengelyre illeszkedik?

1.2.13. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $y^2 + z^2 + 1 = x^2$ hiperboloid metszete az $x\sqrt{2} + z = \sqrt{2}$ síkkal ellipszis!

1.3. Axonometrikus ábrázolás

Az axonometrikus ábrázolás a természetben az árnyékok képében jelenik meg. Matematikailag ez a párhuzamos vetítés, de mi csak legfontosabb esetével, a merőleges vetítéssel fogunk foglalkozni. Az alábbi tétel azt mutatja, hogy lényegében ez elegendő is.

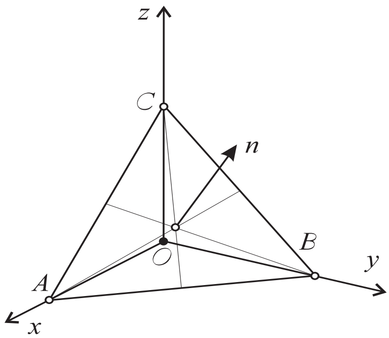
1.3.1. Tétel. *Egy síknak egy másik vele nem párhuzamos síkra eső két különböző párhuzamos vetülete közt tengelyes affinitás áll fenn, melynek tengelye a mondott síkok metszésvonala.*

Bizonyítás. Legyen a két vetítés π_1 és π_2. Nyilván mindkettő egy-egy értelmű és egyenestartó. A két vetület között viszont a $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ leképezés adódik, amely tehát egyenestartó, és a metszésvonalat nyilván fixen hagyja. A tengelyes affinitás irányát könnyen meghatározhatjuk, ha ismerjük egy P pont P_1, illeve P_2 képét. Az irány a P_1P_2 egyenes iránya lesz. ∎

1.3.2. Definíció. Az *axonometrikus vetítőrendszer* az xyz térbeli derékszögű koordinátarendszer

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

egyenletű síkjából, vagyis a *képsíkból*, és az ebből a síkból a koordinátasíkok által kimetszett *nyomháromszögből* áll. Az ábrázolás maga az erre a síkra való párhuzamos vetítés.



1.3.1. Ábra. Az axonometrikus vetítőrendszer

Néha a nyomháromszög nélküli képsík is elegendő, de látni fogjuk, hogy ekkor a térbeli alakzatok visszaállítási lehetősége alapvetően csökken.

1.3.3. Tétel. *A nyomháromszög olyan hegyesszögű háromszög, melynek magasságpontja a koordináta-rendszer origójának merőleges vetülete.*

Bizonyítás. Legyenek a nyomháromszög csúcsai A, B és C, az origó pedig O, ahogy a 1.3.1. ábrán. Ekkor O és A merőleges vetülete a BC egyenesre ugyanaz a pont, hiszen $OA \perp OBC\triangle$. Ez azt jelenti, hogy az O origó merőleges vetülete az ABC síkra rajta van az A-ból induló magasságvonalon. Mivel ezt a B és C pontokra is elmondhatjuk, az O pont merőleges vetülete éppen a magasságpontba kell essen, amint állítottuk. Annak bizonyítását, hogy a háromszög hegyesszögű, az olvasóra bízzuk (1.3.13. feladat). ■

1.3.4. Tétel. *Ha az x, y és z koordinátatengelyeknek a képsíkkal bezárt szöge rendre ξ, ψ és ζ, akkor*

$$\cos^2\xi + \cos^2\psi + \cos^2\zeta = 2.$$

Bizonyítás. A képsík normálisával a tengelyek rendre $90° - \xi$, $90° - \psi$ és $90° - \zeta$ szöget zárnak be, ezért ez a normális $\boldsymbol{n} = (\cos(90° - \xi), \cos(90° - \psi), \cos(90° - \zeta))$. Ennek hossza 1, ezért

$$1 = \cos^2(90° - \xi) + \cos^2(90° - \psi) + \cos^2(90° - \zeta),$$

amiből az állítás adódik. ■

1.3.5. Definíció. Egy tengely *rövidülésének* nevezzük egységnyi szakasza képének hosszát. Ennek jelölése az x-, y- és z-tengelyek esetén rendre q_x, q_y és q_z.

Merőleges vetítéskor a rövidülésekre fennáll a $q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 2$ egyenlet, hiszen a rövidülés éppen az adott tengely és a képsík bezárt szögének a koszinusza.

1.3.6. Tétel. *Merőleges vetítéskor a nyomháromszög talpponti háromszögének u, v és w oldalaira $u\colon v\colon w = q_x^2\colon q_y^2\colon q_z^2$, ahol u az x-tengely felőli, v az y-tengely felőli, és w a z-tengely felőli oldal.*

Bizonyítás. Legyen a nyomháromszög $ABC\triangle$, ennek talpponti háromszöge a szemben fekvésnek megfelelő sorrendben $T_aT_bT_c$, magasságpontja pedig M. Mivel az M magasságpont az O origó merőleges vetülete a képsíkra, $AO\cos\xi = AM$. A T_a pont merőleges vetülete az OA tengelyre éppen O, ezért $AO = AT_a\cos\xi$. Eszerint $\frac{AM}{AT_a} = \cos^2\xi = q_x^2$.

Ismert, hogy a BC oldal a talpponti háromszög külső szögfelezője, amiért a $T_bT_aP\triangle$ háromszög hasonló a $T_cT_aQ\triangle$ háromszöghöz, ahol P és Q a T_b és T_c talppontok merőleges vetülete a BC oldalra. Eszerint

$$\frac{v}{w} = \frac{T_cQ}{T_bP} = \frac{T_cQ\colon MT_a}{T_bP\colon MT_a} = \frac{T_cC\colon MC}{T_bB\colon MB} = \frac{1\colon q_z^2}{1\colon q_y^2} = \frac{q_y^2}{q_z^2},$$

ahogy állítottuk. ∎

Az alábbi lemmának a megfogalmazása sokkal bonyolultabb, mint a bizonyítása, mégis érdemes külön megfogalmazni, mert ezen az egyszerű állításon múlik az Eckhart-féle eljárás.

1.3.7. Lemma. *Legyenek a síkon az $\check{A}$, $\check{B}$, $\check{C}$, és az $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ pontok egy-egy egyenesen úgy, hogy $(\check{A},\check{B},\check{C}) = (\hat{A},\hat{B},\hat{C})$. Legyenek továbbá $\check{e}$ és $\hat{e}$ egymást metsző egyenesek. Húzzunk az $\check{A}$, $\check{B}$ és $\check{C}$ pontokon keresztül az $\check{e}$ egyenessel párhuzamosan egy-egy $\check{e}_a$, $\check{e}_b$ és $\check{e}_c$ egyenest. Hasonlóan az $\hat{e}$ egyenessel is húzzunk párhuzamos $\hat{e}_a$, $\hat{e}_b$ és $\hat{e}_c$ egyeneseket az $\hat{A}$, $\hat{B}$ és $\hat{C}$ pontokon keresztül. Legyenek végül az $\bar{A} = \check{e}_a \cap \hat{e}_a$, $\bar{B} = \check{e}_b \cap \hat{e}_b$ és $\bar{C} = \check{e}_c \cap \hat{e}_c$ pontok ezen egyenesek metszetei.*

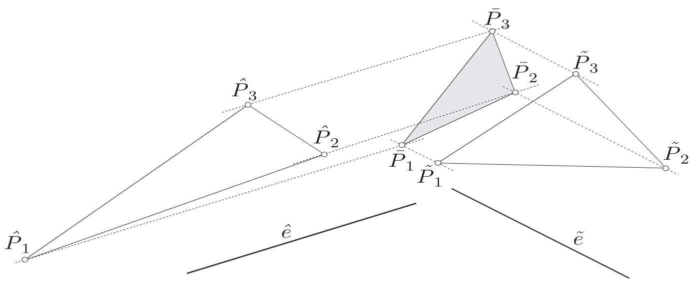
Ekkor az $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontok egy egyenesre esnek, és $(\bar{A},\bar{B},\bar{C}) = (\hat{A},\hat{B},\hat{C})$.

Bizonyítás. Legyen x az $\bar{A}$ és $\bar{C}$ közös egyenese, $\check{B}_x = x \cap \check{e}_b$, és $\hat{B}_x = x \cap \hat{e}_b$. Mivel a párhuzamos vetítés tartja az osztóviszonyt,

$$(\bar{A},\check{B}_x,\bar{C}) = (\check{A},\check{B},\check{C}) = (\hat{A},\hat{B},\hat{C}) = (\bar{A},\hat{B}_x,\bar{C}).$$

Mivel az osztóviszony egy-egyértelmű, ebből azonnal következik $\check{B}_x$ és $\hat{B}_x$ egybeesése, ami akkor már csak $\bar{B}$ lehet. ∎

1.3.8. Definíció. Az alábbi tétel első bekezdésében leírt eljárást, mely két axonometrikus képből egy újabbat gyárt, *Eckhart-féle eljárásnak* nevezik.



1.3.2. Ábra. Az Eckhart-féle eljárás egy háromszögre

Eckhart-féle eljárás. *Legyenek adottak egy síkon ugyanannak a térbeli alakzatnak különböző síkokra vett $\check{K}$ és $\hat{K}$ axonometrikus képei, valamint az egymást metsző $\check{e}$ és $\hat{e}$ egyenesek. Ha $\check{P}$ és $\hat{P}$ ugyanannak a P térbeli pontnak a két képe, akkor a $\bar{P}$ pontot a $\check{P}$ és $\hat{P}$ pontokon át az $\check{e}$ és $\hat{e}$ egyenesekkel párhuzamosan húzott egyenesek metszeteként definiáljuk.*

Az ezzel az eljárással a két axonometrikus képből alkotott új $\bar{K}$ kép annak az axonometrikus $\tilde{K}$ képnek, illetve valamely alkalmas mértékű nagyítottjának a perspektív képe, amelyet annak az e egyenesnek az irányába való merőleges vetítéssel kapunk, amelynek képei $\check{e}$ és $\hat{e}$.

Bizonyítás. Az e egyenes meghatározásához, az eredeti két képen lévő $\check{e}$ és $\hat{e}$ egyeneseken kell keresztül fektetnünk azt a két síkot, mely merőleges a megfelelő képsíkra. Ezen síkok metszete lesz az e egyenes. Tetszőlege térbeli P pontra legyen e_P a rajta keresztüli, az e egyenessel párhuzamos egyenes. Ennek képei legyenek $\check{e}_P$ és $\hat{e}_P$.

Ekkor $\check{e}_P$ és $\hat{e}_P$ párhuzamosak az $\check{e}$, illetve $\hat{e}$ egyenesekkel, és nyilván átmennek a $\check{P}$ és $\hat{P}$ pontokon. Eszerint az e egyenes irányába vetített P pont $\tilde{P}$ képe és az Eckhart-féle eljárással szerkesztett $\bar{P}$ pont között egy-egyértelmű a kapcsolat.

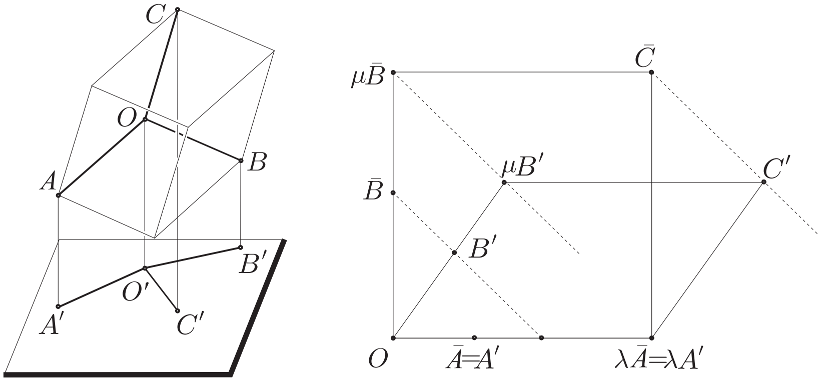
Mivel az összes leképezés, amely a $\tilde{P}$ és a $\bar{P}$ pontok kapcsolatát adja, egyenes- és osztóviszonytartó, az e irányú axonometrikus $\tilde{K}$ kép és az Eckhart-féle eljárással nyert $\bar{K}$ kép között is egyenes- és osztóviszonytartó leképezés van.

Egy-egy egymásnak megfelelő $\tilde{g}, \bar{g}$ egyenest tekintve, azok között is osztóviszonytartó a kapcsolat, amiért létezik olyan $\mathcal{N}$ nagyítás, melyet alkalmazva a $\tilde{K}$ képre, a $\mathcal{N}\tilde{g}$ egyenes már metrikusan megegyezik a $\bar{g}$ egyenessel. A projektív geometriából viszont ismert, hogy ekkor a $\mathcal{N}\tilde{K}$ és a $\bar{K}$ képek között csak perspektivitás lehet. ■

Az Eckhart-féle eljárás segítségével tehát mintegy körbe tudjuk járni az adott térbeli alakzatot, ha adott két axonometrikus képe. Az alábbi tétel viszont lényegében azt állítja, hogy egyetlen axonometrikus kép semmiképpen sem elegendő a térbeli alakzat felismeréséhez.

Pohlke-tétel — az axonometria alaptétele. *Egy síkon tetszőlegesen adott általános helyzetű $\bar{O}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontokhoz létezik a térben olyan kocka, melynek az O csúcsából kiinduló $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ és $\overline{OC}$ éleinek valamely axonometrikus képei rendre $\overline{\bar{O}\bar{A}}$, $\overline{\bar{O}\bar{B}}$ és $\overline{\bar{O}\bar{C}}$.*

Bizonyítás. Mivel itt valójában az ABC sík megfelelő vetületét keressük egy az O origót tartalmazó képsíkra, és ezek a képsíkok metszik egymást, az 1.3.1 tétel értelmében elegendő a merőleges vetületeket vizsgálni, majd azokból valamely origón átmenő tengelyre vonatkozó tengelyes affinitással képezni a kívánt axonometrikus képet.



1.3.3. Ábra. Kocka és axonometrikus képe a Pohlke-tételben

Vetítsük a tér $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ és $C = (0, 0, 1)$ pontjait az O origón átmenő $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$ normálisú $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ síkra merőlegesen. Ez éppen egy kocka három szomszédos élének merőleges vetülete. A merőlegesen vetített pontok legyenek O, A', B' és C'.

Olyan, $\boldsymbol{n}$ normálist keresünk, melyre $C' = \lambda A' + \mu B'$, ahol $\bar{O}\bar{C} = \lambda \bar{O}\bar{A} + \mu \bar{O}\bar{B}$, és az általános helyzet miatt $\lambda \neq 0 \neq \mu$.

Könnyű látni, hogy $A' = A - \boldsymbol{n}\langle \boldsymbol{n}, A\rangle$, $B' = B - \boldsymbol{n}\langle \boldsymbol{n}, B\rangle$, és $C' = C - \boldsymbol{n}\langle \boldsymbol{n}, C\rangle$, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jelenti a szokásos euklideszi skaláris szorzást a vektortéren. Ebből

$$A' = (1 - x^2, -xy, -xz),\ B' = (-xy, 1 - y^2, -yz),\ \text{és } C' = (-xz, -yz, 1 - z^2),$$

amiért $xA' + yB' + zC' = 0$, vagyis az $\boldsymbol{n}$ normálisra a $\lambda = -x/z$ és $\mu = -y/z$ egyenletek adódnak, ha $z \neq 0$.

Ha $z = 0$, akkor C' az origóba esik, amiért az O, A', B' és C' pontok nem általános helyzetűek. Mivel azonban az $\bar{O}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontok általános helyzetűek, a továbbiakban feltehető, hogy $z \neq 0$, és ugyanígy $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Eszerint egyenleteink $\lambda^2(1 - x^2 - y^2) = x^2$ és $\mu^2(1 - x^2 - y^2) = y^2$, vagyis $\lambda^2 = x^2(1 + \lambda^2) + \lambda^2 y^2$ és $\mu^2 = \mu^2 x^2 + y^2(1 + \mu^2)$ alakúak, aminek a megoldása

$$x^2 = \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2}, \qquad y^2 = \frac{\mu^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2}, \qquad \text{és} \qquad z^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2 + \mu^2}.$$

Legyen tehát $\boldsymbol{n} = (\frac{\lambda}{1+\lambda^2+\mu^2}, \frac{\mu}{1+\lambda^2+\mu^2}, \frac{-1}{1+\lambda^2+\mu^2})$, aminek következtében $C' = \lambda A' + \mu B'$ teljesül az O, A', B' és C' képpontokra. Ekkor az $OABC$ pontok által meghatározott kockát megfelelően kicsinyítve vagy nagyítva az O pontból az O, A', B' és C' képpontokra érvényes lesz az $|\bar{O}\bar{A}| = |A'|$ egyenlőség is, és természetesen $C' = \lambda A' + \mu B'$ is érvényben marad.

Izometrikus transzformációval hozzuk most a $\bar{O}\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ síkot a képsíkunkkal fedésbe úgy, hogy $\bar{O} = O$ és $\bar{A} = A'$ legyen, valamint $\bar{B}$ és $\bar{C}$ rendre az OA'' egyenes ugyanazon félsíkjába essen, mint B' és C' (tekintve, hogy $C' = \lambda A' + \mu B'$, ez egyértelműen lehetséges). Ekkor $O(\mu B')C'(\lambda A')$ és $O(\mu\bar{B})C(\lambda\bar{A})$ is paralelogramma, ezért a $(\mu\bar{B})(\mu B')C'\bar{B}$ is paralelogramma. A párhuzamos szelők tétele miatt $(\mu\bar{B})(\mu B') \parallel \bar{B}B'$. Vegyük az O, A', B' és C' képpontoknak az OA' és $\bar{B}B'$ tengelyekre vett O, A'', B'' és C'' affin képét úgy, hogy az OA' tengely pontonként fix — vagyis $A'' = A'$ —, a $\bar{B}B'$ tengelyen viszont az affinitás a B' pontot olyan $B'' = B$ pontba viszi. A bevezetőben jelzettek miatt ez a tengelyes affinitás — ami valójában azt jelenti, hogy a vetítés irányát nem változtatva, a képsíkot az OA' tengely körül a megfelelő mértékben elforgatjuk — egy axonometrikus képet hoz létre, vagyis $OA''B''C''$ az $OABC$ kockaélek axonometrikus képe, és $\bar{A} = A''$, $\bar{B} = B''$. Az affinitás tartja a paralelogrammákat, így $C'' = \lambda A'' + \mu B'' = \lambda\bar{A} + \mu\bar{B} = \bar{C}$ is teljesül, ami bizonyítja az állítást. ■

A bizonyításból egy kicsit több is kijött, mint amit állítottunk, mégpedig az, hogy a kocka helyzete (nem a távolsága!) az adott síkhoz képest, tükrözés erejéig egyértelműen meghatározott, és így akkor már éleinek hossza is egyértelmű.

1.3.1. Példák és feladatok

Gauss tétele. *Ha a képsíkon komplex számsík van, melynek origója egy egységnyi élű kocka csúcsának képe, akkor az ebből a csúcsból kiinduló három $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ él a, b és c képére*

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 2, \quad \textit{és} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Bizonyítás. Az első egyenlet a rövidülésekre ismert egyenlet, ezért valójában csak a második egyenlettel kell foglalkoznunk.

Vetítsük a tér $O = (0,0,0)$, $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ és $C = (0,0,1)$ pontjait az O origón átmenő $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$ normálisú ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) síkra. Ez éppen egy kocka három szomszédos élének vetülete. A merőleges vetítés utáni pontok legyenek O', A', B' és C'. Ezeket könnyű kiszámítani: $A' = A - \boldsymbol{n}\langle\boldsymbol{n}, A\rangle$, $B' = B - \boldsymbol{n}\langle\boldsymbol{n}, B\rangle$, és $C' = C - \boldsymbol{n}\langle\boldsymbol{n}, C\rangle$, ahol $\langle ., . \rangle$ jelenti a szokásos euklideszi skaláris szorzást a vektortéren. Ebből $A' = (1 - x^2, -xy, -xz)$, $B' = (-xy, 1 - y^2, -yz)$ és $C' = (-xz, -yz, 1 - z^2)$.

Ahhoz, hogy az a, b és c komplex számok koordinátáit meg tudjuk mondani, szükségünk van egy ortonormált bázisra az adott síkon. Ilyet adnak az

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(y, -x, 0) \quad \text{és} \quad \boldsymbol{k} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(-zy, -zx, 1 - z^2)$$

vektorok. A síknak ebben a bázisában felírva az A', B' és C' pontok koordinátáit, azonnal adódik, hogy

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(y\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k}) &&\Rightarrow\quad a = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(y - xzi),\\
B' &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(-x\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k}) &&\Rightarrow\quad b = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(-x - yzi),\\
C' &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(1-z^2)\boldsymbol{k} &&\Rightarrow\quad c = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(1-z^2)i,
\end{aligned}$$

ahol $i = \sqrt{-1}$ a komplex egység. Innen a tételben szereplő második formula bizonyítása egyszerű számolás, ami az olvasóra marad. ■

Pohlke-tétel variáns. *Egy síkon tetszőlegesen adott általános helyzetű $\bar{O}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontokhoz létezik a térben olyan téglatest, melynek az $O = \bar{O}$ csúcsával szomszédos A, B és C csúcsainak merőleges vetülete éppen $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$.*

Bizonyítás. Legyenek adottak a képsíkon az $O = \bar{O}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontok, és legyen $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{O\bar{A}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{O\bar{B}}$ és $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{O\bar{C}}$, valamint $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a} + a\boldsymbol{n}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b} + b\boldsymbol{n}$ és $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c} + c\boldsymbol{n}$, ahol $\boldsymbol{n}$ az $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ képsík normálisa.

Az A, B és C pontok pontosan akkor alkotják az egyik csúcsával az O pontban elhelyezett $\mathcal{T}$ téglatest O csúcsának három szomszédos csúcsát, ha $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $0 = \langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\rangle = \langle\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\rangle = \langle\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\rangle$. Behelyettesítve ebbe a fenti formulákat, az adódik, hogy

$$0 = ab + \langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = bc + \langle\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle = ca + \langle\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\rangle,$$

amiből az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok páronként nem merőlegesek, akkor

$$a^2 = \frac{-\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle\langle\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\rangle}{\langle\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle}, \quad b^2 = \frac{-\langle\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\langle\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\rangle}, \quad c^2 = \frac{-\langle\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\rangle\langle\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle}{\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy létezik pontosan egy olyan, az egyik csúcsával az O pontban elhelyezett $\mathcal{T}$ téglatest, melynek O csúcsával szomszédos három csúcsa, éppen az A, B és C pontok.

Ha mondjuk $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$, vagyis $\langle\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle = 0$, akkor $bc = 0$, amiért $b = 0$ és $c = 0$ legalább egyike teljesül.

Ha $b = 0$ és $c = 0$ egyszerre teljesül, akkor $0 = \langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \langle\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle = \langle\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\rangle$, vagyis az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok páronként merőlegesek, holott egy síkban helyezkednek el, amiért egyikük nulla, vagyis az $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontok egyike egybeesik az O ponttal. Bármely csúcs is esik az O pontba, a másik két vektor merőleges, ezért nyilván végtelen sok olyan, az egyik csúcsával az O pontban elhelyezett $\mathcal{T}$ téglatest létezik, melynek O csúcsával szomszédos három csúcsának merőleges vetülete, éppen az $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontokba esik.

Ha $b = 0$ és $c \neq 0$, akkor $0 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$, vagyis az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok merőlegesek a $\boldsymbol{b}$ vektorra, tehát az $\bar{A}$, $\bar{C}$ és O pontok kollineárisak. Ekkor tetszőlegesen választva a c számot, pontosan egy a értékre telejsül a$0 = ca + \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \rangle$ egyenlőség, ami azt jelenti, hogy ekkor pontosan egy olyan, az egyik csúcsával az O pontban elhelyezett $\mathcal{T}$ téglatest, melynek O csúcsával szomszédos három csúcsa, éppen az A, B és C pontok.

Eszerint mindig van legalább egy olyan, az egyik csúcsával az O pontban elhelyezett $\mathcal{T}$ téglatest, melynek O csúcsával szomszédos három csúcsát a merőleges vetítés éppen az $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontokba viszi. ■

1.3.9. Tétel. *Egy kör axonometrikus képe ellipszis.*

Bizonyítás. Bebizonyítjuk, hogy bármely kúpszelet axonometrikus képe kúpszelet, abból már következik a feladat állítása. Ezt a projektív geometriában ismert állítást más módon fogjuk bizonyítani.

Tudjuk, hogy a kúpszeletek az analitikus geometriában éppen a másodfokú görbék. Ezért elég azt bebizonyítani, hogy minden másodfokú görbe képe másodfokú görbe. Tegyük tehát fel, hogy adott az $f(x, y) = 0$ egyenletű másodfokú görbe az S_t síkon, és nézzük ennek merőleges vetületét az S_k síkra. Természetesen, ha a két sík párhuzamos, akkor az állítás triviális, ha meg merőlegesek egymásra, akkor az állítás értelmetlen, ezért feltehető, hogy a két sík metszi egymást, és nem merőleges egymásra.

Feltehetjük, hogy a koordinátarendszert az S_t síkon eleve úgy vettük fel, hogy annak x-tengelye éppen a két sík metszete, y-tengelye pedig erre merőleges.

Vegyük tehát az S_k síkon azt a koordinátarendszert, melynek t-tengelye szintén a két sík metszete, míg s-tengelye az S_t sík y-tengelyének merőleges vetülete. Legyen a két sík szöge α. Ekkor a merőleges vetítés az $(x, y) \mapsto (t = x, s = y \cos \alpha)$ koordináta-transzformációval írható le, így a vetített görbe egyenlete $f(t, \frac{s}{\cos \alpha}) = 0$. Nyilvánvalóan ez is másodfokú egyenlet, amiért az általa leírt görbe kúpszelet. ■

1.3.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy sík tetszőleges másik síkra való tetszőleges párhuzamos vetülete előállítható egy alkalmas merőleges vetületként, ha a vetületen minden szakasz legfeljebb akkora, mint az eredetin volt!

1.3.11. Feladat. Bizonyítsuk be közvetlenül, hogy az Eckhart-féle eljárás nem csak a merőleges vetítés esetén működik!

1.3.12. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy kocka három szomszédos élének axonometrikus képéből kettő egy ellipszis konjugált félátmérője, a harmadik pedig ezen ellipszis kistengelyével azonos állású!

1.3.13. Feladat. Szerkesszük meg az Eckhart-féle eljárás alkalmazásával egy szabályos tetraédernek az egyik élére merőleges síkon keletkező axonometrikus képét!

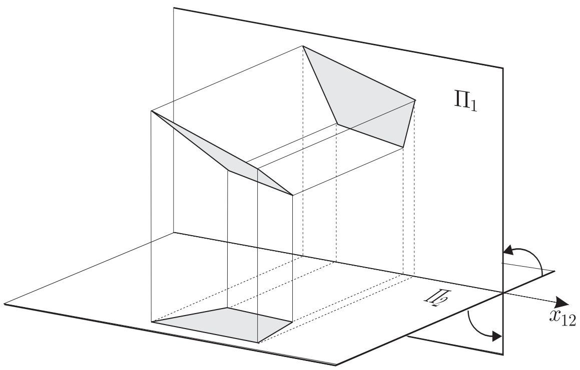
1.3.14. Feladat. Igazoljuk többféleképpen is, hogy a nyomháromszög hegyesszögű!

1.3.15. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszög alapú hasábnak van bármely háromszöghöz hasonló síkmetszete.

1.4. Monge-féle ábrázolás

A Monge-féle ábrázolás az axonometria továbbfejlesztése, több képsík felvételével. Itt csak a legfontosabb esettel foglalkozunk, amikor a két képsík merőleges egymásra.

1.4.1. Definíció. A *Monge-féle vetítőrendszer* két egymásra merőleges Π_1 és Π_2 képsíkból áll. Ezek metszetét $x_{1,2}$-*egyenesnek* nevezik. A Π_1 és Π_2 síkokon merőleges vetítés adja a két képet, melyből a Monge-féle képet a Π_2 síknak az $x_{1,2}$-tengely körül a Π_1 síkba való beforgatásával kapjuk.

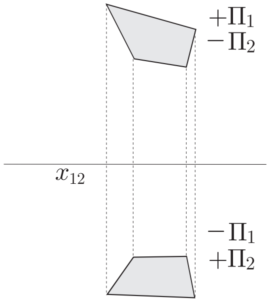


1.4.1. Ábra. A Monge-féle vetítőrendszer. Nyíl jelöli a beforgatás irányát.

Figyeljük meg, hogy a Monge-féle vetítőrendszer négy térnegyedre osztja a teret, az $x_{1,2}$-tengely pedig két félsíkra osztja a képsíkot. Az, hogy egy térbeli pont a négy térnegyed melyikében helyezkedik el — könnyű utána gondolni — a képeiből is megállapítható.

A Monge-féle kép kapcsán mindig két képről fogunk beszélni, annak megfelelően, ahogy azok a két képsíkhoz kötődnek.

1.4.2. Definíció. A Monge-féle képen azokat az egyeneseket, melyek merőlegesek az $x_{1,2}$-tengelyre, *rendezőegyenesnek* nevezzük.



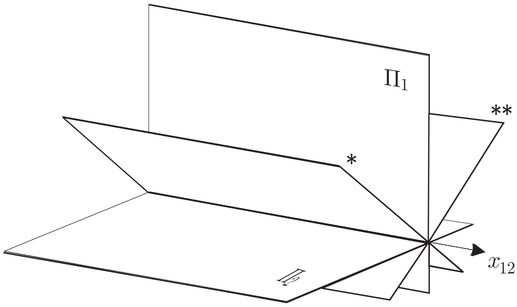
1.4.2. Ábra. Négyszög Monge-féle képei.

Nyilvánvalóan bármely térbeli pont két képe egy rendezőegyenesre esik.

1.4.3. Definíció. A Monge-féle ábrázolásnál egy térelem *Monge-féle nyomai* a térelemnek a képsíkokkal alkotott metszetei.

Tehát a rendezőegyenes egy, mind a két képsíkra merőleges sík nyomvonala.

1.4.4. Definíció. Azt a síkot, mely az $x_{1,2}$-tengelyre illeszkedik, és egyenlő szöget zár be mind a két képsíkkal, *szimmetriasíknak*, illetve *koincidenciasíknak* nevezzük, attól függően, hogy beforgatáskor a forgó Π_2 sík nem súrolja, illetve súrolja azt.



1.4.3. Ábra. A szimmetriasíkot $*$, a koincidenciasíkot $**$ jelöli.

A szimmetriasík pontjainak képei a Monge-féle síkon az $x_{1,2}$-tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el, a koincidenciasík pontjainak képei pedig egybeesnek.

1.4.5. Definíció. Az $x_{1,2}$-tengelyre merőleges síkot *kontúrsíknak*, ennek egyeneseit *kontúregyeneseknek* nevezzük.

Bár a következő állítások többsége igaz maradna enélkül is, az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az állításokban szereplő egyenesek nem kontúregyenesek, a síkok nem kontúrsíkok. Ha mégis szükség volna ezen partikuláris esetek bizonyítására, az olvasó egy harmadik vetítősík használatával gyorsan kiküszöbölheti a bizonyításban esetleg felmerülő problémát.

1.4.6. Tétel.

(1) *Mindkét kép tartja az osztóviszonyt.*
(2) *Egy pont akkor és csak akkor van rajta egy egyenesen, ha mindkét képe rajta van az egyenes megfelelő képén.*
(3) *Egy egyenes akkor és csak akkor van rajta egy síkon, ha mindkét nyompontja rajta van a sík megfelelő nyomegyenesén.*
(4) *Két egyenes akkor és csak akkor metszi egymást, ha megfelelő képeik metszetei egy rendezőegyenesre esnek.*
(5) *Egy egyenes akkor és csak akkor illeszkedik egy síkra, ha képeinek metszetei a sík két egyenesének képeivel egy-egy rendezőegyenesre esnek.*
(6) *Két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha képeik párhuzamosak.*
(7) *Két sík akkor és csak akkor párhuzamos, ha nyomegyeneseik párhuzamosak.*
(8) *Egy egyenes koincidenciasíkra eső pontjának képe, a két képének metszete.*
(9) *Egy egyenes akkor és csak akkor merőleges egy síkra, ha képei merőlegesek a nyomegyenesekre.*

Bizonyítás. Az (1)—(3) állítások triviálisak. A (4) állítás igazolásához elég azt látni, hogy ha van metszéspont, akkor annak két képe egy rendezőegyenesre esik. Az (5) állítás a (4) közvetlen következménye. A (6)—(8) állítások nyilvánvalóak.

Az utolsó, (9) állításhoz azt kell észrevenni, hogy egy egyenes képe tulajdonképpen egy rajta átfektetett, az adott képsíkra merőleges „vetítősík” nyomvonala. Ha az egyenes merőleges az adott síkra, akkor ez a „vetítősík” is merőleges az adott síkra. Eszerint az adott sík és a képsík metszete, mely az adott sík nyomvonala, a „vetítősíkra” merőleges egyenest ad, hiszen mindketten merőlegesek arra. Márpedig ez igazolja állításunk, hiszen ha a nyomegyenes merőleges a vetítősíkra, akkor annak minden egyenesére is az. ∎

A Monge-féle ábrázolásban egy újabb térelem meghatározása, szerkesztése általában bizonyos egyszerű, alapvető szerkesztési lépések alkalmazásával történik. Ezeket a standard eljárásokat tekintjük át az alábbiakban. Ez az áttekintés azt is mutatja, persze nem szigorúan bizonyító módon, hogy szinte minden, a mérnöki gyakorlatban elképzelhető térbeli szerkesztés elvégezhető ebben a rendszerben, mégpedig tulajdonképpen egyszerűnek mondható eljárásokkal. Nem véletlen tehát, hogy a mai napig ez az ábrázolási mód a tervező mérnökök elsődleges eszköze.

Monge-féle alapszerkesztések. *Az alábbi térelemek megszerkeszthetők:*
(1) *két pont közös egyenese,*
(2) *egy egyenes nyompontjai,*
(3) *két nyomvonalaival adott sík metszésvonala,*
(4) *metsző egyenesek közös síkjának nyomvonalai,*
(5) *egy pont és egy egyenes közös síkjának nyomvonalai, és*
(6) *nyomvonalaival adott sík és egyenes metszéspontja.*

Bizonyítás. (1) Egyszerűen össze kell kötnünk a két pont megfelelő képeit, hogy megkapjuk az egyenes megfelelő képeit.

(2) Vegyük észre, hogy a képsíkok valamelyikén lévő pont másik képe mindig az $x_{1,2}$-tengelyre esik, ezért a szerkesztéskor egyszerűen az egyenes képeinek metszeteit kell venni az $x_{1,2}$-tengellyel, majd, hogy az ezekhez tartozó másik képpontot is megkapjuk, az ezekből indított rendezőegyenesek metszeteit kell venni a megfelelő másik képegyenessel.

(3) A megfelelő nyomvonalak metszetei itt éppen a metszet egyenesének két nyompontját adják, amiből az (1) állítás szerint az egyenes megszerkeszthető.

(4) Csak azt kell észrevenni, hogy az egyenesek nyompontjai, melyeket a (2) állítás szerint meg tudunk szerkeszteni, rajta vannak a közös sík nyomvonalain, ezért a nyompontok összekötésével kapjuk a nyomegyeneseket.

(5) Jelöljük ki először az adott egyenes egy tetszőleges pontját, melynek képeit egyszerűen egy rendezőegyenes metszi ki az egyenes képeiből. Az adott pontnak és ennek a pontnak a közös egyenesét az (1) állítás szerint meg tudjuk szerkeszteni, és így két metsző egyenesünk lesz, a keresett síkban. Ezt már a (4) állítás alapján meg tudjuk szerkeszteni.

(6) Mivel egy sík nyomvonalának mint egyenesnek a másik képe mindig az $x_{1,2}$-tengely, és erről az egyenesről az (5) megoldásában már említett módon, egy rendezőegyenes segítségével tudunk választani egy pontot. Ez a pont rajta lesz a síkon. Ennek a pontnak és az adott egyenesnek a közös síkját az (5) állítás szerint szerkesztjük meg. A két sík metszésvonalát a (3) állítás alapján szerkesztjük. Ennek a metszésvonalnak és az adott egyenesnek a metszéspontja éppen a sík és az egyenes metszéspontja, amelyet egyszerűen az egyenesek megfelelő képeinek metszetei adnak. ∎

Az ebben a tételben megadott szerkesztési eljárásokra a továbbiakban sorszámuk szerint mint alapszerkesztésekre fogunk hivatkozni. Természetesen további alapműveletek is vannak, amelyeket már külön tételben fogalmaztunk meg alább.

1.4.7. Definíció. Azt a műveletet, amikor egy adott síkot valamely nyomvonala körül éppen akkora szöggel forgatunk el, hogy az egybeessen a megfelelő képsíkkal, *beforgatásnak* nevezzük.

A beforgatást azért szokás metrikus alapszerkesztésnek nevezni, mint ahogy az alábbi tételben mi is tesszük, mert így a síkbeli alakzattal egybevágó, vagyis metrikusan megegyező ábra rajzolható.

Metrikus alapszerkesztés. *Egy síkbeli alakzatnak a sík bármely nyomvonala körüli beforgatása a megfelelő képsíkba a Monge-féle képe alapján megszerkeszthető.*

Bizonyítás. Csak a második képen lévő nyomvonalra írjuk le az eljárást, mert a másik nyomvonalra nyilvánvalóan teljesen analóg módon elvégezhető a szerkesztés.

A szerkesztés két ütemben valósul meg. Először megszerkesztjük a sík egy tetszőleges, nem az adott nyomvonalon lévő pontjának a beforgatottját, majd ennek segítségével már egyszerűbb módon határozzuk meg a többi pont beforgatottját.

Jelöljük egy P pont képeit a P_1 illetve a P_2 szimbólumokkal, attól függően, hogy az első vagy a második képről van szó. A pont beforgatottját a második nyomvonal körül $\hat{P}$ jelöli.

Vegyük észre, hogy az adott sík második, n_2 nyomvonalára nézve merőleges egyeneseinek a beforgatottjai is merőlegesek az n_2 nyomvonalra, ezért a $\hat{P}$ pontot a P_2 pontból az n_2 nyomvonalra bocsájtott merőlegesen kell keresnünk. Legyen ennek a merőlegesnek a talppontja az n_2 nyomvonalon T. Ekkor a $PTP_2\triangle$ derékszögü háromszögben ismerjük a TP_2 befogót, valamint a PP_2 átfogót, hiszen ez utóbbi hossza megegyezik a P pont első, P_1 képének az $x_{1,2}$-tengelytől mért távolságával. Ez alapján már meg tudjuk szerkeszteni PT távolságot, amely természetesen megegyezik a $\hat{P}T$ távolsággal. Ezt a távolságot felmérve tehát a T ponttól a TP_2 egyenesére, megkapjuk a P pont keresett $\hat{P}$ beforgatottját.

A további pontok beforgatottjainak szerkesztéséhez a beforgatás egyenestartását fogjuk kihasználni. Ha tehát egy Q pont $\hat{Q}$ beforgatottját kell megszerkesztenünk, akkor már a fentiekből tudjuk, hogy azt a Q pontból az n_2 nyomvonalra bocsájtott merőlegesen kell keresni. Azt is tudjuk, hogy PQ egyenese ugyanabban az X pontban metszi az n_2 nyomvonalat, amelyben a $\hat{P}\hat{Q}$ beforgatottja. Eszerint a $\hat{Q}$ pont a $X\hat{P}$ egyenesen van, így ennek metszete az előbb említett merőlegessel éppen a Q pont $\hat{Q}$ beforgatottját adja. ∎

1.4.8. Definíció. Térbeli alakzat vetítősugár körüli elforgatását *rotációnak* nevezzük.

A rotáció persze a képsíkrendszer mozgatásaként is felfogható úgy, hogy az adott vetítősugárral párhuzamos képsíkot forgatjuk el az adott szöggel, de ellenkező irányba. Mivel a két képsíknak ilyen, vagyis az egymáshoz képesti merőlegességet tartó forgatásaival a két sík bárhova átvihető, a rotációval teljesen körbe tudjuk járni a térbeli alakzatot.

Rotáció szerkesztése. *Egy térbeli alakzatnak bármely vetítősugár körüli rotációja a Monge-féle képe alapján megszerkeszthető.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a vetítősugár az első, Π_1 képsíkra merőleges. Amikor az alakzatot elforgatjuk ezen egyenes körül, a Π_1 képsíkon is elfordul a kép, mégpedig a forgatás szögének -1-szeresével. Ennek szerkesztését nem kell részleteznünk.

A második, Π_2 képsíkon az egyes pontok új képeiről két dolgot tudunk. Először is rajta kell legyenek az első kép rendezőegyenesén, másodszor az $x_{1,2}$-tengelytől való távolságuk nem változik. Ez elegendő a szerkesztéshez. ■

A rotáció és az alább definiálandó transzformáció lényegében ugyanaz, inkább csak szemléletbeli különbségek vannak, ugyanúgy, ahogy a rotációnál már említettük.

1.4.9. Definíció. A Monge-féle vetítőrendszer megváltoztatását más merőleges síkpárra *transzformációnak* nevezzük.

Transzformáció szerkesztése. *Egy térbeli alakzatnak bármilyen merőleges síkpárra eső Monge-féle képe egyetlen, rögzített Monge-féle képe alapján megszerkeszthető.*

Bizonyítás. A szerkesztést több lépésben hajtjuk végre, egyszerre mindig csak az egyik képsíkot változtatva. Ehhez előbb meg kell mutatnunk, hogy bármely merőleges síkpár elérhető ilyen lépésekkel.

Legyen az elérendő merőleges $\bar{\Pi}_1$, $\bar{\Pi}_2$ síkpár metszete az l egyenes. Ekkor első lépésben úgy forgatjuk a Π_2 síkra merőleges vetítősugár körül a Π_1 képsíkot, hogy az párhuzamos legyen az l egyenessel. Második lépésben úgy forgatjuk a Π_1 síkra merőleges vetítősugár körül a Π_2 képsíkot, hogy az is párhuzamos legyen az l egyenessel. Harmadszor a Π_2 síkra merőleges vetítősugár körül a Π_1 képsíkot úgy forgatjuk, hogy merőleges legyen az l egyenesre. Negyedik lépésben az l körül a Π_2 képsíkot úgy forgatjuk, hogy párhuzamos legyen a $\bar{\Pi}_2$ képsíkkal. Végül a Π_2-re merőleges vetítősugar körül úgy forgatjuk el a Π_1-síkot, hogy a $\bar{\Pi}_1$ síkkal legyen párhuzamos, majd párhuzamosan eltoljuk a két képsíkot úgy, hogy a $\bar{\Pi}_1$ és $\bar{\Pi}_2$ síkokkal egybeessenek.

Most már elég bizonyítani, hogy a felsorolt térbeli mozgások a képsíkokon is szerkeszthetők.

Ha valamelyik képsíkot párhuzamosan eltolom, akkor sem a rajta, sem a másik képsíkon keletkező kép nem változik, így a szerkesztés csak annyi, hogy eltoljuk az $x_{1,2}$-tengelyt, és vele együtt a megfelelő képet is.

Ha valamelyik képsíkot elforgatjuk, akkor a szerkesztés nagyon hasonló lesz a rotációhoz. Egyrészt a nem mozgatott képsíkon a kép persze változatlan, másrészt azonban ekkor megváltozik az $x_{1,2}$-tengely, mégpedig a forgatás szögével elfordul. Ezután a szerkesztés teljesen ugyanaz, mint a rotációnál, hiszen az új képet az $x_{1,2}$-tengelytől mért változatlan távolságoknak a változatlan kép rendezőegyeneseire való felmérésével kapjuk. ■

1.4.1. Példák és feladatok

1.4.10. Probléma. Adott az e és a g egyenes, valamint a P pont. Szerkesszük meg azt a h egyenest, mely átmegy a P ponton, és metszi az e és g egyenest!

Megoldás. Csak néhány alapszerkesztésre van szükség. Az (5) alapszerkesztéssel meghatározzuk az e egyenes és a P pont közös S síkját. A (6) alapszerkesztéssel meghatározzuk a g egyenes és az S sík Q metszéspontját. Végül az (1) alapszerkesztés a P és a Q pontra adja a keresett h egyenest. ■

1.4.11. Probléma. Képeivel adott az A pont és az a egyenes. Szerkesszük meg azt a derékszögű $ABC\triangle$ háromszöget, melynek BC átfogója az a egyenesre esik, és a B pontnál lévő szöge $60°$!

Megoldás. Az (5) alapszerkesztéssel megkapjuk az A pont és az a egyenes közös S síkjának nyomvonalait. A metrikus alapszerkesztés alapján ezt a síkot beforgatjuk a második, n_2 nyomvonala körül, és a beforgatott $\hat{A}$ pont és $\hat{a}$ egyenes ismeretében megszerkesztjük az $ABC\triangle$ háromszög beforgatottját, vagyis azt az $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\triangle$ derékszögű háromszöget, melynek $\hat{B}\hat{C}$ átfogója rajta van az $\hat{a}$ egyenesen, és a $\hat{B}$ pontnál lévő szöge $60°$.

Megfordítva most a beforgatás szerkesztésének menetét, állítsunk merőlegest a $\hat{B}$ és $\hat{C}$ pontokból az S sík n_2 nyomvonalára. A B és C pontok második képei ezeken is rajta kell legyenek, meg az a egyenes második képén is rajta vannak, így ezek metszetei adják a B_2 és a C_2 pontot. Meghúzva ezeken keresztül a rendezőegyeneseket, azok az a egyenes első képéből kimetszik a B_1 és C_1 pontokat, amivel a szerkesztés teljessé válik. ■

1.4.12. Probléma. Szerkesszük meg az egymást metsző S sík és e egyenes szögét!

Megoldás. Két megoldást ismertetünk. Az egyik a metrikus alapszerkesztésre épül, a másik a transzformációra.

($\imath$) A (6) alapszerkesztéssel szerkesszük meg az egyenes és a sík P metszéspontját. Vegyünk fel az egyenesen egy tetszőleges Q pontot. (Egy rendezőegyenes a képéből éppen egy pont két képét metszi ki.)

Az előző szakasz első tételéből tudjuk, hogy egy egyenes akkor és csak akkor merőleges egy síkra, ha képei merőlegesek annak nyomvonalaira. Ebből kiindulva az e egyenesen most felvett Q pontból merőlegest bocsájtunk az S síkra. Ennek a g egyenesnek a képeit ugyanis úgy kapjuk, hogy a Q pont képeiből merőlegest állítunk az S sík megfelelő nyomvonalaira.

A (6) alapszerkesztéssel határozzuk meg az S sík és a rá merőleges g egyenes T metszéspontját. A $TPQ\sphericalangle$ éppen az S sík és az e egyenes keresett szöge. A (4) alapszerkesztéssel meghatározzuk az e és a g egyenes közös síkját, mely merőleges az S síkra. A metrikus alapszerkesztés alapján ezt a síkot, és vele együtt a $TPQ\triangle$ háromszöget, beforgatjuk a második nyomvonala körül. Ezután a $\hat{T}\hat{P}\hat{Q}\triangle$ háromszögből ki tudjuk olvasni a keresett szöget.

($\imath\imath$) A transzformáció lépéseit alkalmazzuk, a következők szerint. Elforgatjuk a második, Π_2 képsíkot úgy, hogy az S sík első, n_1 nyomvonalára merőleges legyen. Ezután az első, Π_1 képsíkot forgatjuk el úgy, hogy az merőleges legyen az S sík most már új második nyomvonalára. Ekkor tehát az S sík merőleges lesz a Π_2 képsíkra, és párhuzamos lesz a Π_1 képsíkkal.

Az utolsó lépésünk az lesz, hogy a Π_2 képsíkot úgy forgatjuk el, hogy az párhuzamos legyen az e egyenes most már új első képével. Ezzel azt érjük el, hogy az e egyenes második képe és az S sík második nyomvonala éppen akkora szöget fog bezárni, mint amekkora az e egyenesnek és az S síknak a szöge, amelyet meg kellett határoznunk. ■

1.4.13. Feladat. Adott egy sík három pontjával, és egy egyenes két pontjával. Szerkesszük meg a metszéspontjukat!

1.4.14. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy kör mindkét képe ellipszis, és mindkét ellipszisnek a nagytengelye éppen a kör átmérője!

1.4.15. Feladat. Adott egy e egyenes és egy AC szakasz a végpontjai által. Szerkesszük meg azt a B pontot ezen a szakaszon, melyre az $[eA]$ sík és a $[eB]$ sík bezárt szöge éppen háromszor akkora, mint az $[eB]$ sík és az $[eC]$ sík bezárt szöge! ([..] jelöli a zárójelben lévő elemek meghatározta síkot.)

1.4.16. Feladat. Adottak az e és az f kitérő egyenesek. Szerkesszük meg a távolságukat!

1.4.17. Feladat. Adottak az e és az f kitérő egyenesek, valamint az α és β szögek. Szerkesszük meg azt a g egyenest, mely az e egyenest α, az f egyenest pedig β szögben metszi! (Ha $\alpha = \beta = 90°$, akkor ez a feladat az előzőre egyszerűsödik.)

1.5. Sztereografikus projekció

Ebben a szakaszban egy olyan ábrázolási módszert fogunk áttekinteni, mely a térképészet számára fontos. A sztereografikus projekció a gömbnek síkon való szög- és körtartó ábrázolását teszi lehetővé.

1.5.1. Definíció. A *sztereografikus projekció vetítőrendszere* a Γ gömbnek egy adott S szempontjából, valamint egy, az S pontból húzott átmérőre merőleges, az S ponton nem átmenő Π képsíkból áll. Maga az ábrázolás a Γ gömb pontjainak az S szempontból a Π képsíkra való vetítése az S ponton átmenő egyenesekkel.

Nyilvánvalóan ez a definíció nem határozza meg egyértelműen a képsíkot, de az is világos, hogy két különböző képsíkon kialakuló két kép homotécia erejéig megegyezik. Ezért mi ezentúl azt a képsíkot fogjuk használni, amely a gömböt az S szemponttal átellenes pontban érinti.

Érdemes még megjegyezni, hogy az S szemponton kívül a gömb minden pontjának van képe. Az, hogy egy gömbnek nincsen olyan folytonos leképezése a síkra, mely egy-egyértelmű, az a gömb és a sík topológiai különbözősége miatt van: a sík egy pontra összehúzható, a gömb nem.

Mielőtt első tételünket megfogalmaznánk, tisztáznunk kell egy alapfogalmat a gömbi geometriával kapcsolatban.

1.5.2. Definíció. Két, a gömbfelszínen haladó egymást metsző görbe *gömbi szögén* két olyan, a metszéspontjukon és a gömb középpontján áthaladó sík szögét értjük, melyek simulnak az egyik, illetve a másik görbéhez.

Ez a definíció tartalmilag persze megegyezik a differenciálgeometriában megszokott szögfogalommal.

Két megfigyelést érdemes itt feljegyeznünk. Egyrészt, hogy két főkör szöge éppen az őket a gömbből kimetsző sík szöge. Másrészt, hogy két gömbi görbe szöge eszerint nem más, mint a metszéspontjukban vett érintőik szöge, vagyis a gömbi szög ugyanaz, mint a közönséges térbeli szög.

1.5.3. Lemma. *A sztereografikus leképezés a szemponttól megfosztott nyitott gömbön az azonos érintővel rendelkező gömbi görbéket azonos érintőjű síkgörbékbe viszi.*

Bizonyítás. Az, hogy egy gömbi görbének egy adott pontban van érintője, azt jelenti, hogy egy és csak egy olyan, a szemponton átmenő sík által kimetszett kör létezik a gömbön, mely az adott pontban érinti azt.

Tegyük fel, hogy a g gömbi görbének van érintője a $P \in \Gamma$ pontban. Legyen a képgörbe $\bar{g}$, a P képe pedig legyen $\bar{P}$. Ekkor a $\bar{g}$ síkgörbe a $\bar{P}$ pontban érinti azt az egyenest, amely annak a gömbi körnek a sztereografikus képe, mely érinti a g görbét a P pontban. Több ilyen egyenes azonban nem létezhet, mert annak őséképe olyan, a szemponton átmenő sík által kimetszett gömbi kör lenne, mely érinti a g görbét a P pontban.

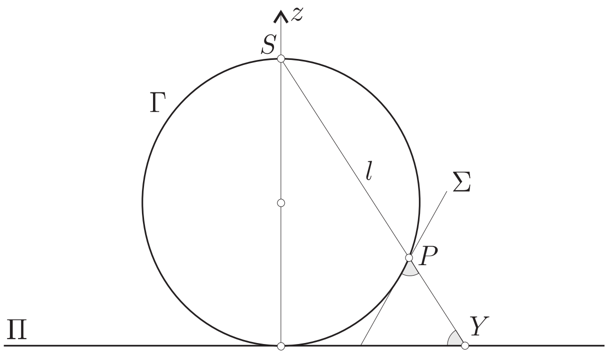
Ez az indoklás azt is igazolja, hogy a gömbi görbe érintői és a képgörbe érintői közt egy-egyértelmű a megfeleltetés, ami lényegében éppen az állításunk. ■

Eszerint a gömb egy adott P pontjában lévő görbék közt egy ekvivalencia-relációt adhatunk meg: mondjuk a P ponton átmenő g és h görbékre azt, hogy „hullámosak”, vagyis $g \sim h$, ha azonos a P pontbeli érintőjük. Csináljuk meg ugyanezt az ekvivalencia-relációt a síkon is. Ekkor előbbi lemmánk azt mondja ki, hogy a sztereografikus projekció ezzel a két ekvivalencia-relációval felcserélhető. Mivel azonban egy ilyen ekvivalencia-osztály azonosítható egy, az adott pontban lévő érintővel, azt is mondhatjuk, hogy a sztereografikus projekció a gömbi P pontbeli érintők terét képezi le a P pont képénél lévő érintők terére egy-egyértelmű módon.

1.5.4. Tétel. *A sztereografikus projekció szögtartó.*

Bizonyítás. Az előbbi lemma, az azt követő magyarázat és a szög definíciója alapján elég azt belátnunk, hogy az S szempontú sztereografikus projekció a Γ gömb egy adott P pontjában lévő Σ érintők terét a Π képsíkra szögtartó módon képezi le.

Legyen a P képe a Π képsíkon az Y pont.



1.5.1. Ábra. A sztereografikus vetítés síkmetszete egy vetítősugarán és a z-tengelyen át.

Legyen ℓ_1 és ℓ_2 egy-egy egyenes a Π síkban az Y ponton át. Ezek ősképe a sztereografikus projekcióban az a k_1 és k_2 körvonal a Γ gömbfelületen, melyet az a Σ_1 és Σ_2 sík metsz ki a Γ gömb felületből, melyek illeszkednek az S pontra és a megfelelő ℓ_1 illetve ℓ_2 egyenesre. A Σ_1 és Σ_2 síkok metszik a Γ gömbfelület S pontban lévő érintősíkját egy-egy egyenesben. Legyenek ezek rendre $\tilde{\ell}_1$ illetve $\tilde{\ell}_2$. Mivel a Γ gömbfelület S pontban lévő érintősíkja párhuzamos a Π képsíkkal, nyilván $\tilde{\ell}_1 \parallel \ell_1$ illetve $\tilde{\ell}_2 \parallel \ell_2$. Eszerint az ℓ_1 és ℓ_2 egyenesek ugyanakkora, mondjuk α szöget zárnak be, mint az $\tilde{\ell}_1$ és $\tilde{\ell}_2$ egyenesek. Csakhogy $\tilde{\ell}_1$ és $\tilde{\ell}_2$ éppen az érintői a k_1 és k_2 körvonalaknak, ami azt jelenti, hogy e körvonalak az S pontban α szöget zárnak be. Két körvonal egyforma szögeket zár be mindkét metszéspontjában, így a k_1 és k_2 körvonalak a P pontban is α szöget zárnak be. Ez bizonyítja a tételt. ■

1.5.5. Definíció. Ha adott a térben egy r sugarú gömb az O középpontjával együtt, akkor a térnek azt az önmagába való leképezését, mely az O pont kivételével minden P pontot abba az OP félegyenesen lévő Q pontba visz, melyre $OP \cdot OQ = r^2$, az adott *gömbre való inverziónak* nevezzük.

Mivel a síkbeli inverzió az elemi geometriából jól ismert, a részletes bizonyítások nélkül, csak a lényegre mutatva, felsoroljuk a térbeli inverzió néhány tulajdonságát.

Legelőbb azt kell észrevennünk, hogy a térbeli inverzió minden, a gömb középpontján áthaladó síkon ugyanúgy hat, mint az abban a síkban lévő síkbeli inverzió, melyhez tartozó kör éppen a gömb és a sík metszete. Mivel a síkbeli inverzió körtartó, ebből azonnal adódik, hogy a térbeli inverzió gömbtartó, hiszen az adott gömb és az inverzió gömbjének középpontján átmenő síkok mindegyikén síkbeli inverzió fog hatni. Ugyanez a meggondolás vezet ahoz a megfigyeléshez is, hogy az inverzió gömbjének középpontján átmenő, azt érintő gömb inverzív képe az a sík lesz, mely az inverzió gömbjét a másik gömbbel azonos pontban érinti, csak kívülről.

1.5.6. Tétel. *A sztereografikus projekció körtartó, vagyis a gömbi körök képei a képsíkon körök lesznek, kivéve azon köröket, melyek átmennek az S szemponton. Ezek képei egyenesek lesznek.*

Bizonyítás. A térbeli inverziót használjuk. Vegyük azt a G gömböt, amelynek középpontja az S szempont, sugara pedig éppen a Γ tárgygömb átmérője. Ekkor a Π képsík éppen a Γ gömb G gömb szerinti inverzív képe lesz.

Ha most a Γ gömbön adott egy, az S szemponton nem átmenő K kör, akkor létezik egy olyan Υ gömb, amely éppen ezt a kört metszi ki a Γ gömbből, és nem megy át az S szemponton. Csakhogy az ilyen gömb inverzív képe gömb lesz, melynek metszete a Γ gömb Π inverzív képével éppen egy kör, amit bizonyítani akartunk. ■

1.5.1. Példák és feladatok

1.5.7. Feladat. Keressük meg az összes olyan egybevágósági transzformációt a gömbön, melynek a sztereografikus ábrázolás utáni megfelelője a képsíkon szintén egybevágóság!

1.5.8. Tétel. *A gömbi háromszögek szögösszege nagyobb, mint* π*.*

Bizonyítás. Az adott gömbi háromszöghöz válasszunk olyan szetereografikus ábrázolást, ahol az S szempont átellenes pontja a háromszögbe esik, és a Π képsík ebben a pontban érinti a gömböt. Ebben a rendszerben a gömbi háromszög képe a Π képsíkon egy három kör által határolt „felfújt” háromszög lesz. Mivel az ábrázolás szögtartó, ez azonnal igazolja az állítást. ∎

1.5.9. Feladat. Adott négy olyan k, l, m és n kör a síkon, melyek páronként rendre két-két $P_1 - P_2$, $Q_1 - Q_2$, $R_1 - R_2$ és $S_1 - S_2$ pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben a P_1, Q_1, R_1 és S_1 pontok egy körön vannak, akkor a másik négy P_2, Q_2, R_2 és S_2 pont is egy körre esik!

2

Görbemodellezés

Amint az előző fejezetben láthattuk, az ottani ábrázolási módszerek — néhány speciális esettől eltekintve — nem képesek a görbék ábrázolására. A számítógép grafikus képességeinek alkalmazásával ez nem probléma, bár néhány szempontot ekkor is figyelembe kell vennünk. Először is a rajzolgatás bizony elég időigényes, másrészt a számítógép számítási kapacitása sem végtelen.

Szerencsére a gyakorlatban sosem a teljes matematikai értelemben vett precizitás a fontos, inkább csak a megfelelő pontoságú közelítés, így általában egy, a szempontjainknak megfelelő görbecsaládból kell kiválasztanunk az adott szempontból az adott görbét legjobban közelítőt, és utána azzal kell végeznünk a munkát.

Görbemodellezésen tehát azt értjük, hogy egy bizonyos görbecsaládból, mely általában az adott szempontból kellemes görbéket tartalmazza, tetszőleges görbéhez kiválasztjuk az adott szempontból legjobban közelítő görbét. Más szavakkal úgy is mondhatjuk, hogy a görbemodellezés két jól elkülöníthető szakaszból áll:

(1) Annak meghatározása, hogy az előre adott feltételeinknek mely görbék családja felel meg a legjobban, miközben kellő pontossággal közelítő tagja is van.

(2) Annak megállapítása, hogy az előbbi részben meghatározott görbecsaládból mely görbe közelíti előre adott szempontjainkból a legjobban az adott modellezendő görbét.

Vegyük például az integrálást, és próbáljuk megkeresni azokat a szempontokat, amelyek fontos szerepet játszanak a modellezés két lépésében. Figyeljük meg, hogy a két lépést nem lehet annyira jól elválasztani egymástól, mint ahogy fentebb tettük.

(1) Nyilván elsődleges szempont, hogy a görbecsalád minden elemét könnyen integrálhassuk. Ennek a feltételnek igen jól megfelel a polinomok osztálya, de egy ennél bővebb görbecsalád is számításba jöhet, mégpedig a szakaszonként polinomiális görbék családja. Ezt a görbecsaládot viszont szűkíthetnénk a szakaszonként egyenes görbék családjára. (Itt a görbe és a polinom, illetve függvény szinte szinonimaként értendő, hiszen a függvény grafikonja a görbe.)

(2) Itt most érzékelhetjük azt is, hogy az előbbi lépésben kiválasztott görbecsalád mennyire befolyásolja a mostani feladatunkat. Vegyük először is észre, hogy az integrálás szempontjából a jó közelítés az egyenletes konvergenciát jelenti,

tehát az adott görbecsaládokból nekünk olyan görbével kell modelleznünk az integrálandó függvényt, mely egyenletesen jól közelíti azt, minden darabján. Mindhárom görbecsalád esetén nyugodtak lehetünk abból a szempontból, hogy minden fontos görbét, függvényt jól meg tudunk közelíteni, hiszen mindhárom görbecsalád sűrű a folytonos függvények terében, az meg sűrű az integrálható függvények terében. Ugyanakkor a modellező görbe kiválasztásának problémája nem egyforma nehézségű a három család esetén, és ez az, amiért a numerikus integráláshoz nem a polinomok családját szokás használni. Amikor a két másik család közt kell választani, akkor már újabb szempont dönt, mégpedig a modellezésből adódó kvadratúraformulák bonyolultsága és pontossága közti viszony, mely már lényegesen szubjektívabb megítélés alá esik. Éppen ez az, amiért többféle kvadratúraformulát szokás használni a numerikus integrálásokhoz. Érdekes, hogy az integrálás elméletében a szakaszonként konstans görbék családjával modellezik az integrálható függvényeket.

Ebben a fejezetben a döntő szempont természetesen a számítógép, illetve a számítógépes ábrázolás lesz, és főleg a modellezés első lépésével fogunk foglalkozni, ezért most megfogalmazzuk, hogy milyennek is kellene lennie azoknak a görbéknek, melyek ehhez megfelelően használhatók:

(1) flexibilis, hogy mindent le lehessen rajzolni vele,
(2) gyorsan számítható,
(3) kevés és invariáns adattal megadható (ez azt jelenti, hogy a megadó adatok a koordináta-rendszertől függetlenül határozzák meg a modellező görbét),
(4) ezek az adatok szemléletesen is követhető módon határozzák meg a görbe alakját,
(5) merőleges vetületük is teljesítse ezeket a feltételeket,
(6) ha a modellezendő görbe átmegy bizonyos rögzített pontokon, akkor a modellező görbe is átmegy azokon,
(7) a perspektív kép is teljesítse az itt felsorolt követelményeket.

Természetesen könnyű volna további hasznos feltételeket találnunk, amelyek megkönnyíthetnék a későbbi konkrét modellezést, de látni fogjuk, hogy ezek a feltételek már így is éppen elegendő kötöttséget jelentenek. Mégis megemlítünk egy feltételt, amely gyakorlati szempontból rendkívül fontos. Ez a feltétel az *egyenestartás*. A modellezésnek ezen a tulajdonságán azt értjük, hogy ha csak két pontját adjuk meg a modellező görbének, akkor az mindig egyenes.

Mielőtt elmélyednénk a részletekben, fontos felhívni a figyelmet, hogy a „görbecsalád” fogalom nem csak a görbékről, de azok megadási módjáról is szól. Tehát egy görbe különböző családok tagja lehet, ha különböző módon adjuk meg.

2.1. Lagrange-görbék

Amikor arról van szó, hogy egy adott görbét közelíteni kellene valamilyen ismertebb görbével, általában azonnal a Lagrange-görbe jut eszünkbe. A matematikában ugyanis igen gyakori, hogy az adott görbének a megfelelő Lagrange-görbével való helyettesítése hasznosnak bizonyul. Erre nem is kell más példát felhoznunk, mint a numerikus integrálás esetét, ahol az interpolációs polinom éppen a Lagrange-polinom.

Sajnos a mi szempontjainknak a Lagrange-görbék nem felelnek meg, ezért ebben a szakaszban lényegében csak azt mutatjuk meg, hogy az integráláshoz annyira jó görbeosztály jelen céljainkra gyakorlatilag alkalmatlan.

2.1.1. Definíció. Legyenek adottak az (x, y)-síkon a $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ pontok. A hozzájuk rendelt *Lagrange-görbe* az (x, y)-síkon a

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

polinom gráfja, ahol a $\boldsymbol{p}_i$ „kontrollpontok” koordinátái (x_i, y_i), és $x_i \neq x_j$ semmilyen különböző i és j esetén.

Természetesen a definíciónk analóg módon magasabb dimenzióra is átvihető, de nekünk elég a síkbeli esettel foglalkozni.

2.1.2. Tétel. *A Lagrange-görbe*

(1) *minden kontrollponton átmegy,*
(2) *három, nem egy egyenesen lévő pont esetén parabola,*
(3) *egy egyenesre illeszkedő pontok esetén egyenes,*
(4) *kettőnél több pont esetén függ a koordináta-rendszer megválasztásától,*
(5) *alakja szemre szinte teljesen független a kontrollpontok elhelyezkedésétől.*

Bizonyítás. Az első két állítás annyira egyszerű, hogy bizonyításukat az olvasóra bízzuk.

3.) A definíció szerint $n + 1$ pont egy legfeljebb n-fokú L Lagrange-polinomot határoz meg. Ez az L Lagrange-polinom $n + 1$ pontban metszi az adott pontok egyenesét, melynek egyenlete, mondjuk, $ax+b$. Ekkor a legfeljebb n-fokú $L(x)-ax-b$ polinom $n + 1$ helyen nulla, amiért azonosan nulla, vagyis $L(x) = ax + b$, amint állítottuk.

4.) Erre elegendő egyetlen példát adnunk. Legyenek adottak az (x, y)-koordináta-rendszerben a $(-1, 1)$, $(0, 0)$ és $(2, 4)$ pontok. Az ezekre illeszkedő Lagrange-görbe az x^2 parabola. Ez tehát egy „álló” parabola. Forgassuk most el a koordinátarendszert $-90°$-kal. Ekkor pontjaink koordinátái rendre $(1,1)$, $(0,0)$ és $(4,-2)$, melyekre illeszkedő Lagrange-görbe az $x(3-x)/2$. Ez szintén egy „álló” parabola, holott az invariancia szerint „fekvő” parabola kellett volna legyen.

5.) Tekintsük a $(-2,24), (0,0), (3,-21)$ és $(4,0)$ pontokat. Ezeket ábrázolva egy konvex négyszöget kapunk, a hozzátartozó Lagrange-görbe pedig az $(x-4)x(x+4)$ polinom, amely a $[-2,-0]$ intervallumon konkáv. Ha most a szemre teljesen hasonló konvex négyszög $(-2,84)$, $(0,0)$, $(3,-21)$ és $(4,0)$ pontjait tekintjük, akkor a $7x(x-4)$ Lagrange-polinomot kapjuk, melynek grafikonja az előzőtől teljesen eltérően konvex.

■

Bár úgy tűnik, hogy ez is éppen elegendő indok e görbeosztály elvetéséhez, mégis megemlítünk egy egészen speciális problémát is. Ez a Lagrange-görbék instabilitása. Itt arról van szó, hogy minél jobban szeretnénk egy görbét egy darabon megközelíteni, annál sűrűbben kell ott pontokat felvennünk, miáltal a definícióban szereplő képlet nevezőjében egyre kisebb számok lesznek. Ez a számítógépek véges pontosságú számítási képessége miatt azt jelenti, hogy elérve egy kritikus közelséget, a kiszámított görbe teljesen el fog térni az elméletileg helyestől, ami tönkre teszi a modellezést. Az is probléma, hogy két azonos x-koordinátájú pont nem fordulhat elő, hiszen akkor 0-val kellene osztani, így minden számítás előtt ki kell szűrni az ilyen pontokat, ami jelentősen megnöveli a számítási időt.

2.1.1. Példák és feladatok

2.1.3. Példa. Ha $k \geq j+1 \geq 0$, akkor $\sum_{i=1}^{k} i^{j+1}\binom{k}{i}(-1)^i = 0$.

Bizonyítás. Tekintsük az $f(x) = x^j$ $(j \geq 0)$ polinomot közelítő

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{k} i^j \prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{k} \frac{x-l}{i-l} \quad (k \geq j+1)$$

Lagrange-polinomot, mely az $1/1, 1/2, \ldots, 1/k$ abszcisszájú pontokban megegyezik az $f(x)$ polinommal. Mivel a $P_k(x) - f(x)$ polinom fokszáma legfeljebb $k-1$, és ugyanakkor k különböző gyöke van, $P_k(x) \equiv x^j$ minden x-re. Ebből

$$0 = P_k(0) = \sum_{i=1}^{k} i^j \prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{k} \frac{-l}{i-l} = (-1)^k k! \sum_{i=1}^{k} i^j \prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{k} \frac{1}{i-l} = (-1)^k k! \sum_{i=1}^{k} i^{j+1}\binom{k}{i}(-1)^{i-k},$$

amint az állítás szól.

■

Érdemes megfigyelni, hogy ha $j = -1$, vagyis az f függvény grafikonja hiperbola, akkor a $P_k(x)$ Lagrange-polinomok az y-tengelyt minden k-ra az $y = 1$ pontban metszik.

2.1.4. Feladat. Adott egy $n + 1$ pontot számláló rendszer, melynek Lagrange-polinomja L_1. Tegyük fel, hogy elvégzünk egy nagyítást a pontrendszeren, és az így kapott pontrendszerre is kiszámítjuk a Lagrange-polinomot. Legyen ez L_2. Mi a kapcsolat L_1 és L_2 között?

2.1.5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a Lagrange-polinom az eltolásra invariáns, vagyis ha a kontrollpontrendszert eltoljuk, akkor a Lagrange-polinom is ugyanazzal az eltolással tolódik el!

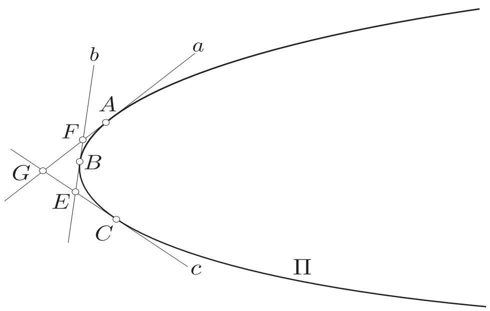
2.1.6. Feladat. Mutassuk meg, hogy amennyiben a szomszédos pontok távolsága állandó h, akkor az $x_i = x_0 + hi$ és $x = x_0 + ht$ helyettesítéssel és $t \neq i$ feltétellel a Lagrange-polinom alakja $P(x) = (-1)^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{f(x_i)}{t-i}$.

2.2. Bézier-görbék

Minthogy történetileg és logikailag egyaránt ezzel a görbecsaláddal kezdődik a „CAGD", vagyis a számítógépes ábrázoló geometria, mi is ezzel kezdjük. Ez az a görbecsalád, melyet *de Casteljau* és *Bézier* megtalált.

Mielőtt azonban ismertetnénk ezt a görbecsaládot, ismerkedjünk meg az alábbi, klasszikusnak számító elemi geometriai tétellel, mely talán az alapötletet adhatta a Bézier-görbecsalád felfedezéséhez.

Parabola 3-érintő tétele. *Legyenek az A, B és C pontok a Π parabolán, a, b és c pedig ezeken keresztül a Π parabolához húzott érintők. Ha $E = b \cap c$, $G = c \cap a$, és $F = a \cap b$, akkor $(B, E, F) = (E, C, G) = (F, G, A)$, ahol $(.,.,.)$ az osztóviszonyt jelöli.*



2.2.1. Ábra. a, b és c a Π parabola érintői az A, B és C pontokban. $E = c \cap b$, $F = b \cap a$ és $G = a \cap c$ a metszéspontok.

Bizonyítás. Az állítást általánosabb esetben bizonyítjuk be.

Legyen adott a Π *kúpszeleten négy pont,* A, B, C *és* D, *és az ezeken keresztüli négy érintő,* a, b, c *és* d. *Ezen érintők metszetei legyenek az* $E = b \cap c$, $G = a \cap c$, $F = a \cap b$, $H = b \cap d$, $I = c \cap d$ *és* $J = a \cap d$ *pontok. Ekkor*

$$(I, C, E, G) = (H, E, B, F) = (F, A, J, G) = (H, J, D, I).$$

Először azt kell megmutatni, hogy valóban általánosításról van szó. Ehhez tegyük fel, hogy D ideális pont, és d ideális egyenes lesz. Ekkor H, I és J is ideális pont lesz, ezért

$$\begin{aligned}
(I, C, E, G) &= -(G, E, C) = \frac{-1}{1 + (E, C, G)}, \\
(H, E, B, F) &= -(F, B, E) = \frac{-1}{1 + (B, E, F)}, \\
(F, A, J, G) &= -(A, F, G) = \frac{-1}{1 + (F, G, A)}.
\end{aligned}$$

Ezekből következik, hogy $(B, E, F) = (E, C, G) = (F, G, A)$, tehát valóban általánosabb tételt bizonyítunk.

Bizonyításunk olyan kettősviszonyt tartó leképezések alkalmazásából áll, melyek végül a kúpszeletet egy körbe, az érintőket pedig egy paralelogramma négy oldalába viszi. Ez utóbbi konfigurációra nyilván igaz az állítás, amit egyszerű számolással lehet ellenőrizni.

Vegyünk tehát egy olyan egyenes körkúpot, melynek valamely megfelelő síkmetszete éppen a Π kúpszelet. Legyen ez a sík S, a kúp csúcsa pedig Q. Legyen S' egy olyan sík, mely nem megy át a kúp Q csúcsán, viszont párhuzamos a QGH síkkal. Ez az S' sík nyilván nem párhuzamos a kúp semelyik alkotójával, és a kúp tengelyével sem, tehát a kúppal való metszete ellipszis kell legyen. Vetítsük az S síkot a kúp Q csúcspontjából perspektivikusan az S' síkra. Ez a transzformáció tartja a kettősviszonyt, ezért elég az S' síkon kialakuló képre bizonyítanunk az állításunkat. Márpedig a Π kúpszelet és érintőinek képe egy olyan ellipszis lesz, mely egy paralelogrammába van írva, vagyis érinti annak mind a négy oldalát.

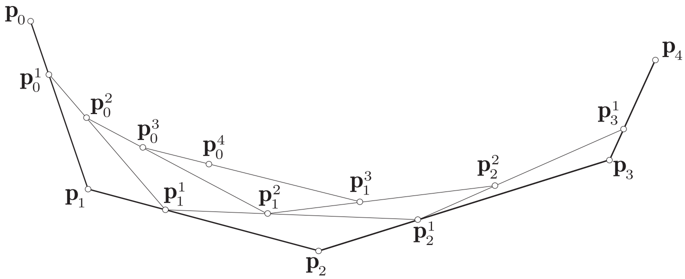
Vegyünk most egy olyan egyenes körhengert, melynek valamely megfelelő síkmetszete éppen az S' síkon kapott ellipszis. Ha most az S' síkot merőlegesen vetítjük a hengert körben metsző síkra, akkor egy olyan kört kapunk, mely egy paralelogrammába van írva, hiszen a merőleges vetítés párhuzamost tartó. Mivel a merőleges vetítés osztóviszonytartó is, ezzel az állítást beláttuk. ■

Fordított olvasatban azt kaptuk, hogy ha két szakaszt, melyek közül az egyiknek a vége a másik eleje, azonos arányban osztó két pontot összekötünk, és vesszük az így nyert harmadik szakaszt ismét ilyen arányban osztó pontot, akkor ez a pont egy parabolán van, mely átmegy a két szakasz különböző végpontjain.

Innen már csak egy ugrás az alábbi definíció, mely egyszerűen a parabola ilyen előállításának több szakaszra való általánosítása.

2.2.1. Definíció. Adottak a $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ pontok a térben. Minden $t \in [0,1]$ számra legyen $\boldsymbol{p}_0^0(t) = \boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1^0(t) = \boldsymbol{p}_1$, ..., $\boldsymbol{p}_n^0(t) = \boldsymbol{p}_n$, továbbá minden $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-j\}$ és $t \in [0,1]$ esetén legyen $\boldsymbol{p}_i^j(t) = (1-t)\boldsymbol{p}_i^{j-1}(t) + t\boldsymbol{p}_{i+1}^{j-1}(t)$. Ekkor az a görbe, melyet a $\boldsymbol{p}_0^n(t)$ pont leír, ahogy a t végigfut a $[0,1]$ intervallumon, a $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ *kontrollpontokhoz* tartozó *Bézier-görbe*, melyet rövidség kedvéért $\boldsymbol{B}(t)$-vel jelölünk. A kontrollpontok által meghatározott sokszöget *kontrollpoligonnak*, az n számot a görbe *rangjának* nevezzük.

Érdemes a 2.2.2 ábrán megtekinteni, mit is jelent geometriailag ez a definíció. Világosan látható, hogy a kontrollpoligon oldalainak $t/(1-t)$ arányú felosztásával egy eggyel kisebb oldalszámú poligont kapunk, melynek oldalait ugyancsak $t/(1-t)$ arányban osztjuk, tovább csökkentve az oldalak számát. Végül az n-edik lépésben már csak egyetlen pontot kapunk, ami a Bézier-görbe t paraméterhez tartozó pontja.



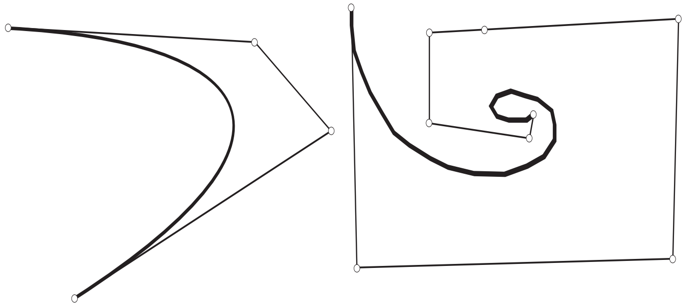
2.2.2. Ábra. A Bézier-görbe előállítása a de Casteljau-eljárás segítségével, amikor $t = 1/3$. $\boldsymbol{p}_i^j$ az i-edik de Casteljau-pont a j-edik lépésben.

2.2.2. Definíció. A Bézier-görbe ilyen előállítását *de Casteljau-eljárásnak*, a $\boldsymbol{p}_i^j$ pontokat pedig *de Casteljau-pontoknak* nevezzük.

2.2.3. Definíció. A kontrollpontokat, illetve a kontrollpoligont gyakran *Bézier-pontoknak* illetve *Bézier-poligonnak* nevezik.

Világos, hogy a Bézier-görbe mindig átmegy az első és az utolsó — $\boldsymbol{p}_0$ és $\boldsymbol{p}_n$ —, Bézier-pontokon.

Mielőtt rátérnénk a részletesebb vizsgálatokra, állapítsuk meg, hogy — bár ez elég szubjektív dolog — a kontrollpoligon szemléletesen határozza meg a Bézier-görbét.



2.2.3. Ábra. Bézier-görbék a kontrollpoligonjukkal.

Ezután úgy tekintjük, hogy a Bézier-görbék teljesítik a fejezet bevezetőjében felsorolt követelmények közül a szemléletesség igényét (4).

2.2.1. Alaptulajdonságok és polinomialitás

Ebben a részben a Bézier-görbék alapvető tulajdonságait tekintjük át, különös figyelemmel a fejezet bevezetőjében megfogalmazott szempontokra.

2.2.4. Tétel. *A Bézier-görbe*

(1) *egy egyenesre eső pontok esetén egy szakasz (esetleg többszörös fedéssel!),*

(2) *három pont esetén parabola,*

(3) *affin invariáns, azaz a Bézier-görbe affin képe nem más, mint a kontrollpoligonja affin képéhez tartozó Bézier-görbe, és*

(4) *mindig a kontrollpoligon konvex burkában van.*

Bizonyítás. Mindezen tulajdonságokat könnyen kiolvashatjuk a de Casteljau-eljárás geometriai megfigyeléséből:

1.) Mivel minden szakasz egy egyenesre esik, minden de Casteljau-pont is erre az egyenesre fog esni, vagyis az utolsó is, amely a Bézier-görbét futja végig.

2.) Ez a parabola 3-érintő tételének nyilvánvaló következménye.

3.) A Bézier-görbe definíciójában csakis affin invariáns elemeket (mint a szakasz), és mennyiségeket (mint az arány vagy osztóviszony), használtunk fel, ezért az előállítás minden lépése felcserélhető bármely affin transzformációval, ami éppen az invarianciát jelenti.

4.) Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy minden de Casteljau-pont a kontrollpoligon konvex burkában van, ami az utolsó ilyen pont esetén éppen az állítást adja. A $\boldsymbol{p}_i^0$ pontokra ez nyilván igaz, ezért tegyük fel, hogy ugyanez igaz a $\boldsymbol{p}_i^{j-1}$ pontokra is. Ekkor a definíció szerint a $\boldsymbol{p}_i^j$ pont a $\boldsymbol{p}_i^{j-1}$ és a $\boldsymbol{p}_{i+1}^{j-1}$ pontok szakaszán van, tehát maga is benne van a kontrollpoligon konvex burkában, amint azt állítottuk. ∎

Eszerint a Bézier-görbék teljesítik kirótt feltételeink közül az invarianciára és a merőleges vetületre vonatkozókat, ami máris több, mint amit a Lagrange-görbék nyújtani tudtak. Nagyon fontos tulajdonság a konvex burokban maradás is, hiszen ez azt jelenti, hogy a görbe nem ugrálhat, és nem vethet hullámokat a kontrollpontok módosítása közben, amiért könnyen programozható annak eldöntése, hogy egy kirajzolandó görbe pontjai a képernyőre esnek vagy sem.

Ahhoz, hogy a kiszámíthatóság és a számítási igény szempontjából is meg tudjuk vizsgálni görbéinket, a Bernstein-polinomok tulajdonságait (lásd a Függelékben) használjuk.

Köztudomású, hogy a függvények közül leggyorsabban a polinomok számíthatók ki, mégpedig az úgynevezett Horner-sémával, vagyis az

$$\begin{aligned} a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 & \\ &= (\cdots((a_n t + a_{n-1})t + a_{n-2})t + \cdots + a_1)t + a_0 \end{aligned}$$

alakban, ezért nagyon fontos az alább definiálandó görbeosztály.

2.2.5. Definíció. A *polinomiális görbe* olyan paraméteres görbe, melynek minden koordinátafüggvénye polinom.

A fentiek szerint az ilyen görbe pontjai igen gyorsan kiszámíthatóak számítógéppel, ezért a következő tételünk a gyors kiszámíthatóság nagyon fontos követelményének teljesülését is jelenti a Bézier-görbékre.

2.2.6. Tétel. *A $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$ kontrollpontokkal generált Bézier-görbe de Casteljau-pontjaira*

$$\boldsymbol{p}_i^j(t) = \sum_{k=0}^{j} \boldsymbol{p}_{i+k} B_k^j(t) \qquad (0 \leq j \leq n),$$

a Bézier-görbére pedig ebből következőleg

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{p}_0^n(t) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{p}_k B_k^n(t).$$

Bizonyítás. Természetesen a második állítás az első nyilvánvaló következménye, ezért csak az első állítással foglalkozunk. $j = 0$ esetén ez a képlet a $\boldsymbol{p}_i^0(t)$ definícióját adja vissza, tehát igaz.

Teljes indukciós bizonyításunkhoz tegyük fel, hogy az állítás igaz j-re és minden ahhoz lehetséges i-re. Kihasználva a de Casteljau-pontok definícióját és a Bernstein-polinomok tulajdonságait,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_i^{j+1} &= (1-t)\boldsymbol{p}_i^j(t) + t\boldsymbol{p}_{i+1}^j(t) \\
&= (1-t)\sum_{k=0}^{j} \boldsymbol{p}_{i+k} B_k^j(t) + t\sum_{k=0}^{j} \boldsymbol{p}_{i+1+k} B_k^j(t) \\
&= (1-t)\sum_{k=0}^{j} \boldsymbol{p}_{i+k} B_k^j(t) + t\sum_{k=1}^{j+1} \boldsymbol{p}_{i+k} B_{k-1}^j(t) \\
&= \boldsymbol{p}_i(1-t)B_0^j(t) + \sum_{k=1}^{j} \boldsymbol{p}_{i+k}\Big((1-t)B_k^j(t) + tB_{k-1}^j(t)\Big) + t\boldsymbol{p}_{i+j+1}B_j^j(t) \\
&= \sum_{k=0}^{j+1} \boldsymbol{p}_{i+k} B_k^{j+1}(t)
\end{aligned}$$

adódik, ami éppen a bizonyítandó indukciós állítás. ∎

Figyelembe véve, hogy a Bernstein-polinomok egységbontást adnak a $[0,1]$ intervallumon, ez a tétel közvetlenül bizonyítja azt is, hogy a Bézier-görbék minden pontja a kontrollpoligon konvex burkában van. Az is világos, hogy a Bézier-görbe rangja éppen a koordináta-polinomjainak a fokszáma. Most összefoglaljuk a további közvetlen következményeket.

2.2.7. Következmény.

(1) *Két Bézier-görbe lineáris kombinációja a megfelelő kontrollpontok lineáris kombinációjának Bézier-görbéje.*

(2) *A kontrollpontok sorrendjét fordítottjára cserélve, a Bézier-görbe nem változik.*

(3) *Ha a kontrollpontok egy egyenesen sorban azonos távolságra helyezkednek el, akkor a Bézier-görbe* $\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{p}_0 + t(\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_0)$.

Bizonyítás. Az első állítás az előző tétel fényében teljesen triviális. A második állítás igazolásához csak azt kell észrevennünk, hogy $B_k^n(t) = B_{n-k}^n(1-t)$. Végül az utolsó állítás igazolásához figyeljük meg, hogy két szomszédos kontrollpont közti távolság $(\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_0)/n$, ezért $\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{p}_0 + \frac{j}{n}(\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_0)$, amiért

$$\boldsymbol{p}_0^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{p}_j B_j^n(t) = \boldsymbol{p}_0 + (\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_0)\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{n} B_j^n(t) = \boldsymbol{p}_0 + (\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_0)t. \qquad \blacksquare$$

Vizsgálataink sajnos nem adtak eleddig választ a legfontosabb felmerülő kérdésre, hogy vajon elég sokfélék-e a Bézier-görbék ahhoz, hogy olyan görbét rajzoljunk vele, amilyet csak akarunk.

2.2.8. Tétel. *Ha* $\boldsymbol{P}$ *olyan, a* $[0,1]$ *szakaszon értelmezett polinomiális görbe, melynek legmagasabb fokszámú koordinátafüggvényének fokszáma* n*, akkor egyértelműen létezik egy olyan* $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$ *kontrollpoligon, hogy az abból generált Bézier-görbére* $\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{B}(t)$ *minden* $t \in [0,1]$ *esetén.*

Bizonyítás. Az előző tétel formulája alapján a Bézier-görbe i-edik koordinátafüggvénye a $\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{p}_{k,i} B_k^n(t)$ polinom, ahol $\boldsymbol{p}_{k,i}$ jelöli a $\boldsymbol{p}_k$ kontrollpont i-edik koordinátáját. Az F.5.5. tétel szerint viszont tetszőleges, a $[0,1]$ intervallumon értelmezett P polinom egyértelműen előállítható mint az n-ed rendű B_i^n Bernstein-polinomok lineáris kombinációja, ami igazolja az állítást. ■

Megelőző eredményünkkel ebből azonnal adódik az alábbi fontos ismeret.

2.2.9. Következmény. *Egy görbe akkor és csak akkor polinomiális, ha Bézier-féle.*

Ez az állítás Weierstrass jól ismert tételével, mely szerint a polinomok zárt intervallumon minden folytonos függvényt tetszőlegesen jól (egyenletesen!) megközelíthetnek, azt jelenti, hogy a Bézier-görbék családja elegendően bő ahhoz, hogy minden természetesen adódó görbét le lehessen rajzolni vele, legalábbis jó közelítésben.

Összefoglalva eddigi ismereteinket, azt mondhatjuk, hogy a fejezet bevezetőjében felvázolt hét tulajdonságot — az utolsó kettő kivételével — a Bézier-görbék teljesítik. Sajnos e két utolsó hiányzó tulajdonságot igen nehéz lenne megvalósítani a Bézier-görbékkel. Mielőtt azonban rátérnénk a megoldás lehetséges útjainak vizsgálatára, a következő részben a Bézier-görbék további, nem ennyire elemi tulajdonságait vizsgáljuk meg.

2.2.2. Rangemelés, felosztás, deriválás és polárforma

Ebben a részben a Bézier-görbéknek a továbbfejlesztése vagy a gyakorlati használhatósága szempontjából fontos tulajdonságait tekintjük át.

Bézier-görbe rangemelése. *Legyen a* $\boldsymbol{B}(t)$ *Bézier-görbe a* $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ *kontrollpoligonnal, a* $\bar{\boldsymbol{B}}(t)$ *Bézier-görbe pedig a* $\bar{\boldsymbol{p}}_0, \bar{\boldsymbol{p}}_1, \dots, \bar{\boldsymbol{p}}_n, \bar{\boldsymbol{p}}_{n+1}$ *kontrollpoligonnal adott, ahol*

$$\bar{\boldsymbol{p}}_0 = \boldsymbol{p}_0, \quad \bar{\boldsymbol{p}}_i = \frac{i}{n+1}\boldsymbol{p}_{i-1} + \Big(1 - \frac{i}{n+1}\Big)\boldsymbol{p}_i \quad (1 \le i \le n), \quad \bar{\boldsymbol{p}}_{n+1} = \boldsymbol{p}_n.$$

Ekkor a két Bézier-görbe megegyezik, vagyis $\bar{\boldsymbol{B}}(t) = \boldsymbol{B}(t)$ *minden* $t \in [0,1]$ *esetén.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{B}}(t) &= \sum_{i=0}^{n+1} \bar{\boldsymbol{p}}_i B_i^{n+1}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \Big(\frac{i}{n+1}\boldsymbol{p}_{i-1} + \Big(1-\frac{i}{n+1}\Big)\boldsymbol{p}_i\Big) B_i^{n+1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i \Big(\frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) + \Big(1-\frac{i}{n+1}\Big) B_i^{n+1}(t)\Big) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i B_i^n(t) = \boldsymbol{B}_i^n(t). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

A tétel fontosságának érzékeltetéséhez csak rá kell nézni a Bézier-görbe Bernstein-polinomos előállítására, hiszen a Bernstein-polinomok szűkülése azt mutatja, hogy egy pont csekély megváltoztatása a görbét csak annak közelében módosítja lényegesebben, mert ha t távol van az i/n hányadostól, akkor a $\boldsymbol{p}_i B_i^n(t)$ igen kicsi.

2.2.10. Definíció. Az itt megfogalmazott tulajdonságot, hogy egy pont csekély megváltoztatása a görbét is csak annak kis környezetében változtatja meg, a Bézier-görbe *lokalitásának* nevezzük.

Eszerint, ha emeljük a Bézier-görbe rangját, akkor a lokalitási tulajdonságát is fokozzuk, vagyis a kontrollpontok módosításával finomabban befolyásolhatjuk a görbe alakját, ami „szabadkézi rajz” esetén jelentős segítség.

Mivel a Bézier-görbe polinomiális görbe, minden darabja is polinomiális. Mivel minden polinomiális görbe Bézier-görbe, ha két részre vágunk egy Bézier-görbét, két Bézier-görbét kell kapnunk. Nyilvánvalóan fontos kérdés ekkor, hogy vajon mi lesz a két keletkező Bézier-görbe kontrollpoligonja.

Bézier-görbe felosztása. *Legyen adott a $\boldsymbol{B}(t)$ Bézier-görbe a $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$ kontrollpontok által, és legyen $t_0 \in (0,1)$. Ekkor ez a t_0 paraméterérték a $\boldsymbol{B}^-(t) = \boldsymbol{B}(tt_0)$ és a $\boldsymbol{B}^+(t) = \boldsymbol{B}(t_0 + t(1-t_0))$ Bézier-görbékre bontja az eredeti Bézier-görbét, melyek kontrollpontjai a de Casteljau-féle pontokkal kifejezve a $\boldsymbol{B}^-$ Bézier-görbe esetében*

$$\boldsymbol{p}_0^- = \boldsymbol{p}_0^0(t_0) = \boldsymbol{p}_0,\ \boldsymbol{p}_1^- = \boldsymbol{p}_0^1(t_0), \dots, \boldsymbol{p}_{n-1}^- = \boldsymbol{p}_0^{n-1}(t_0),\ \boldsymbol{p}_n^- = \boldsymbol{p}_0^n(t_0) = \boldsymbol{B}(t_0),$$

a $\boldsymbol{B}^+$ Bézier-görbe esetében pedig

$$\boldsymbol{p}_n^+ = \boldsymbol{p}_n^0(t_0) = \boldsymbol{p}_n,\ \boldsymbol{p}_{n-1}^+ = \boldsymbol{p}_{n-1}^1(t_0), \dots, \boldsymbol{p}_1^+ = \boldsymbol{p}_1^{n-1}(t_0),\ \boldsymbol{p}_0^+ = \boldsymbol{p}_0^n(t_0) = \boldsymbol{B}(t_0).$$

Bizonyítás. Elegendő az első állítást bizonyítanunk, mivel abból a második a de Casteljau-pontokra adott formulánk és a Bernstein-polinom szimmetria tulajdonsága — $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ — miatt azonnal adódik.

A de Casteljau-pontoknak a Bernstein-polinomos kifejezését, valamint a Bernstein-polinomok egy Függelékbeli tulajdonságát használva

$$\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_0^i(t_0)B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} \boldsymbol{p}_k B_k^i(t_0)B_i^n(t) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{p}_k \sum_{i=k}^{n} B_k^i(t_0)B_i^n(t)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{p}_k B_k^n(tt_0) = \boldsymbol{B}(tt_0)$$

adódik, ami igazolja állításunkat. ■

2.2.11. Definíció. A fenti tételben a t_0 pontot *osztópontnak*, a kialakuló két Bézier-görbét *osztott görbéknek*, és a két hozzájuk rendelt kontrollpoligont *osztott kontroll-poligonoknak* nevezzük.

A továbbiakban egy kicsit más szempontból vizsgáljuk meg a Bézier-görbéket. Ezek a vizsgálatok a következő szakaszban válnak majd igazán fontossá, amikor megvizsgáljuk, hogyan lehet folytatni egy Bézier-görbét.

2.2.12. Definíció. A $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ kontrollpontok r*-differenciái* a

$$\triangle^0 \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_i, \qquad \triangle^r \boldsymbol{p}_i = \triangle^{r-1}\boldsymbol{p}_{i+1} - \triangle^{r-1}\boldsymbol{p}_i$$

rekurzióval definiált $\triangle^r \boldsymbol{p}_i$ vektorok.

Teljes indukcióval könnyen bizonyíthatóak az alábbiak:

2.2.13. Tétel.

$$\triangle(\triangle^r \boldsymbol{p}_i) = \triangle^{r+1}\boldsymbol{p}_i, \quad \text{és} \quad \triangle^r \boldsymbol{p}_i = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j}(-1)^{r-j}\boldsymbol{p}_{i+j}.$$

2.2.14. Tétel. *A Bézier-görbe r-edik deriváltja is Bézier-görbe, melynek kontroll-pontjai az $\frac{n!}{(n-r)!}\triangle^r \boldsymbol{p}_i$ pontok, vagyis*

$$\boldsymbol{B}^{(r)}(t) = \frac{\mathrm{d}^r \boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t^r}(t) = \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{i=0}^{n-r} \triangle^r \boldsymbol{p}_i B_i^{n-r}(t).$$

Bizonyítás. Elég az állítást az $r = 1$ esetére bizonyítani, mivel a magasabb r értékekre is csak az egyszeres deriválást kellene ismételgetnünk. Ezt az alábbi egyszerű

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}'(t) &= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i \frac{\mathrm{d}B_i^n}{\mathrm{d}t}(t)\\ &= n\boldsymbol{p}_n B_{n-1}^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{p}_i n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) - n\boldsymbol{p}_0 B_0^{n-1}(t)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} n\triangle\boldsymbol{p}_i B_i^{n-1}(t).\end{aligned}$$

számolással tehetjük meg, felhasználva a Bernstein-polinom deriváltjára ismert kifejezést. ■

Két rendkívül fontos speciális eset, amikor $t = 0$, illetve $t = 1$.

2.2.15. Következmény. *A Bézier-görbe végpontjaiban vett deriváltak — így az érintő is — csak a végpontokhoz sorszámban közeli kontrollpontoktól függenek. Pontosabban*

$$\boldsymbol{B}^{(r)}(0) = \frac{\mathrm{d}^r\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t^r}(0) = \frac{n!}{(n-r)!}\triangle^r\boldsymbol{p}_0, \quad \textit{és} \quad \boldsymbol{B}^{(r)}(1) = \frac{\mathrm{d}^r\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t^r}(1) = \frac{n!}{(n-r)!}\triangle^r\boldsymbol{p}_{n-r}.$$

2.2.16. Tétel. *A Bézier-görbe r-edik deriváltjának kontrollpontjai a de Casteljau-pontokkal kifejezve*

$$\boldsymbol{B}^{(r)}(t) = \frac{\mathrm{d}^r\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t^r}(t) = \frac{n!}{(n-r)!}\triangle^r\boldsymbol{p}_0^{n-r}(t).$$

Bizonyítás. Azt kellene igazolnunk, hogy

$$\triangle^r\boldsymbol{p}_0^{n-r}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} \triangle^r\boldsymbol{p}_i B_i^{n-r}(t).$$

Helyettesítsük be ide a már említett $\triangle^r\boldsymbol{p}_i = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}\boldsymbol{p}_{i+j}$ azonosságot! Ekkor a jobb oldal a

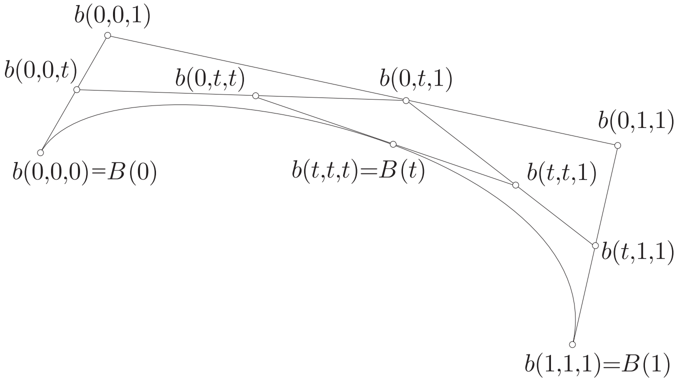
$$\sum_{i=0}^{n-r}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}\boldsymbol{p}_{i+j}B_i^{n-r}(t)$$

alakot veszi fel, melyben megcserélve a szummák sorrendjét, a de Casteljau-pontok Bernstein-polinomos alakját ismerhetjük fel. ■

Tudjuk, hogy minden Bézier-görbe polinomiális, ezért a Béziér-görbéknek van polárformája. (A polárformákról tömör összefoglaló található a Függelékben!)

2.2.17. Lemma. *Ha a b szimmetrikus n-affin leképezésre $\boldsymbol{p}_0 = b(0,\dots,0,0,0)$, $\boldsymbol{p}_1 = b(0,\dots,0,0,1)$, $\boldsymbol{p}_2 = b(0,\dots,0,1,1)$, $\dots$, $\boldsymbol{p}_n = b(1,\dots,1,1,1)$ az n-rendű $\boldsymbol{B}$ Bézier-görbe kontrollpontjai, akkor $\boldsymbol{B}(t) = b(t,\dots,t)$.*

Bizonyítás. Az affinitás miatt $b(\dots,t,\dots) = tb(\dots,1,\dots) + (1-t)b(\dots,0,\dots)$, hiszen $t = 1t+0(1-t)$. Így a t paraméter esetén az első lépésben adódó de Casteljau-pontok rendre $b(0,\dots,0,t)$, $b(0,\dots,0,1,t)$, $b(0,\dots,0,1,1,t)$, $\dots$, $b(1,\dots,1,t)$. A k-dik lépésben k darab t áll a változók helyén, és az utolsó lépésben a t paraméter áll minden változó helyén, vagyis $b(t,\dots,t)$ maga a görbe, ahogy állítottuk. ∎



2.2.4. Ábra. A de Casteljau-pontok polárformás paraméterezése.

Bézier-görbe polárformája. *Legyenek $\boldsymbol{p}_0,\dots,\boldsymbol{p}_n$ az n-rendű $\boldsymbol{B}$ Bézier-görbe kontrollpontjai, és legyen $b_i = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\boldsymbol{p}_k$. Ekkor a $\boldsymbol{B}(t) = b(t,\dots,t)$ Bézier-görbe polárformája*

$$b(t_1,\dots,t_n) = \sum_{i=0}^{n} b_i\Big(\sum_{\substack{\mathcal{I}\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |\mathcal{I}|=i}} \prod_{k\in\mathcal{I}} t_k\Big).$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz elegendő az előző lemmánk feltételét ellenőrizni. Ezt igazolja a

$$b(0,\dots,0,\overbrace{1,\dots,1}^{j}) = \sum_{i=0}^{n} b_i\Big(\sum_{\substack{\mathcal{I}\subseteq\{n-j+1,\dots,n\}\\ |\mathcal{I}|=i}} 1\Big) = \sum_{i=0}^{j} b_i\binom{j}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \Big(\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \boldsymbol{p}_k \Big) = \sum_{k=0}^{j} \boldsymbol{p}_k \Big(\sum_{i=k}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \boldsymbol{p}_k \binom{j}{k} \Big(\sum_{i=k}^{j} \binom{j-k}{i-k} (-1)^{i-k} \Big) = \sum_{k=0}^{j} \boldsymbol{p}_k \binom{j}{k} (1-1)^{j-k} = \boldsymbol{p}_j$$

levezetés és az, hogy b valóban szimmetrikus és n-affin leképezés. ■

A polárforma alapján könnyű kezelni a Bézier-görbe néhány, ebben a fejezetben már tárgyalt tulajdonságát.

A rangemelés vizsgálatához legyen $b(t_1, \ldots, t_n)$ a $\boldsymbol{B}$ Bézier-görbe polárformája. A

$$g(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}) = \frac{b(t_2, t_3, \ldots, t_{n+1}) + b(t_1, t_3, \ldots, t_{n+1}) + \cdots + b(t_1, \ldots, t_n)}{n+1}$$

függvény — mely Łgy áll elő, hogy a b függvény n változójába a $t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}$ változók közül n-et írunk be minden lehetséges módon, majd ezek összegét elosztjuk $(n+1)$-gyel — nyilván $(n+1)$-affin és szimmetrikus. Ha $\boldsymbol{G}(t) = g(t, \ldots, t)$ a g diagonálisa, akkor a konstrukció miatt persze megegyezik a $\boldsymbol{B}(t) = b(t, \ldots, t) = g(t, \ldots, t)$ Bézier-görbével, de fokszáma eggyel magasabb. A $\boldsymbol{G}$ görbe k-adik kontrollpontja

$$g(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n+1-k}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{k}) = \frac{(n+1-k) b(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-k}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{k}) + k b(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n+1-k}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{k-1})}{n+1},$$

hiszen $k-1$ darab 1-et tartalmazó tag k módon, $n-k$ darab 0-át tartalmazó tag pedig $n+1-k$ módon kapható. A rangemeléskor kapott görbe k-dik kontrollpontjára tehát

$$\bar{\boldsymbol{p}}_k = \frac{n+1-k}{n+1} \boldsymbol{p}_k + \frac{k}{n+1} \boldsymbol{p}_{k-1}$$

adódik, ahogy ezt már ismertük. A rangemelés polárformás reprezentációjával tudjuk bizonyítani a következőt.

2.2.18. Lemma. *Egy Bézier-görbe rangját növelve, a kontrollpoligon-sorozat egyenletesen tart a Bézier-görbéhez. Pontosabban, ha $\boldsymbol{p}_i^{(k)}$ jelöli a k-adik rangemelés után kapott kontrollpoligon i-edik pontját, akkor $\boldsymbol{p}_{[tk]}^{(k)} \to \boldsymbol{B}(t)$ minden $t \in [0,1]$ esetén.*

Bizonyítás. Jelölje b_k a $\boldsymbol{B}$ Bézier-görbe polárformáját a k-adik rangemelés után. Ekkor $b_0(t_1, \ldots, t_n) = b(t_1, \ldots, t_n)$, és

$$b_k(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+k}) = \frac{1}{n+k} \sum_{i=1}^{n+k} b_{k-1}(t_1, \overset{i}{\ldots}, t_{n+k}),$$

ahol $t_1, \overset{i}{\ldots}, t_{n+k}$ azt jelenti, hogy az i-edik elem hiányzik a sorból.

Lépésenként kifejtve az előbbi rekurziót, azt látjuk, hogy

$$b_k(t_1,\dots,t_{n+k}) = \frac{1}{n+k}\sum_{i_1=1}^{n+k} b_{k-1}(t_1,\overset{i_1}{\dots},t_{n+k})$$

$$b_k(t_1,\dots,t_{n+k}) = \frac{1}{n+k}\sum_{i_1=1}^{n+k} \frac{1}{n+k-1}\sum_{\substack{i_2=1\\ i_1\neq i_2}}^{n+k} b_{k-2}(t_1,\overset{i_1,i_2}{\dots\dots},t_{n+k})$$

$$\vdots$$

$$= \frac{n!}{(n+k)!}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1\\ (m\neq\ell\Rightarrow i_m\neq i_\ell)}}^{n+k} b_0(t_1,\overset{i_1,\dots,i_k}{\dots\dots},t_{n+k}).$$

Ebből az indexek sorrend szerinti megkülönböztetésének elhagyása a

$$b_k(t_1,\dots,t_{n+k}) = \frac{n!k!}{(n+k)!}\sum_{\substack{\mathcal{I}\subseteq\{1,\dots,n+k\}\\ |\mathcal{I}|=k}} b(t_1,\overset{\mathcal{I}}{\dots},t_{n+k})$$

eredményre vezet. Ezt felhasználva a kontrollpontok polárformás reprezentációjában

$$\boldsymbol{p}^{(k)}_{[tk]} = b_k(\overbrace{0,\dots,0}^{n+k-[tk]},\overbrace{1,\dots,1}^{[tk]}) = \frac{n!k!}{(n+k)!}\sum_{\substack{\mathcal{I}\subseteq\{1,\dots,n+k\}\\ |\mathcal{I}|=k}} b(0,\overset{\mathcal{I}}{\dots},1)$$

$$= \frac{n!k!}{(n+k)!}\sum_{j=0}^{n} b(\underbrace{0,\dots,0}_{n-j},\underbrace{1,\dots,1}_{j}) \sum_{\substack{\mathcal{I}\subseteq\{1,\dots,n+k\},\ |\mathcal{I}|=k,\\ |\mathcal{I}\cap\{n+k-[tk]+1,\dots,n+k\}|=[tk]-j}} 1$$

$$= \frac{n!k!}{(n+k)!}\sum_{j=0}^{n} b(\underbrace{0,\dots,0}_{n-j},\underbrace{1,\dots,1}_{j})\binom{[tk]}{j}\binom{n+k-[tk]}{n-j} = \sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{p}_j\frac{\binom{[tk]}{j}\binom{n+k-[tk]}{n-j}}{\binom{n+k}{k}}$$

adódik, így elég bizonyítani, hogy a $\frac{\binom{[tk]}{j}\binom{n+k-[tk]}{n-j}}{\binom{n+k}{k}}$ együttható határértéke $B^n_j(t) = \binom{n}{j}t^j(1-t)^{n-j}$, amikor $k\to\infty$. Minthogy $k\to\infty$ esetén $[tk]/k\to t$, a

$$\frac{\binom{[tk]}{j}\binom{n+k-[tk]}{n-j}}{\binom{n+k}{k}\binom{n}{j}} = \frac{[tk]!}{([tk]-j)!}\frac{(n+k-[tk])!}{(j+k-[tk])!}\frac{k!}{(n+k)!}$$

$$= \frac{([tk]-j+1)\cdots[tk]}{(k+1)\cdots(k+j)}\cdot\frac{(j+1+(k-[tk]))\cdots(n+(k-[tk]))}{(k+j+1)\cdots(k+n)}$$

$$\to t^j(1-t)^{n-j}$$

levezetés igazolja az állítást. ■

Ennek a lemmának fontos geometriai következménye van.

2.2.19. Tétel. *Egy hipersík a Bézier-görbét legfeljebb annyi pontban metszi, mint annak kontrollpoligonját.*

Bizonyítás. Csak azt kell észrevennünk, hogy rangemeléskor a kontrollpoligon hipersíkkal való metszeteinek száma nem nőhet, és ugyanakkor a rangot növelve a kontrollpoligon-sorozat a Bézier-görbéhez simul. ■

A Bézier-görbe felosztásánál is hasznosnak bizonyul a polárforma.

2.2.20. Tétel. *Ha $b(t_1,\dots,t_n)$ a $\boldsymbol{B}$ Bézier-görbe polárformája, akkor az $[r,s]\subseteq[0,1]$ részintervallumhoz tartozó $\boldsymbol{G}$ osztott Bézier-görbe kontrollpontjai*

$$b(r,\dots,r,r),\ b(r,\dots,r,s),\ b(r,\dots,r,s,s),\ \dots,\ b(s,\dots,s,s).$$

Bizonyítás. Tartozzon a $\boldsymbol{G}$ részgörbéhez a $g(u_1,\dots,u_n)$ polárforma. Ha $t_i=(s-r)u_i+r$, akkor persze $g(u_1,\dots,u_n)=b(t_1,\dots,t_n)$, és ugyanakkor

$$g(0,\dots,0,0),\ g(0,\dots,0,1),\ g(0,\dots,0,1,1),\ \dots,\ g(1,\dots,1,1)$$

a részgörbe kontrollpoligonja. Egyszerű behelyettesítés igazolja állításunkat. ■

Eszerint

$$\boldsymbol{G}(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n\Big(\frac{t-r}{s-r}\Big)b(\overbrace{r,\dots,r}^{n-i},\overbrace{s,\dots,s}^{i})$$

az osztott görbe. Felhasználva az $r=0(1-r)+1r$ és $s=0(1-s)+1s$ affin előállításokat, $\boldsymbol{G}$ kontrollpontjaira azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{p}}_i&=b(\overbrace{r,\dots,r}^{n-i},\overbrace{s,\dots,s}^{i})=\sum_{k=0}^{n-i}b(\overbrace{0,\dots,0}^{n-i-k},\overbrace{1,\dots,1}^{k},\overbrace{s,\dots,s}^{i})\binom{n-i}{k}r^k(1-r)^{n-i-k}\\&=\sum_{k=0}^{n-i}\sum_{\ell=0}^{i}b(\overbrace{0,\dots,0}^{n-i-k},\overbrace{1,\dots,1}^{k},\overbrace{0,\dots,0}^{i-\ell},\overbrace{1,\dots,1}^{\ell})\binom{i}{\ell}s^\ell(1-s)^{i-\ell}B_k^{n-i}(r)\\&=\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{p}_j\sum_{k=0}^{j}B_k^{n-i}(r)B_{j-k}^{i}(s),\end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{p}_j=b(\overbrace{0,\dots,0}^{n-j},\overbrace{1,\dots,1}^{j})$ a $\boldsymbol{B}$ Bézier-görbe kontrollpontja.

2.2.21. Tétel. *Ha egy osztópontsorozat a* $[0,1]$ *intervallumon sűrű, akkor a hozzá tartozó osztott kontrollpoligonok sorozata az eredeti Bézier-görbéhez tart.*

Bizonyítás. Előbbi tételünk értelmében elég belátnunk, hogy a $b(\underbrace{r,\dots,r}_{n-i},\underbrace{s,\dots,s}_{i})$ kontrollpontok és a Bézier-görbe $b\big(\frac{(n-i)r+is}{n},\dots,\frac{(n-i)r+is}{n}\big)$ pontja egymáshoz tart, amennyiben $|s-r|\to 0$.

Felhasználva a Függelékben a Polárformák szakaszban bizonyított első lemma utáni megjegyzést a

$$\begin{aligned}
&\Big|b(\underbrace{r,\dots,r}_{n-i},\underbrace{s,\dots,s}_{i})-b\Big(\tfrac{(n-i)r+is}{n},\dots,\tfrac{(n-i)r+is}{n}\Big)\Big|\\
&=\Big|b(1,\underbrace{r,\dots,r}_{n-i-1},\underbrace{s,\dots,s}_{i})-b\Big(0,\tfrac{(n-i)r+is}{n},\dots,\tfrac{(n-i)r+is}{n}\Big)\Big|\frac{-i}{n}(s-r)\\
&=\Big|b(1,\underbrace{r,\dots,r}_{n-i-1},\underbrace{s,\dots,s}_{i-1},1)-b\Big(0,\tfrac{(n-i)r+is}{n},\dots,\tfrac{(n-i)r+is}{n},0\Big)\Big|\frac{-i}{n}\frac{n-i}{n}(s-r)^2\\
&\;\vdots\\
&=|b(1,\dots,1)-b(0,\dots,0)|\frac{(-i)^{n-i}(n-i)^i}{n^n}(s-r)^n
\end{aligned}$$

levezetésben, az eredmény igazolja állításunkat. ■

A Bézier-görbék deriválásában a polárforma alkalmazása a következőre vezet. Legyen $\boldsymbol{B}$ egy n-fokú Bézier-görbe, melynek b a polárformája. Ekkor

$$\boldsymbol{B}'(t)=n\frac{b(r,t,\dots,t)-b(s,t,\dots,t)}{r-s}$$

tetszőleges $r\neq s$ számokra (lásd a Függelékben). A többszörös deriváltak esetén az egyszeres deriválás szabályait kell többször alkalmaznunk.

2.2.22. Tétel. *Legyen* $\boldsymbol{B}$ *egy* n*-fokú Bézier-görbe, melynek* b *a polárformája. Ekkor*

$$\boldsymbol{B}^{(k)}(t)=\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{(r-s)^k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i b(\overbrace{r,\dots,r}^{k-i},\overbrace{s,\dots,s}^{i},t,\dots,t)$$

tetszőleges $r\neq s$ *valós és* $1\le k$ *egész számokra.*

Az r helyébe 1-t és az s helyébe 0-t helyettesítve, aztán a t helyébe 0-t vagy 1-et írva, azonnal adódik a Bézier-görbék deriváltja a végpontokban a kontrollpontokból kifejezve.

2.2.3. Példák és feladatok

2.2.23. Probléma. Határozzuk meg a paraméter szerint súlyozott Bézier-görbe súlypontját!

Megoldás. A Bézier-görbe súlypontja

$$\boldsymbol{s} = \int_0^1 \boldsymbol{B}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i \int_0^1 B_i^n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i \frac{1}{n+1}.$$

Ez egybeesik a kontrollpoligon súlypontjával. ∎

2.2.24. Feladat. Igaz-e, hogy ha a síkon a kontrollpoligon szimmetrikus egy adott egyenesre, akkor a Bézier-görbe is az?

2.2.25. Feladat. Bizonyítsuk be a 2.2.18 lemma eredményét a polárformákat mellőzve, közvetlenül a rekurzióból!

2.2.26. Probléma. Adjuk meg azt az M mátrixot, melyre a

$$\boldsymbol{B}(t) = (\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n) \times M \times \begin{pmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}$$

formális szorzás igaz!

Megoldás. Az F.5.5 tétel és a Bézier-polinomok felbontása alapján az M mátrix k-adik sorának j-edik eleme

$$M_{k,j} = \begin{cases} \binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}(-1)^{j-k}, & \text{ha } j \geq k, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$ ∎

2.2.27. Probléma. Egy n-ed rendű Bézier-görbének adott n darab nem szélső pontja a hozzátartozó paraméterekkel együtt. Határozzuk meg a görbe kontrollpoligonját!

Megoldás. Legyenek az adott pontok $\boldsymbol{B}(t_i)$, ahol $i = 0, \ldots, n$. A fentiek szerint ekkor igaz a

$$(\boldsymbol{B}(t_0), \ldots, \boldsymbol{B}(t_n)) = (\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n) \times M \times \begin{pmatrix} t_0^0 & \ldots & t_n^0 \\ t_0^1 & \ldots & t_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^n & \ldots & t_n^n \end{pmatrix}$$

formális szorzás.

Az M mátrix alulról trianguláris, a főátlóban a nem nulla $\binom{n}{k}$ elemekkel, tehát invertálható. A jobb szélső mátrix Vandermonde típusú, melynek determinánsa (lásd a Függelékben) $\prod_{0\le i<j\le n}(t_j - t_i) \neq 0$, tehát ez a mátrix is invertálható.

A kért eredmény ezért

$$(\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n) = (\boldsymbol{B}(t_0), \dots, \boldsymbol{B}(t_n)) \times \begin{pmatrix} t_0^0 & \dots & t_n^0 \\ t_0^1 & \dots & t_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^n & \dots & t_n^n \end{pmatrix}^{-1} \times M^{-1}. \qquad \blacksquare$$

2.3. Összetett Bézier-görbék

Az ebben a szakaszban vizsgálandó görbéket a Bézier-görbék néhány hiányossága miatt kezdték tanulmányozni. Ilyen „hiányosság” a fejezet bevezetőjében említett (6) tulajdonság. Itt arról van szó, hogy ha előre adottak bizonyos pontok, és azokon keresztül kellene egy görbét fektetni, akkor ez a Bézier-görbékkel csak nehezen oldható meg. Ez a nehézség, ahogy azt bárki könnyen láthatja, éppen a Bézier-görbék konstrukciója miatt áll fenn.

A Bézier-görbék másik, bár első pillanatban kevésbé fontosnak tűnő hiányossága az, hogy egy valóban bonyolult görbe megrajzolása olyan sok kontrollpontot igényelhet, hogy az ember elveszítheti felettük az átlátását. Mindez annak ellenére így van, hogy a Bézier-görbe is rendelkezik, ahogy azt az előző szakaszban már tárgyaltuk, bizonyos lokalitási tulajdonsággal, de a kontrollpontok számának növelésével a görbe fokszáma is növekszik.

Összefoglalva tehát, olyan görbékre lenne szükség, melyeket könnyen illeszthetünk előre adott pontokra, és ugyanakkor jóval erősebb lokalitási tulajdonsággal rendelkeznek, mint a Bézier-görbék. Ebben a szakaszban e probléma egyik lehetséges megoldásával foglalkozunk.

Az összetett Bézier-görbéket az angol nyelvi megfelelője alapján szokás „spline”-nak is nevezni. Mivel ez a kifejezés most már teljesen meghonosodott a magyarban is, néha egyszerű fonetikus átírását — szplájn — fogjuk használni.

2.3.1. Definíció. Az $U = [u_0, u_n]$ zárt intervallumon paraméterezett $\boldsymbol{S}$ görbe *összetett Bézier-görbe*, ha létezik az U intervallumnak olyan $u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < u_n$ felbontása, hogy $\boldsymbol{S}$ minden $U_i = [u_i, u_{i+1}]$ intervallumon Bézier-görbe, az $\boldsymbol{S}_i(t) = \boldsymbol{S}(t(u_{i+1} - u_i) + u_i)$ paraméterezéssel. Az u_i értékeket *töréspontoknak* nevezzük. Az $\boldsymbol{S}_i$ görbét i-dik Bézier-görbének, az $\boldsymbol{S}(u_i) = \boldsymbol{S}_i(0) = \boldsymbol{S}_{i-1}(1)$ pontokat pedig *csomópontoknak* nevezzük.

A definícióból látszik, hogy az összetett Bézier-görbe tulajdonképpen nem más, mint Bézier-görbék egymásutánja, mégis ez az egyszerű bővítés meglepően sokat használ.

Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy az $\boldsymbol{S}$ összetett Bézier-görbe átmegy az $\boldsymbol{S}(u_i)$ csomópontokon, melyek lehetnek előre rögzített pontok is, és mivel két ilyen pont között egy-egy Bézier-görbe van, a Bézier-görbék majdnem minden jó tulajdonsága is megmarad.

Ugyanakkor egy nagyon is fontos, hallgatólagosan természetesnek vett tulajdonságot első ránézésre elveszteni látszik az összetett Bézier-görbe. Ez a tulajdonság a simaság, hiszen az $\boldsymbol{S}$ görbe az $\boldsymbol{S}(u_i)$ pontokban nem feltétlenül differenciálható, ami szemléletesen azt jelenti, hogy ott esetleg törése van. Ebben a szakaszban éppen ezt a csorbát igyekszünk majd a lehetőségek szerint kiköszörülni.

Az alkalmazások során egy görbe simaságát igen különböző módon ítélik meg. Amennyiben csak a vizuális megítélés a kérdéses, akkor a görbe simasága nem igazán szigorú feltétel.

2.3.2. Definíció. Egy összetett Bézier-görbét *vizuálisan folytonosnak* nevezünk, ha a csomópontokban a bal és jobb oldali érintő iránya megegyezik.

Ennél sokkal erőteljesebb igények lépnek fel a mérnöki gyakorlatban, ahol általában kétszeres folytonos differenciálhatóságot követelnek meg.

2.3.1. Kvadratikus és köbös összetett Bézier-görbék

Az előző szakaszban megmutattuk, hogy a Bézier-görbe végpontjában az érintő és a többi derivált is csak néhány, a szélső kontrollponthoz sorszámban közeli kontrollponttól függ. Ez lehetőséget ad két Bézier-görbe tetszőlegesen sima csatlakoztatásásra, igen egyszerűen. Ezt fogjuk kihasználni a most következőkben.

2.3.3. Definíció. Egy szplájnt *kvadratikus*, illetve *köbös összetett Bézier-görbének* nevezünk, ha minden Bézier-görbéje másod-, illetve harmadrendű. Ezen Bézier-görbék nem szélső kontrollpontjait *köztes pontoknak* nevezzük.

A mai gyakorlatban éppen a kvadratikus és köbös szplájnok a legnépszerűbbek, nem utolsósorban egyszerűségük folytán.

2.3.4. Tétel. *A síkon tetszőlegesen adott $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$ pontokhoz, $\boldsymbol{t}_0$,$\boldsymbol{t}_n$ vektorokhoz és $u_0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n$ töréspontokhoz kivételes esetektől eltekintve pontosan egy olyan folytonosan differenciálható $\boldsymbol{S}$ kvadratikus összetett Bézier-görbe létezik, melyre $\boldsymbol{S}(u_i) = \boldsymbol{p}_i$, ahol $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{S}'(u_0) \parallel \boldsymbol{t}_0$ és $\boldsymbol{S}'(u_n) \parallel \boldsymbol{t}_n$.*

Bizonyítás. Mivel a csomópontok adottak, és két pont között az $\boldsymbol{S}_i$ Bézier-görbe másodrendű, az $\boldsymbol{S}_i$ Bézier-görbének a $\boldsymbol{p}_i$ és $\boldsymbol{p}_{i+1}$ végpontjain kívül még pontosan egy $\boldsymbol{q}_i$ kontrollpontja van. Ezeket a $\boldsymbol{q}_i$ köztes pontokat kell tehát úgy megválasztanunk, hogy az $\boldsymbol{S}$ görbe minden pontjában folytonosan differenciálható legyen, és a végpontjaiban az érintő iránya $\boldsymbol{t}_0$ és $\boldsymbol{t}_n$ legyen.

Két csomópont között Bézier-görbe van, tehát ott biztosan sima a görbe, ezért a differenciálhatósági feltételt elég a csomópontoknál felírnunk:

$$\boldsymbol{t}_0 \parallel \boldsymbol{S}'_0(0+),\ \boldsymbol{S}'_i(1-) = \boldsymbol{S}'_{i+1}(0+), \quad \text{ha} \quad 1 \le i \le n-1,\ \text{és} \quad \boldsymbol{S}'_{n-1}(1-) \parallel \boldsymbol{t}_n.$$

A Bézier-görbe deriváltjainak az előző szakaszban megadott kifejezése és az $\boldsymbol{S}_i$ görbék definíciója miatt ez azt jelenti, hogy

$$\lambda \boldsymbol{t}_0 = \frac{\boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{p}_0}{u_1 - u_0},\ \frac{\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_{i-1}}{u_i - u_{i-1}} = \frac{\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{p}_i}{u_{i+1} - u_i}, \quad \text{ha} \quad 1 \le i \le n-1,\ \frac{\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{q}_{n-1}}{u_n - u_{n-1}} = \mu \boldsymbol{t}_n,$$

valamely λ, μ valós számokra. Ebből $1 \le i \le n-1$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i}{u_{i+1} - u_i} &= \frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i}{u_{i+1} - u_i} + \frac{\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_i}{u_{i+1} - u_i} \\ &= \frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i}{u_{i+1} - u_i} - \frac{\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_{i-1}}{u_i - u_{i-1}}\end{aligned}$$

miatt

$$\frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i}{u_{i+1} - u_i} - \frac{\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_{i-1}}{u_i - u_{i-1}}, \qquad 1 \le i \le n-1$$

következik. Ezt váltakozó előjellel összeadva:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i}{u_{i+1} - u_i} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i}{u_{i+1} - u_i} - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \frac{\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_{i-1}}{u_i - u_{i-1}},$$

átalakítva

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i}{u_{i+1} - u_i} - \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i}{u_{i+1} - u_i} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i}{u_{i+1} - u_i}.$$

A bal oldalon a tagok jórésze kiejti egymást, így

$$(-1)^{n-1} \frac{\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{q}_{n-1}}{u_n - u_{n-1}} - \frac{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}_0}{u_1 - u_0} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i}{u_{i+1} - u_i}.$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}_0}{u_1 - u_0} = \frac{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0}{u_1 - u_0} + \frac{\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{q}_0}{u_1 - u_0},$$

kapjuk a

$$\underbrace{\frac{\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{q}_{n-1}}{u_n - u_{n-1}}}_{\mu t_n} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{\boldsymbol{p}_{n-j} - \boldsymbol{p}_{n-j-1}}{u_{n-j} - u_{n-j-1}} + (-1)^n \underbrace{\frac{\boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{p}_0}{u_1 - u_0}}_{\lambda t_0}$$

egyenletet. Behelyettesítve ide a megfelelő helyre a $\lambda \boldsymbol{t}_0$ és $\mu \boldsymbol{t}_n$ vektorokat, azonnal adódik a λ és a μ értéke, amiből aztán $\boldsymbol{q}_0$ és a többi $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{n-1}$ köztes pont. Ezzel az állítást igazoltuk. ■

2.3.5. Megjegyzés. A tétel szövegében jelzett kivételes esetek a legutolsó egyenlet miatt lehetségesek, mert ennek nem mindig van megoldása. (Lásd a 2.3.13. feladatot!)

Ez a tételünk teljesen kielégítő alapot ad a síkon adott pontokon keresztül vizuálisan sima görbék rajzolásához, hiszen az eredmény vizuálisan folytonos görbe. Sőt arra is lehetőséget ad, hogy folytonosan differenciálható görbével kössünk össze két előre adott görbét.

A mérnöki gyakorlatban azonban mindez kevésnek bizonyul, ezért a következő tétel eredményét szokták felhasználni, mely már nem szorítkozik a síkra, és másodrendű differenciálhatóságot biztosít. Sajnos ez az állítás — mint majd látni fogjuk — újabb problémákat vet fel.

2.3.6. Tétel. *Tetszőlegesen adott $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ pontokhoz, $\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{t}_n$ vektorokhoz és $u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < u_n$ csomópontokhoz minden $0 \leq i \leq n-2$ esetén pontosan egy olyan $\boldsymbol{S}$ köbös összetett Bézier-görbe létezik, amely kétszer folytonosan differenciálható, és amelyre $\boldsymbol{S}(u_i) = \boldsymbol{p}_i$ $(i \in \{0, 1, \ldots, n\})$, valamint $\boldsymbol{S}'(u_0) = \boldsymbol{t}_0$ és $\boldsymbol{S}'(u_n) = \boldsymbol{t}_n$.*

Bizonyítás. Legyen a keresett $\boldsymbol{S}$ összetett Bézier-görbe i-dik köbös Bézier-görbéje $\boldsymbol{S}_i$, melynek kontrollpoligonja $\{\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_i^-, \boldsymbol{q}_i^+, \boldsymbol{p}_{i+1}\}$. Ezen Bézier-görbék végpontjaiban mindkét oldali első és a második derivált is egybe kell essen. Az első deriváltak egybeesnek, ha

$$\boldsymbol{t}_0 = 3\frac{\boldsymbol{q}_0^- - \boldsymbol{p}_0}{u_1 - u_0}, \quad \frac{\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_{i-1}^+}{u_i - u_{i-1}} = \frac{\boldsymbol{q}_i^- - \boldsymbol{p}_i}{u_{i+1} - u_i}, \quad 3\frac{\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{q}_{n-1}^+}{u_n - u_{n-1}} = \boldsymbol{t}_n \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

a másodikak pedig akkor egyenlőek, ha

$$\frac{\boldsymbol{q}_i^+ - 2\boldsymbol{q}_i^- + \boldsymbol{p}_i}{(u_{i+1} - u_i)^2} = \frac{\boldsymbol{p}_i - 2\boldsymbol{q}_{i-1}^+ + \boldsymbol{q}_{i-1}^-}{(u_{i+1} - u_i)^2} \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Vezessük be a $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$ jelölést, és rendezzük a fenti egyenleteket úgy, hogy a keresett $\boldsymbol{q}_i^+$ és $\boldsymbol{q}_i^-$ pontokra kapjunk egyenletrendszert. A szélső esetekben a $\mathbf{p}_0 + \mathbf{t}_0\frac{\Delta_0}{3} = \mathbf{q}_0^-$ és $\mathbf{p}_n - \mathbf{t}_n\frac{\Delta_{n-1}}{3} = \mathbf{q}_{n-1}^+$ egyenletek adódnak, amelyekből $\mathbf{q}_0^-$ és $\mathbf{q}_{n-1}^+$ egyértelműen adódik. A köztes pontok esetében a $\mathbf{q}_i^+$ és $\mathbf{q}_i^-$ pontokra való rendezés a $(2n-2)\times(2n-2)$-es, lineáris

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i(\Delta_i + \Delta_{i-1}) &= \mathbf{q}_{i-1}^+\Delta_i + \mathbf{q}_i^-\Delta_{i-1} \\ \mathbf{p}_i(\Delta_i^2 - \Delta_{i-1}^2) &= \mathbf{q}_i^+\Delta_{i-1}^2 - 2\mathbf{q}_i^-\Delta_{i-1}^2 + 2\mathbf{q}_{i-1}^+\Delta_i^2 - \mathbf{q}_{i-1}^-\Delta_i^2 \end{aligned} \qquad (1 \le i \le n-1)$$

egyenletrendszerre vezet. Vezessük be az alábbi négy vektort az egyszerűbb számolás kedvéért.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}^+ &= (\boldsymbol{q}_0^+, \dots, \boldsymbol{q}_{n-2}^+), \\ \boldsymbol{q}^- &= (\boldsymbol{q}_1^-, \dots, \boldsymbol{q}_{n-1}^-), \\ \boldsymbol{p}^+ &= (\boldsymbol{p}_1(\Delta_1 + \Delta_0), \dots, \boldsymbol{p}_{n-1}(\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2})), \\ \boldsymbol{p}^- &= \Big(\boldsymbol{p}_1(\Delta_1^2 + \Delta_0^2) + \Delta_1^2\boldsymbol{t}_0\frac{\Delta_0}{3}, \\ &\qquad \dots, \boldsymbol{p}_i(\Delta_i^2 + \Delta_{i-1}^2), \dots, \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{p}_{n-1}(\Delta_{n-1}^2 - \Delta_{n-2}^2) - \Delta_{n-2}^2\Big(\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{t}_n\frac{\Delta_{n-1}}{3}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ezen vektorokat formálisan értjük, hiszen az elemeik nem számok, hanem maguk is vektorok (pontok). Ezen vektorokkal egyenletrendszerünk az igen egyszerű

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}^+ \\ \boldsymbol{p}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}^+ \\ \boldsymbol{q}^- \end{pmatrix} \qquad (*)$$

alakot ölti, ahol az $(n-1)\times(n-1)$-es A, B, C és D mátrixok elemeire

$$A:\ a_{i,j} = \delta_{i,j}\Delta_i, \qquad B:\ b_{i,j} = \delta_{i,j}\Delta_{i-1},$$

$$C:\ c_{i,j} = 2\delta_{i,j}\Delta_i^2 + \delta_{i,j-1}\Delta_{i-1}^2, \qquad D:\ d_{i,j} = -2\delta_{i,j}\Delta_{i-1}^2 - \delta_{i,j-1}\Delta_i^2.$$

(Itt a $\delta_{i,j}$ Kronecker-delta pontosan akkor 1, ha $i = j$, és minden más esetben 0.) Mivel az A és B mátrix is diagonális, és ezért szorzáskor felcserélhetők bármely más mátrixszal, az F.7.1 tétel miatt $\det\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(AD - BC)$, így az invertálhatóságot eldöntendő, csak ez utóbbi $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix invertálhatóságát kell igazolni.

Legyen $E = BC - AD$. Ekkor az E mátrix elemeire

$$E:\ e_{i,j} = \delta_{i,j+1}\Delta_i^2\Delta_{i-1} + 2\delta_{i,j}\Delta_{i-1}\Delta_i(\Delta_{i-1} + \Delta_i) + \delta_{i,j-1}\Delta_{i-1}^2\Delta_i.$$

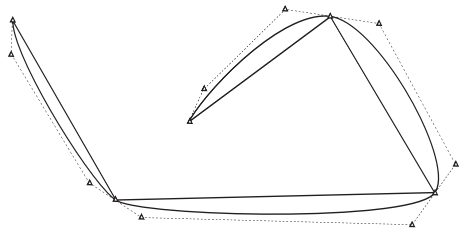
Világos, hogy az E mátrix minden eleme pozitív, ráadásul

$$\begin{aligned}e_{i,i} &= 2\Delta_{i-1}\Delta_i(\Delta_{i-1}+\Delta_i)\\ &> \Delta_i^2\Delta_{i-1}+\Delta_{i-1}^2\Delta_i = e_{i,i-1}+e_{i,i+1} = e_{i,1}+\cdots+e_{i,i-1}+e_{i,i+1}+\cdots+e_{i,n-1}\end{aligned}$$

minden lehetséges i-re. Ez azt is jelenti, hogy az E mátrix diagonálisan domináns, így a diagonálisan domináns mátrixok tétele (lásd a Függelékben) szerint invertálható.

Tehát $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ invertálható, amiért $(*)$ egyértelműen adja $\boldsymbol{q}_i^{\pm}$ pontokat, ami teljessé teszi tételünk bizonyítását. ■

Köbös összetett Bézier-görbével más módon is approximálhatunk egy görbét, ami lényegesen egyszerűbb, igaz csak egyszeres deriválhatóságot ad. Mindazonáltal egyszerűsége és többnyire kielégítő eredményessége alapján ez a módszer ma a legnépszerűbb.



2.3.1. Ábra. Egy köbös összetett C^1 Bézier-görbe.

2.3.7. Tétel. *Tetszőlegesen adott $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ pontokhoz, $u_0 < \cdots < u_n$ töréspontokhoz és $\boldsymbol{t}_0, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ vektorokhoz pontosan egy olyan $\boldsymbol{S}$ köbös összetett Bézier-görbe létezik, amely folytonosan differenciálható, és amelyre $\boldsymbol{S}(u_i) = \boldsymbol{p}_i$ és $\boldsymbol{S}'(u_i) = \boldsymbol{t}_i$, ahol $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.*

Bizonyítás. Legyen a keresett $\boldsymbol{S}$ összetett Bézier-görbe i-edik köbös Bézier-görbéje $\boldsymbol{S}_i$, melynek kontrollpoligonja $\{\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_i^-, \boldsymbol{q}_i^+, \boldsymbol{p}_{i+1}\}$. Ezen Bézier-görbék végpontjaiban az első derivált egybe kell essen a megfelelő $\boldsymbol{t}_i$ vektorral. Ez akkor teljesül, ha

$$\boldsymbol{t}_i = 3\frac{\boldsymbol{q}_i^- - \boldsymbol{p}_i}{u_{i+1}-u_i}, \quad \boldsymbol{t}_{i+1} = 3\frac{\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i^+}{u_{i+1}-u_i}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

Nem lévén több feltételünk, a keresett köztes pontokat ezekből kifejezve kapjuk. ■

Végül egy gyakorlati szempontból érdektelen, de matematikailag és történetileg mégis érdekes eredményt mutatunk be.

Ahogy már az előszóban is olvasható, a középkorban a hajók víztörő orrát egy kis ruganyos faléc, a „spline”, segítségével szerkesztették meg. Ezzel tehát olyan görbét rajzoltak, amely átmegy az adott pontokon, és feszültségi energiája a faléc ellenállása folytán minimális volt. Matematikailag ez a feszülési energia a vonal görbülete négyzetének integrálja. Közel ívhossz szerinti paraméterezés esetén a görbület nagyjából éppen a görbe második deriváltja, amelynek integráljáról szól az alábbi állítás.

2.3.8. Tétel. *Legyenek adottak a* $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ *pontok és az* $u_0 < \cdots < u_n$ *csomópontok. Legyen továbbá* $\boldsymbol{G}$ *olyan kétszer folytonosan deriválható görbe, melyre* $\boldsymbol{G}(u_i) = \boldsymbol{p}_i$. *Ha* $\boldsymbol{S}$ *olyan kétszer folytonosan deriválható köbös összetett Bézier-görbe, melyre* $\boldsymbol{S}(u_i) = \boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{G}'(u_0) = \boldsymbol{S}'(u_0)$ *és* $\boldsymbol{G}'(u_n) = \boldsymbol{S}'(u_n)$, *akkor*

$$\int_{u_0}^{u_n} |\boldsymbol{G}''(u)|^2 du \geq \int_{u_0}^{u_n} |\boldsymbol{S}''(u)|^2 du.$$

Bizonyítás. Mivel egy vektor abszolút értékének a négyzete a koordinátáinak négyzetösszege, elég, ha minden egyes koordinátafüggvényre külön-külön bizonyítjuk az állítást.

Legyen g és s a $\boldsymbol{G}$ és az $\boldsymbol{S}$ görbék egy-egy megfelelő koordinátafüggvénye. Ekkor a $g(u) = s(u) + (g(u) - s(u))$ kifejezést használva, az

$$\int_{u_0}^{u_n} (g''(u))^2 - (s''(u))^2 du = 2\int_{u_0}^{u_n} s''(u)(g''(u) - s''(u))du + \int_{u_0}^{u_n} (g''(u) - s''(u))^2 du$$

azonossághoz jutunk. Parciális integrálással adódik, hogy

$$\int_{u_0}^{u_n} s''(u)(g''(u) - s''(u))du = -\int_{u_0}^{u_n} s^{(3)}(u)(g'(u) - s'(u))du,$$

mert $[s''(u)(g'(u) - s'(u))]_{u_0}^{u_n} = 0$ a feltétel szerint. De $s^{(3)}(u)$ minden $[u_i, u_{i+1}]$ intervallumon konstans, így a jobb oldalt kiintegrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_{u_0}^{u_n} s''(u)(g''(u) - s''(u))du = -\sum_{i=0}^{n-1} s^{(3)}(u_{i+1})[g(u) - s(u)]_{u_i}^{u_{i+1}},$$

ami viszont nulla, mert $g(u_i) = s(u_i)$, hiszen mindkettő a $\boldsymbol{p}_i$ megfelelő koordinátája. Eszerint

$$\int_{u_0}^{u_n} (g''(u))^2 - (s''(u))^2 du = \int_{u_0}^{u_n} (g''(u) - s''(u))^2 du \geq 0,$$

ami bizonyítja a tételt. ■

2.3.2. Feladatok

2.3.9. Feladat. Álljanak az $\boldsymbol{S}$ összetett Bézier-görbe $\boldsymbol{S}_i$ Bézier-görbéinek kontrollpoligonjai a $\{\boldsymbol{p}_{i,j}\}_{j=0}^{n_i}$ pontokból. Bizonyítsuk be, hogy $\boldsymbol{S}$ akkor és csak akkor vizuálisan folytonos, ha $\boldsymbol{p}_{i,n_i} - \boldsymbol{p}_{i,n_i-1} \parallel \boldsymbol{p}_{i+1,1} - \boldsymbol{p}_{i+1,0}$!

2.3.10. Feladat. Igazoljuk, hogy egy vizuálisan folytonos összetett Bézier-görbe úgy is paraméterezhető, hogy folytonosan differenciálható legyen!

2.3.11. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy (a 2.3.9. feladat jelöléseit használva) az $\boldsymbol{S}$ összetett Bézier-görbe akkor és csak akkor C^r, ha minden $j = 0, 1, \ldots, r$ esetén

$$\frac{\Delta^j \boldsymbol{p}_{i,n_i-j}}{(u_i - u_{i-1})^j} = \frac{\Delta^j \boldsymbol{p}_{i+1,n_{i+1}-j}}{(u_{i+1} - u_i)^j}.$$

2.3.12. Feladat. Keressük meg azt a kvadratikus Bézier-görbét, amely vizuálisan folytonos módon köti össze az $x = 0$, $y > 1$ és az $y = 0$, $x > 1$ félegyeneseket! Tegyük ezt meg akkor is, ha a görbének át kell mennie a $(0, 0)$ ponton!

2.3.13. Feladat. Milyen feltételeket kell $\boldsymbol{t}_0$-nak és $\boldsymbol{t}_1$-nek teljesítenie a 2.3.4. tételben, hogy az állítás valóban teljesüljön?

2.4. B-szplájngörbék

Egy k-ad rendű B-szplájngörbe olyan összetett Bézier-görbe, mely k-fokú polinomiális görbedarabok segítségével áll elő, úgy illesztve ezeket egymáshoz, hogy az $(k-1)$-szeresen folytonosan differenciálható (C^{k-1}) görbét eredményezzen.

Az összetett Bézier-görbéknél a töréspontokban való illesztés jelentősen megnehezíti a munkát, ezért ezeket a görbéket más eljárásokkal generáljuk.

Egyik lehetséges — és itt csak egy feladat erejéig tárgyalt — út az, hogy a Bézier-görbéktől eltérően nem 0-t és 1-t, hanem a valós számok egy előre rögzített véges halmazából választott számokat helyettesítünk a kontrollpontokat szolgáltató polárformákba.

Egy jóval szokásosabb — és itt részletesebben tárgyalt — út az, hogy a B-szplájngörbéket a Bézier-görbék mintájára, de ezúttal a Bernstein-polinomok helyett B-szplájnfüggvényeket (lásd Függelék) alkalmazva állítjuk elő.

A B-szplájnfüggvények tartója korlátos, így egy kontrollpont változtatása csak lokálisan hat a B-szplájngörbére, sőt úgy vezethetünk be új kontrollpontokat, hogy eközben nem emelkedik a görbe polinomiális fokszáma. (Azaz azon polinomiális görbék fokszáma, amelyekből a görbe előáll.)

2.4.1. Definíció. Legyenek adottak a $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n$ pontok (a síkban vagy a térben). Ezeket *kontrollpontoknak* vagy *de Boor-pontoknak*, az ezek által meghatározott poligont *de Boor-poligonnak* hívjuk.

Legyen adott a $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{m-1} \leq t_m$ számsorozat úgy, hogy $m \geq n$. Ennek elemeit *csomópontoknak*, az ezekből alkotott $T = (t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m)$ vektort *csomópontvektornak* nevezzük.

A $[t_k, t_n]$ intervallumon értelmezett

$$\boldsymbol{D}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i N_i^k(t)$$

görbét a T csomópontvektorhoz tartozó k-adrendű *B-szplájngörbének* nevezzük, ahol N_i^k az i-edik k-rendű B-szplájnfüggvény.

2.4.2. Megjegyzés. A definícióból látszik, hogy k-ad rendű, vagyis $(k-1)$-szer differenciálható B-szplájngörbéhez legalább $n+k$ csomópont szükséges, vagyis $m \geq n+k$. Minthogy ráadásul $n > k$ is szükséges, n kontrollpontra legfeljebb $(n-1)$-szer differenciálható B-szplájngörbe illeszthető.

Bizonyítás nélkül is nyilvánvaló, hogy a B-szplájngörbe a de Boor-poligon konvex burkában található, hiszen a B-szplájnfüggvények egységbontást alkotnak.

A de Boor-pontok változtatása esetén a görbe lokálisan változik, azaz egy $\boldsymbol{d}_i$ kontrollpont csak a $t_i < t < t_{i+k+1}$ intervallumra fejti ki hatását. A (t_r, t_{r+1}) intervallumon a görbére csak a $\boldsymbol{d}_{r-k}, \ldots, \boldsymbol{d}_r$ pontok hatnak.

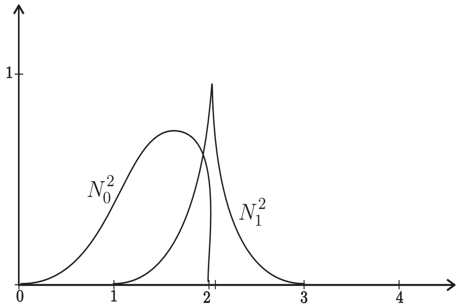
Konvenció. A csomópontvektort általában úgy választják, hogy az első és utolsó $k+1$ darab eleme megegyezik, és $m = n+k$, azaz $t_0 = t_1 = \cdots = t_{k-1} = t_k$, $t_n = t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots = t_{n+k}$. A továbbiakban ezért mi is a

$$T = (t_0 = t_1 = \cdots = t_{k-1} = t_k, \ldots, t_n = t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots = t_{n+k})$$

csomópontvektort használjuk, ahol természetesen az intervallum belső pontjai is lehetnek többszörösek, de multiplicitásuk nem lehet $(k+1)$-nél nagyobb.

E konvenció miatt a $\boldsymbol{d}_0$ és a $\boldsymbol{d}_n$ pont biztosan a B-szplájngörbére esik, és — mivel ebben az esetben az N_0^k B-szplájnfüggvény éppen a B_0^k Bernstein-polinom — a B-szplájngörbékre is a Bézier-görbéknél megszokott érintési tulajdonságok mondhatók ki.

Példaként legyen $n = 5$, és $k = 3$, valamint legyen $T = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4)$. Tekintsünk egy ehhez tartozó B-szplájngörbét a 2.4.1 ábrán.



2.4.1. Ábra. $n = 5$, $k = 3$, és $T = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4)$.

Amit ezen látunk, az nagyon hasonlít a kvadratikus Bézier-szplájnokhoz, hiszen geometriai értelemben nincs különbség B-szplájnok és összetett Bézier-görbék között. Ugyanannak a görbecsaládnak kétféle realizációját adják, ahol különbség csak a megvalósítás módjában van.

A B-szplájnfüggvények deriválását ismerve könnyen gyárthatunk képletet a B-szplájngörbék deriváltjára is, hiszen a B-szplájnfüggvényekről (lásd Függelék) ismertek alapján látható, hogy a görbe differenciálhatóságát és folytonosságát a csomópontvektor határozza meg.

2.4.3. Tétel. *A $\boldsymbol{D}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i N_i^k(t)$ B-szplájngörbe $\boldsymbol{D}'(t)$ deriváltgörbéje is B-szplájngörbe, melynek kontrollpontjai $\boldsymbol{d}_i' = k\frac{\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{d}_{i-1}}{t_{i+k} - t_i}$, vagyis ha $t \in [t_k, t_n]$, akkor*

$$\boldsymbol{D}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i' N_i^{k-1}(t).$$

Bizonyítás. A B-szplájnfüggvények deriváltjára ismert formula (Függelék!) szerint

$$\boldsymbol{D}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i (N_i^k)'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i k \Big(\frac{N_i^{k-1}(t)}{t_{i+k} - t_i} - \frac{N_{i+1}^{k-1}(t)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \Big)$$

adódik, ahonnan az állítás már egyszerű átrendezéssel következik. ∎

A gyakorlatban a B-szplájngörbéket nem a 2.4.1. definíció alapján szokás megrajzolni, inkább az alábbi rekurzív algoritmus használatos.

de Boor—Cox-rekurzió. *Legyen $t \in [t_j, t_{j+1})$, és legyenek adottak a $\boldsymbol{d}_i^0 = \boldsymbol{d}_i$ kontrollpontok. Ekkor a k-adrendű $\boldsymbol{D}$ B-szplájngörbe t-beli $\boldsymbol{D}(t)$ értékét a*

$$\boldsymbol{d}_i^{r+1}(t) = \frac{\boldsymbol{d}_i^r(t)(t - t_i) + \boldsymbol{d}_{i-1}^r(t)(t_{i+k-r} - t)}{t_{i+k-r} - t_i},$$

rekurziós formulából $\boldsymbol{d}_j^k(t)$ adja, ahol $\boldsymbol{d}_{-1}^r \equiv \boldsymbol{d}_n^r \equiv 0$, $r \leq i - 1 - j + k$, és $i \leq j$.

Bizonyítás. A B-szplájnfüggvények definíciójában szereplő rekurziót alkalmazva tetszőleges t-re, a görbe pontjaira

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i N_i^k(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i \Big(\frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t) \Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_i^{k-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_i^{k-1}(t) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{d}_{i-1} \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_i} N_i^{k-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \Big(\boldsymbol{d}_i \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} + \boldsymbol{d}_{i-1} \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_i} \Big) N_i^{k-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{\boldsymbol{d}_i (t-t_i) + \boldsymbol{d}_{i-1}(t_{i+k}-t)}{t_{i+k}-t_i} N_i^{k-1}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{d}_i^1(t) N_i^{k-1}(t).
\end{aligned}$$

Ugyanezt a levezetést most a $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{d}_i^1(t) N_i^{k-1}(t)$ sorra alkalmazva, majd még $(k-2)$-ször alkalmazva az eredményre,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{d}_i^1(t) N_i^{k-1}(t) &= \sum_{i=0}^{n+1} \boldsymbol{d}_i^2(t) N_i^{k-2}(t) = \cdots \\
\cdots &= \sum_{i=0}^{n+k-2} \boldsymbol{d}_i^{k-1}(t) N_i^1(t) = \sum_{i=0}^{n+k-1} \boldsymbol{d}_i^k(t) N_i^0(t)
\end{aligned}$$

adódik. Mivel $t \in (t_j, t_{j+1})$ esetén $N_i^0(t)$ kizárólag akkor nem 0, ha $i = j$, és ebben az esetben $N_j^0(t) = 1$, utolsó képletünk bizonyítja az állítást. ■

A most bizonyított rekurzióból azonnal következik de Boor–algoritmusa a B-szplájngörbe kiszámítására, ami bizonyítja, hogy a B-szplájnok kevesebb számítást igényelnek, mint azt az összetett Bézier-görbéknél tapasztaltuk.

de Boor-algoritmus. *Legyen $0 \le k \le n$, adottak a $\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n$ de Boor-pontok, és adott a $T = (t_0 = t_1 = \ldots = t_{k-1} = t_k, \ldots, t_n = t_{n+1} = t_{n+2} = \ldots = t_{n+k})$ csomópontvektor. Ekkor a k-ad rendű B-szplájngörbe t_* paraméterponthoz tartozó $\boldsymbol{D}(t_*)$ pontját a következő módon lehet kiszámolni:*

(1) *Keressük meg azt az egyértelmű j indexet, melyre $t_j \le t_* < t_{j+1}$!*
(2) *A $j-k+1 \le i \le j$ indexre számítsuk ki az $\alpha_i^0 = \frac{t_*-t_i}{t_{i+k}-t_i}$ együtthatókat, és legyen $\boldsymbol{d}_i^1 = \alpha_i^0 \boldsymbol{d}_i + (1-\alpha_i^0)\boldsymbol{d}_{i-1}$.*

(3) $1 \le r \le k-1$ *és* $j-k+r+1 \le i \le j$ *esetén legyen*

$$\alpha_i^{r+1} = \frac{t_* - t_i}{t_{i+k-r} - t_i} \text{ és } \boldsymbol{d}_i^{r+1} = \alpha_i^r \boldsymbol{d}_i^r + (1-\alpha_i^r)\boldsymbol{d}_{i-1}^r.$$

(4) $\boldsymbol{D}(t_*) = \boldsymbol{d}_j^k$ *a végeredmény.*

A fenti eljárást a $\boldsymbol{D}(t_*)$ kiszámítására a

$$\begin{array}{llllll}
\boldsymbol{d}_{j-k} & = \boldsymbol{d}_{j-k}^0 & & & & \\
\boldsymbol{d}_{j-k+1} & = \boldsymbol{d}_{j-k+1}^0 & \boldsymbol{d}_{j-k+1}^1 & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \boldsymbol{d}_{j-k+2}^2 & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\boldsymbol{d}_{j-1} & = \boldsymbol{d}_{j-1}^0 & \boldsymbol{d}_{j-1}^1 & \boldsymbol{d}_{j-1}^2 & \dots & \cdot \\
\boldsymbol{d}_j & = \boldsymbol{d}_j^0 & \boldsymbol{d}_j^1 & \boldsymbol{d}_j^2 & \dots & \boldsymbol{d}_j^{k-1} \quad \boldsymbol{d}_j^k = \boldsymbol{D}(t_*)
\end{array}$$

séma illusztrálja, ahol vízszintesen α_i^r-rel, átlósan pedig $(1-\alpha_i^r)$-rel szorzunk. A táblázat is jól mutatja a de Casteljau- és a de Boor-algoritmus közötti analógiát.

A Bézier-görbéknél szükségünk volt a rangemelésre, amikor újabb pontot hozzádva, a Bézier-görbe kontrollpontjaira egy változatlan alakú, de magasabb fokszámú görbét akartunk kapni. A B-szplájngörbéknél is cselekedhetünk hasonlóképpen, ha ugyanazon n elemű kontrollpoligonra $(k-1)$-nél magasabb differenciálhatóságú B-szplájnt akarunk illeszteni. Ezt hívják *csomópontbeszúrásnak* (knot insertion), ami azonban ezúttal nem jár a görbe rangjának növekedésével.

Böhm csomópontbeszúrási tétele. *Legyen adott a* $T = (t_0 = t_1 = \ldots = t_{k-1} = t_k, \ldots, t_n = t_{n+1} = t_{n+2} = \ldots = t_{n+k})$ *csomópontvektor és a* $D = (\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n)$ *kontrollpoligon. Legyen* $t_* \in [t_j, t_{j+1})$ *valamely egyértelmű* $k \le j < n$ *indexre.*

Legyen a $\hat{\boldsymbol{D}}(t) = \sum_{i=0}^n \hat{\boldsymbol{d}}_i \hat{N}_i^k(t)$ *B-szplájngörbe adva a*

$$\hat{t}_i = \begin{cases} t_i, & \text{ha } i \le j, \\ t_*, & \text{ha } i = j+1, \\ t_{i-1}, & \text{ha } j+2 \le i \end{cases}$$

csomópontokkal és a

$$\hat{\boldsymbol{d}}_i = \begin{cases} \boldsymbol{d}_i, & \text{ha } i < j-k, \\ \boldsymbol{d}_i, & \text{ha } i = j \text{ és } k = 0, \\ \alpha_i \boldsymbol{d}_i + (1-\alpha_i)\boldsymbol{d}_{i-1}, & \text{ha } j-k \le i \le j \text{ és } k \ne 0, \\ \boldsymbol{d}_{i-1}, & \text{ha } j < i \end{cases}$$

kontrollpontokkal, ahol $\alpha_i = \frac{t_* - t_i}{t_{i+k} - t_i}$ *és* $\hat{N}_i^k(t)$ *a* $\hat{t}_i$ *csomópontokhoz tartozó B-szplájnfüggvények.*

Ekkor a $\hat{\boldsymbol{D}}$ B-szplájngörbe megegyezik a T csomópontvektor és a D kontroll-poligon által meghatározott $\boldsymbol{D}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{d}_i N_i^k(t)$ B-szplájngörbével.

Bizonyítás. A definíció alapján nyilván $N_i^k = \hat{N}_i^k$ minden $i \leq j-k-1$ és $N_i^k = \hat{N}_{i+1}^k$ minden $j+1 \leq i$ esetén, ezért a

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{D}}(t) &= \sum_{i=0}^{n} \hat{\boldsymbol{d}}_i \hat{N}_i^k(t) \\
&= \sum_{i=0}^{j-k-1} \boldsymbol{d}_i \hat{N}_i^k(t) + \overbrace{\sum_{i=j-k}^{j} (\alpha_i \boldsymbol{d}_i + (1-\alpha_i)\boldsymbol{d}_{i-1}) \hat{N}_i^k(t)}^{\Sigma} + \sum_{i=j+1}^{n} \boldsymbol{d}_{i-1} \hat{N}_i^k(t) \\
&= \sum_{i=0}^{j-k-1} \boldsymbol{d}_i N_i^k(t) + \Sigma + \sum_{i=j+1}^{n} \boldsymbol{d}_{i-1} N_{i-1}^k(t)
\end{aligned}
$$

levezetésben elég a Σ szummát vizsgálnunk. Minthogy $\alpha_{j-k} = 1$, és $\alpha_j = 0$, nyilván

$$
\begin{aligned}
\Sigma = & \sum_{i=j-k}^{j} \alpha_i \boldsymbol{d}_i \hat{N}_i^k(t) + \sum_{i=j-k-1}^{j-1} (1-\alpha_{i+1}) \boldsymbol{d}_i \hat{N}_{i+1}^k(t) \\
&= (1-\alpha_{j-k}) \boldsymbol{d}_{j-k-1} \hat{N}_{j-k}^k(t) + \\
&\qquad + \sum_{i=j-k}^{j-1} \boldsymbol{d}_i (\alpha_i \hat{N}_i^k(t) + (1-\alpha_{i+1}) \hat{N}_{i+1}^k(t)) + \alpha_j \boldsymbol{d}_j \hat{N}_j^k(t) \\
&= \sum_{i=j-k}^{j-1} \boldsymbol{d}_i (\alpha_i \hat{N}_i^k(t) + (1-\alpha_{i+1}) \hat{N}_{i+1}^k(t)),
\end{aligned}
$$

ami a B-szplájnfüggvényekre érvényes Böhm-tétel szerint igazolja az állítást. ■

2.4.1. Feladatok

2.4.4. Feladat. Keressünk zárt (nem rekurzív) formulát uniform B-szplájnokra, melyek rendje nem nagyobb, mint 3!

2.4.5. Feladat. Bizonyítsuk be a 2.4.2. megjegyzésben foglaltakat másodrendű B-szplájnokra!

2.4.6. Feladat. Igaz-e, hogy egy harmadrendű B-szplájngörbe egyenes- és parabolaszakaszokból áll?

2.4.7. Feladat. Legyenek k és n természetes számok, melyekre $2 \leq k < n$, legyen $T = \{t_0, \dots, t_k, \dots, t_n, \dots, t_{n+k}\}$ valós számok egy nemcsökkenő sorozata, és legyenek $b_k, \dots, b_j, \dots, b_{n-1}$ olyan szimmetrikus k-affin leképezések, hogy

- minden $0 \leq \ell \leq n-1$ esetén a $\boldsymbol{d}_\ell = b_j(t_{\ell+1}, \dots, t_{\ell+k})$ pont független a j-től, amennyiben $\ell \leq j \leq \ell + k$, továbbá
- minden $k \leq j \leq n-2$ esetén $b_j(t_{j+1}, \dots, t_{j+1}) = b_{j+1}(t_{j+1}, \dots, t_{j+1})$.

A $[t_k, t_n]$ intervallumon a következő módon definiáljuk ezekkel a k-rendű $\boldsymbol{D}$ összetett Bézier-görbét: a $[t_k, t_{k+1}]$ intervallumon értelmezett $\boldsymbol{B}_k$ Bézier-görbét a

$$b_k(t_k, \dots, t_k), b_k(t_k, \dots, t_k, t_{k+1}), \dots, b_k(t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+1}), b_k(t_{k+1}, \dots, t_{k+1})$$

kontrollpontok, a $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ intervallumon értelmezett $\boldsymbol{B}_{k+1}$ Bézier-görbét a

$$b_{k+1}(t_{k+1}, \dots, t_{k+1}), b_{k+1}(t_{k+1}, \dots, t_{k+1}, t_{k+2}), \dots, b_{k+1}(t_{k+2}, \dots, t_{k+2})$$

kontrollpontok, majd így folytatva, végül a $[t_{n-1}, t_n]$ intervallumon értelmezett $\boldsymbol{B}_{n-1}$ Bézier-görbét a

$$b_{n-1}(t_{n-1}, \dots, t_{n-1}), b_{n-1}(t_{n-1}, \dots, t_{n-1}, t_n), \dots, b_{n-1}(t_n, \dots, t_n)$$

kontrollpontok határozzák meg.

Bizonyítsuk be, hogy $\boldsymbol{D}$ egy B-szplájngörbe a $[t_k, t_n]$ intervallumon, vagyis $(k-1)$-szer differenciálható! Bizonyítsuk be, hogy a $\boldsymbol{d}_\ell$ pontok a *de Boor-pontok*!

2.4.8. Feladat. Igazoljuk, hogy egy B-szplájngörbe Bézier-görbéinek polárformái teljesítik az előző feladat feltételeit!

2.5. Racionális Bézier-görbék

A Bézier-görbék és a Bézier-szplájnok számtalan jó tulajdonsággal rendelkeznek. A műszaki ábrázolás közben gyakran alkalmazott axonometria esetében például ilyen fontos tulajdonság az affin invariancia, melynek értelmében egy ilyen görbe merőleges vetítés melletti képének meghatározásához elegendő a kontrollpontokat vetíteni, és utána azokból előállítani a vetített görbét.

Manapság viszont a számítógépes filmtrükkök idejében egyre nagyobb az igény a lehető legélethűbb ábrázolásra, ami a perspektivitás nélkül nem megy. A görbék ábrázolásánál ehhez szükséges projektívitási tulajdonsággal maradéktalanul csak a racionális Bézier-görbék és ezek származékai rendelkeznek.

A Bézier-görbék bevezetéséhez a parabola egy előállítását használtuk fel, és többre nem is volt szükségünk, hiszen a merőleges affinitás a parabolát parabolába viszi. Perspektívitás esetén viszont előfordulhat, hogy egy parabola képe egy másfajta kúpszelet — pl. egy kör — lesz, ezért most a kúpszeletek előállításából indulunk ki, hiszen kúpszelet projektív képe mindig kúpszelet.

A projektív geometriának a Függelékben is tárgyalt modellje adja az ötletet, hogy minden kúpszeletet egy eggyel magasabb dimenziós térben kiválasztott parabola projektív képeként állítsunk elő.

2.5.1. Lemma. *Legyen P egy tetszőleges nem az (x, y)-síkon lévő pont. Ekkor minden $\boldsymbol{K}$ kúpszelet az (x, y)-síkon előáll egy az (x, y, z)-térben megfelelően kiválasztott parabolának a P pontból az (x, y)-síkra való projekciójaként.*

Bizonyítás. H a kúpszelet parabola, akkor a bizonyítás triviális, hiszen elegendő egy, az (x, y)-síkkal párhuzamos síkot vennünk.

Ha a kúpszelet ellipszis vagy hiperbola, akkor a bizonyítási eljárás a következő: Vegyük azt a kúpot (nem feltétlenül forgáskúpot!), melyet úgy nyerünk, hogy a P pontot összekötjük a kúpszelet pontjaival. Ha nem forgáskúpot kapunk, akkor a téren egy olyan affinitást hajtunk végre, mely azt forgáskúpba viszi át. E forgáskúp egyik alkotóján keresztül húzzunk egy érintősíkot, majd ezt toljuk el párhuzamosan, és erre vetítsük a kúpszeletet. Ez biztosan — gondoljunk Dandelin módszerére — parabola lesz, és ennek vetítettje a megadott kúpszelet. Ha eredetileg nem forgáskúpot kaptunk, akkor még hajtsuk végre az előbb alkalmazott affinitás inverzét a téren. A parabolából ezzel az affinitással kapott parabola lesz a megoldás. ■

Alább a racionális Bézier-görbék előállításának módszerét alapozzuk meg.

2.5.2. Tétel. *Legyen $\boldsymbol{c}(t) \in \mathbb{R}^2$ egy adott kúpszelet $t \in \mathbb{R}$ szerinti paraméterezésben. Ekkor létezik $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy*

$$\boldsymbol{c}(t) = \frac{\omega_0 \boldsymbol{p}_0 B_0^2(t) + \omega_1 \boldsymbol{p}_1 B_1^2(t) + \omega_2 \boldsymbol{p}_2 B_2^2(t)}{\omega_0 B_0^2(t) + \omega_1 B_1^2(t) + \omega_2 B_2^2(t)},$$

ahol $B_i^j(t)$ a Bernstein-polinomokat jelöli.

Bizonyítás. Azonosítsuk $\mathbb{R}^2$ pontjait a projektív geometriából jól ismert módon az (x, y, z) koordinátázású euklideszi tér $z = 1$ síkjával. Vetítési pontként az origót használjuk. Ekkor a $\boldsymbol{c}(t)$ pont térbeli koordinátája $(\boldsymbol{c}(t), 1)$ — ennek a 3-dimeziós vektornak első komponense két koordinátát határoz meg! — lesz.

Ez a lemma szerint vetített képe lesz egy háromdimenziós parabolának, melynek egyenlete emiatt $(\omega(t)\boldsymbol{c}(t), \omega(t))$ (ne feledjük, ez egy három komponensű vektor!). A parabola egy másodrendű polinomiális görbe, ezért a harmadik $\omega(t)$ komponens egy másodfokú polinom. Eszerint $\omega(t)$ felírható a másodfokú Bernstein-polinomok $\omega(t) = \omega_0 B_0^2(t) + \omega_1 B_1^2(t) + \omega_2 B_2^2(t)$ lineáris kombinációjaként.

Egy képletben összegezve ismereteinket:

$$\omega(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}(t)\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{c}(t)\sum_{i=0}^{2}\omega_i B_i^2(t)\\ \sum_{i=0}^{2}\omega_i B_i^2(t)\end{pmatrix}.$$

Mivel a bal oldal egy parabola, léteznek olyan $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^2$ pontok, hogy

$$\omega(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}(t)\\ 1\end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_i\\ \omega_i\end{pmatrix}B_i^2(t).$$

A két azonosság egybevetése során az alsó komponensben nyilvánvaló az azonosság. A felső komponens szerint pedig

$$\sum_{i=0}^{2}\boldsymbol{b}_i B_i^2(t) = \boldsymbol{c}(t)\sum_{i=0}^{2}\omega_i B_i^2(t),$$

amit átrendezve

$$\boldsymbol{c}(t) = \frac{\boldsymbol{b}_0 B_0^2(t) + \boldsymbol{b}_1 B_1^2(t) + \boldsymbol{b}_2 B_2^2(t)}{\omega_0 B_0^2(t) + \omega_1 B_1^2(t) + \omega_2 B_2^2(t)}$$

adódik. A $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{b}_i/\omega_i$ helyettesítés bizonyítja az állítást. ∎

A $\boldsymbol{c}(t)$ kúpszelet előállítása során a $\boldsymbol{p}_i$ pontokat a kúpszelet kontrollpontjainak, az ω_i számokat pedig súlyoknak nevezhetjük.

Nyilvánvaló, hogy egyenlő súlyok használata esetén a kúpszelet a kontrollpontok által meghatározott Bézier-görbe, vagyis parabola lesz.

2.5.3. Definíció. Legyenek ω_i $(i = 0, \dots, n)$ konstansok, $\boldsymbol{p}_i$ $(i = 0, \dots, n)$ térbeli pontok. A $[0, 1]$ intervallumon értelmezett

$$\boldsymbol{C}(t) = \frac{\omega_0\boldsymbol{p}_0 B_0^n(t) + \cdots + \omega_n\boldsymbol{p}_n B_n^n(t)}{\omega_0 B_0^n(t) + \cdots + \omega_n B_n^n(t)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i B_i^n(t)}\boldsymbol{p}_i$$

görbét a $\boldsymbol{p}_i$ *kontrollpontokhoz* és ω_i *súlyokhoz* tartozó *racionális Bézier-görbének* nevezzük. A kontrollpontok által alkotott poligont *kontrollpoligonnak* nevezzük.

Ha a racionális Bézier-görbe utolsó alakjára nézünk, akkor az affin invariancia azonnal látszik. Ugyancsak kiolvashatjuk ebből a konvex burokban maradás tulajdonságát is pozitív súlyok esetében.

Az igazi kérdés a projektív invariancia, hiszen az eddigi görbetípusok ennek a követelménynek nem tudtak eleget tenni.

2.5.4. Tétel. *Vetítsük az $\omega_0, \ldots, \omega_n$ súlyok és a $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ kontrollpontok által meghatározott $\boldsymbol{C}(t)$ racionális Bézier-görbét az origóból a $z = 1$ síkra.*

Az így kapott $\boldsymbol{C}'(t)$ perspektív kép is racionális Bézier-görbe lesz, melyet az $\omega_0\boldsymbol{p}_0^3, \ldots, \omega_n\boldsymbol{p}_n^3$ súlyok és a $\boldsymbol{p}_0/\boldsymbol{p}_0^3, \ldots, \boldsymbol{p}_n/\boldsymbol{p}_n^3$ kontrollpontok határoznak meg, ahol $\boldsymbol{p}_n^k$ a $\boldsymbol{p}_n$ pont k-adik koordinátáját jelöli.

Bizonyítás. Ha az origóból vetítünk, akkor a $\boldsymbol{C}'(t)$ perspektív kép koordinátái úgy aránylanak a $\boldsymbol{C}(t)$ koordinátáihoz, ahogy a harmadik koordinátáik. Mivel $\boldsymbol{C}'(t)$ harmadik koordinátája konstans 1, ezért

$$\boldsymbol{C}'(t) = \frac{\boldsymbol{C}(t)}{\boldsymbol{C}^3(t)} = \frac{\omega_0\boldsymbol{p}_0 B_0^n(t) + \cdots + \omega_n\boldsymbol{p}_n B_n^n(t)}{\omega_0\boldsymbol{p}_0^3 B_0^n(t) + \cdots + \omega_n\boldsymbol{p}_n^3 B_n^n(t)},$$

ami igazolja az állítást. ■

Ezen tétel segítségével receptet kapunk a projektív invariancia alkalmalmazására általános esetben. Mozgások és affinitás egymásutánjaként a vetítési pont az origóba, a képsík a $z = 1$ síkba transzformálható. Ezek során a súlyok nem változnak, a kontrollpontok pedig a transzformációknak megfelelően változnak. A tétel alkalmazásával a súlyok és kontrollpontok képe adódik.

Bár a definícióban használt képlet igen egyszerűnek látszik, sajnos a számítógépek számára instabillá válhat — például nulla közeli súlyok esetén —, és a számolásból adódó kerekítési hibák is nagy mértékben torzíthatják a végeredményt, ezért egy hatékony számolási eljárásra van szükség.

Természetesen adódik az ötlet, hogy fenti eredményünkkel ötvözve az eggyel magasabb dimenzióban ismert de Casteljau-algoritmust alkalmazzuk.

A de Casteljau-algoritmus. *Legyen a $\boldsymbol{C}(t)$ racionális Bézier-görbe az $\omega_0, \ldots, \omega_n$ súlyok és a $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ kontrollpontok által meghatározott.*

Legyen $t \in [0,1]$, és $\omega_0^0(t) = \omega_0$, $\ldots$, $\omega_n^0(t) = \omega_n$, valamint $\boldsymbol{p}_0^0(t) = \boldsymbol{p}_0$, $\ldots$, $\boldsymbol{p}_n^0(t) = \boldsymbol{p}_n$. Legyen továbbá $0 \leq i \leq n - r$ esetén

$$\begin{aligned}
\omega_i^r(t) &= (1-t)\omega_i^{r-1}(t) + t\omega_{i+1}^{r-1}(t),\\
\boldsymbol{p}_i^r(t) &= (1-t)\frac{\omega_i^{r-1}(t)\boldsymbol{p}_i^{r-1}(t)}{\omega_i^r(t)} + t\frac{\omega_{i+1}^{r-1}(t)\boldsymbol{p}_{i+1}^{r-1}(t)}{\omega_i^r(t)}.
\end{aligned}$$

Ekkor $\boldsymbol{p}_0^n(t) = \boldsymbol{C}(t)$.

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításában látottak szerint az eggyel nagyobb dimenziós térben $\binom{\omega_i^r(t)\boldsymbol{p}_i^r(t)}{\omega_i^r(t)}$ a kontrollpontok sorozata.

Ezekre a pontokra és a t paraméterre felírva a de Casteljau-algoritmust

$$\begin{pmatrix}\omega_i^r(t)\boldsymbol{p}_i^r(t)\\ \omega_i^r(t)\end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix}\omega_i^{r-1}(t)\boldsymbol{p}_i^{r-1}(t)\\ \omega_i^{r-1}(t)\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\omega_{i+1}^{r-1}(t)\boldsymbol{p}_{i+1}^{r-1}(t)\\ \omega_{i+1}^{r-1}(t)\end{pmatrix}$$

adódik. Ennek komponenseiből éppen a tétel által leírt eljárást olvashatjuk ki, ugyanakkor az eljárás $\binom{\omega_0^n\boldsymbol{p}_0^n(t)}{\omega_0^n(t)}$ eredményéről tudjuk, hogy az a „felvetített” Bézier-görbe, amely előző tételünk szerint $\binom{\boldsymbol{C}(t)}{1}\left(\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)\right)$. Eszerint

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}(t)\\ 1\end{pmatrix}\left(\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)\right) = \begin{pmatrix}\omega_0^n(t)\boldsymbol{p}_0^n(t)\\ \omega_0^n(t)\end{pmatrix},$$

amelynek az alsó komponensből adódó $\omega_0^n(t) = \sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)$ következményét a felső komponensbe helyettesítve, az állítás adódik. ■

2.5.1. Feladatok

2.5.5. Példa. A $\boldsymbol{p}_0 = (0,0)$, $\boldsymbol{p}_1 = (1,0)$, és $\boldsymbol{p}_2 = (1,1)$ kontrollpontok és az $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1$, és $\omega_2 = 2$ súlyok racionális Bézier-görbéje a $(0,1)$ középpontú 1-sugarú negyedkörcikk.

Bizonyítás. A definícióból indulva kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{C}(t) = \frac{\omega_0\boldsymbol{p}_0B_0^2(t) + \omega_1\boldsymbol{p}_1B_1^2(t) + \omega_2\boldsymbol{p}_2B_2^2(t)}{\omega_0B_0^2(t) + \omega_1B_1^2(t) + \omega_2B_2^2(t)} = \frac{\boldsymbol{p}_0(1-t)^2 + 2\boldsymbol{p}_1t(1-t) + 2\boldsymbol{p}_2t^2}{1+t^2}$$
$$= \left(\frac{2t(1-t)+2t^2}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^2}\right) = (0,1) + \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2}\right),$$

a keresett racionális Bézier-görbe, ahol $B_i^j(t)$ a Bernstein-polinomokat jelöli. Világos, hogy $(2t)^2 + (t^2-1)^2 = (1+t^2)^2$, ami igazolja a példa állítását. ■

2.5.6. Feladat. Keressünk súlyokat és kontrollpontokat egy kör előállításához!

2.5.7. Feladat. Jellemezzük a racionális Bézier-görbe deriváltjait a súlyok és kontrollpontok segítségével!

2.5.8. Feladat. Az eddigiek alapján alkossuk meg a racionális B-szplájngörbe fogalmát!

2.5.9. Feladat. Határozzuk meg egy racionális Bézier-görbe új súlyait és kontrollpontjait, ha egy tetszőleges pontból vetítjük egy tetszőleges síkra!

3

Felületek modellezése

Az előző fejezetben megismerkedtünk a görbék számítógépes ábrázolásának geometriai és gyakorlati alapjaival, de a legszélesebb ipari alkalmazása persze a felületek ábrázolásának van, hiszen a gépkocsik, repülők és a televíziós effektek tervezésére is ezt kell alkalmazni. A felületek ábrázolásánál is ugyanazok az elvárások fogalmazódnak meg, mint a görbéknél, ezért ennek megközelítése nagyban támaszkodik az ott leírtakra. Mi két tanulságos részt ragadunk ki.

(1) A Bézier-kontrollpoligonok legkézenfekvőbb általánosítása a Bézier-háromszögekkel határolt Bézier-kontrollháló. Az ezek segítségével előállított felületek a Bézier-háromszögfelületek. Bár az alkalmazások szempontjából igen előnyös tulajdonságokkal rendelkezik a módszer, mégsem vált népszerűvé, mert a benne használt baricentrikus koordinátákkal való számolást a felhasználók jó része nem kedvelte meg.

(2) A Bézier-négyszögek határolta Bézier-kontrollháló és az általa előállított felület „barátságosabb” koordináta-rendszerben készül, és nagyobb szabadsági foka révén alkalmasabb az összetett felületek előállítására, így nem csoda, hogy ezt az eljárást lépten-nyomon felfedezhetjük a professzionális tervezőrendszerek eszköztárában.

3.1. Bézier-háromszögfelületek

Amikor 1959-ben de Casteljau megalkotta a Bézier-görbés szerkesztési módszert, a felületek ábrázolására elsőként a háromszöges módszert találta ki, mely szintén Bézierről kapta nevét, hiszen de Casteljau munkássága sohasem volt publikálva.

A Bézier-háromszögfelületekre vonatkozó de Casteljau-módszer közvetlen általánosítása a Bézier-görbés eljárásnak. A kontrollpoligon szerepét egy térbeli háromszögháló veszi át, ahogy a

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \boldsymbol{p}_{040} & & & & \\
 & & & \boldsymbol{p}_{031} & & \boldsymbol{p}_{130} & & & \\
 & & \boldsymbol{p}_{022} & & \boldsymbol{p}_{121} & & \boldsymbol{p}_{220} & & \\
 & \boldsymbol{p}_{013} & & \boldsymbol{p}_{112} & & \boldsymbol{p}_{211} & & \boldsymbol{p}_{310} & \\
\boldsymbol{p}_{004} & & \boldsymbol{p}_{103} & & \boldsymbol{p}_{202} & & \boldsymbol{p}_{301} & & \boldsymbol{p}_{400}
\end{array}$$

négyes kontrollháló mutatja.

Konvenció. A továbbiakhoz bevezetjük az *indexvektor* fogalmát. Az $\underline{\mathrm{i}} = (j,k,l)$ jelölés után a $\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}}$ jelentése egyszerűen $\boldsymbol{p}_{j,k,l}$. Bevezetjük még az $|\underline{\mathrm{i}}| = j+k+l$ jelölést és az $\underline{\mathrm{x}} = (1,0,0)$, $\underline{\mathrm{y}} = (0,1,0)$, $\underline{\mathrm{z}} = (0,0,1)$ konstans indexvektorokat.

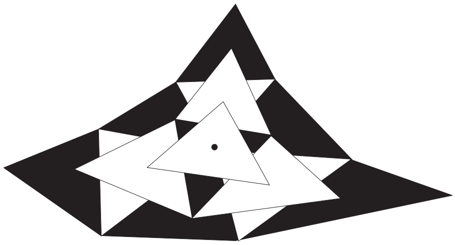
Figyeljük meg, hogy $\underline{\mathrm{i}} = j\underline{\mathrm{x}}+k\underline{\mathrm{y}}+l\underline{\mathrm{z}}$, ha a skalárral való szorzást és az összeadást a vektoroknál megszokott módon értelmezzük.

3.1.1. Definíció. Legyen adott az $(n+1)(n+2)/2$ darab $\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}} \in \mathbb{R}^3$ kontrollpont, ahol az indexvektorra $|\underline{\mathrm{i}}| = n$. Valamely $\boldsymbol{u}$ baricentrikus koordinátára legyen

$$\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}}^r(\boldsymbol{u}) = u\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{x}}}^{r-1}(\boldsymbol{u}) + v\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{y}}}^{r-1}(\boldsymbol{u}) + w\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{z}}}^{r-1}(\boldsymbol{u}),$$

ahol $r = 1,\dots,n$, $|\underline{\mathrm{i}}| = n-r$, és $\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}}^0(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}}$. Az $\boldsymbol{u}$ baricentrikus paraméterértékhez tartozó $\boldsymbol{p}_{0,0,0}^n(\boldsymbol{u})$ pont a *Bézier-háromszögfelületen* fut végig.

Azt az eljárást, amely a Bézier-háromszögfelülethez vezet *de Casteljau-algoritmusnak* nevezzük. A $\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}}^r(\boldsymbol{u})$ pontokat *de Casteljau-pontoknak*, az általuk meghatározott térbeli háromszöghálót *kontrollhálónak* hívjuk.



3.1.1. Ábra. A háromszöghálón alkalmazott de Casteljau-algoritmus.

Az eljárás garantálja számunkra a legfontosabb tulajdonságokat: az affin invarianciát, a konvex burkon belül maradást, és azt, hogy a határológörbéket a határoló kontrollpontok határozzák meg. A Bernstein-polinomok pedig lehetővé teszik a de Casteljau-pontok és a deriváltak kiszámolására, valamint a felületek illeszkedési feltételeinek meghatározására.

3.1.2. Tétel. *A de Casteljau-pontokra*

$$\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}}^r(\boldsymbol{u}) = \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{j}}} B_{\underline{\mathrm{j}}}^r(\boldsymbol{u}), \qquad \textit{ahol } |\underline{\mathrm{i}}| = n-r.$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz elég a

$$\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}}^{r+1}(\boldsymbol{u}) = u\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{x}}}^r(\boldsymbol{u}) + v\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{y}}}^r(\boldsymbol{u}) + w\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{z}}}^r(\boldsymbol{u})$$

$$
\begin{aligned}
&= u \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{j}}+\underline{\mathrm{x}}} B^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}) + v \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{j}}+\underline{\mathrm{y}}} B^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}) + w \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{j}}+\underline{\mathrm{z}}} B^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}) \\
&= \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r+1} u\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{j}}} B^r_{\underline{\mathrm{j}}-\underline{\mathrm{x}}}(\boldsymbol{u}) + v\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{j}}} B^r_{\underline{\mathrm{j}}-\underline{\mathrm{y}}}(\boldsymbol{u}) + w\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{j}}} B^r_{\underline{\mathrm{j}}-\underline{\mathrm{z}}}(\boldsymbol{u}) \\
&= \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r+1} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}+\underline{\mathrm{j}}} B^{r+1}_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u})
\end{aligned}
$$

levezetést tekinteni. ∎

3.1.3. Következmény. *A Bézier-háromszögfelület pontjaira*

$$\boldsymbol{p}^n(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}^n_{\underline{0}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=n} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{j}}} B^n_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}).$$

3.1.4. Tétel. *A Bézier-háromszögfelület* $\boldsymbol{d}$ *baricentrikus irány szerinti* r*-edik deriváltja a* $\boldsymbol{u}$ *baricentrikus paraméterű pontban a de Casteljau-pontokkal kifejezve*

$$D^r_{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{p}^n(\boldsymbol{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\underline{\mathrm{i}}|=r} \boldsymbol{p}^{n-r}_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) B^r_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{d}).$$

Bizonyítás. Felhasználva a Bézier-háromszögfelületet előállító képletet, valamint a Bernstein-polinom deriváltjáról ismerteket, azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
D^r_{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{p}^n(\boldsymbol{u}) &= D^r_{\boldsymbol{d}} \Big(\sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=n} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{j}}} B^n_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}) \Big) = \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=n} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{j}}} D^r_{\boldsymbol{d}} \big(B^n_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}) \big) \\
&= \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=n} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{j}}} \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\underline{\mathrm{i}}|=r} B^r_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{d}) B^{n-r}_{\underline{\mathrm{j}}-\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\underline{\mathrm{i}}|=r} B^r_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{d}) \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=n} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{j}}} B^{n-r}_{\underline{\mathrm{j}}-\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\underline{\mathrm{i}}|=r} B^r_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{d}) \sum_{|\underline{\mathrm{k}}|=n-r} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{k}}+\underline{\mathrm{i}}} B^{n-r}_{\underline{\mathrm{k}}}(\boldsymbol{u}),
\end{aligned}
$$

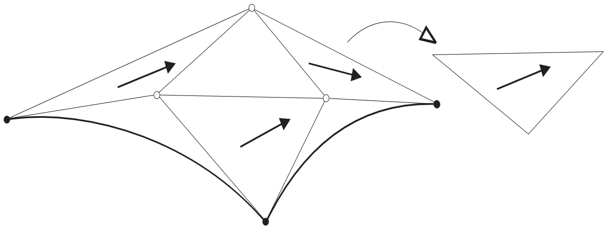
ami a 3.1.3. tétel alkalmazása után igazolja az állítást. ∎

A fenti képletben az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{d}$ szerepét felcserélve a duális eredmény adódik.

3.1.5. Következmény.

$$D^r_{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{p}^n(\boldsymbol{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=n-r} \boldsymbol{p}^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{d}) B^{n-r}_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}).$$

A számolások egyszerű módon interpretálhatók a geometria nyelvén, ahogy azt az alábbi ábra is mutatja.



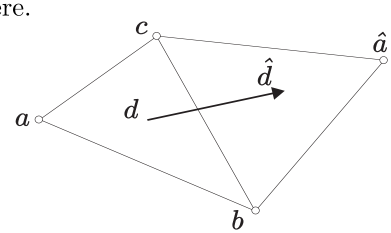
3.1.2. Ábra. Az iránymenti derivált kiszámítása.

Az első deriváltak esetében, ahol $r = 1$, és $\boldsymbol{d} = (d, e, f)$,

$$D_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{p}^n(\boldsymbol{u}) = n \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=1} \boldsymbol{p}^{n-1}_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}) B^1_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{d}) = n(d\boldsymbol{p}^{n-1}_{\underline{\mathrm{x}}}(\boldsymbol{u}) + e\boldsymbol{p}^{n-1}_{\underline{\mathrm{y}}}(\boldsymbol{u}) + f\boldsymbol{p}^{n-1}_{\underline{\mathrm{z}}}(\boldsymbol{u}))$$

az érintővektor, vagyis a $\boldsymbol{p}^{n-1}_{\underline{\mathrm{x}}}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{p}^{n-1}_{\underline{\mathrm{y}}}(\boldsymbol{u})$ és $\boldsymbol{p}^{n-1}_{\underline{\mathrm{z}}}(\boldsymbol{u})$ de Casteljau-pontok egy baricentrikus bázist alkotnak a $\boldsymbol{p}^n(\boldsymbol{u})$ pontbeli érintősíkban.

Ha Bézier-háromszögekkel előállított Bézier-háromszögfelületeket kívánunk differenciálható módon összeilleszteni, akkor szükségünk van a határológörbék mentén vett deriváltak illesztésére.



3.1.3. Ábra. A felületillesztés baricentrikus koordináta-rendszere.

3.1.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy — amint a 3.1.8 ábra is mutatja — két Bézier-háromszögfelület az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, illetve a $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\hat{\boldsymbol{a}}$ pontokra illeszkedik, és közös határológörbéjük a $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ pontokon megy keresztül. Tegyük fel azt is, hogy $\hat{\boldsymbol{a}}$ az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ pontok által meghatározott síkban van.*

A két felület akkor és csak akkor illeszkedik s-szeresen folytonosan differenciálható módon, ha $\boldsymbol{p}^r_{(0,j,k)}(\boldsymbol{u}) = \hat{\boldsymbol{p}}^r_{(0,j,k)}(\hat{\boldsymbol{u}})$ minden $r = 0, \ldots, s$, $j + k = n - r$ és egymásnak megfelelő $\boldsymbol{u}$ és $\hat{\boldsymbol{u}}$ baricentrikus koordináták esetén, ahol $\hat{\mathbf{p}}$ az $\hat{\mathbf{a}}$ pontot, $\mathbf{p}$ pedig az $\boldsymbol{a}$ pontot tartalmazó Bézier-háromszögfelület de Casteljau- (kontroll-) pontjaira, $\hat{\mathbf{u}}$ az $\hat{\mathbf{a}}$ pontot, $\boldsymbol{u}$ pedig az $\boldsymbol{a}$ pontot tartalmazó baricentrikus paraméterezésre utal.

Bizonyítás. Jelölje $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ pontokra vonatkozó baricentrikus koordinátákat, $\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ pedig az $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ pontokra vonatkozó baricentrikus koordinátákat.

Az összeillesztett felületet mindkét baricentrikus koordinátarendszerben felírva

$$\sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=n} \boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{j}}} B^n_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=n} \hat{\boldsymbol{p}}_{\underline{\mathrm{j}}} B^n_{\underline{\mathrm{j}}}(\hat{\boldsymbol{u}})$$

adódik, ahol $\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{j}}}$ az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ pontok, $\hat{\boldsymbol{p}}_{\underline{\mathrm{j}}}$ pedig az $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ pontok Bézier-háromszögfelületének kontrollpontjai.

Vizsgáljuk meg a deriváltakat a közös $\boldsymbol{bc}$ él — ezt az élet az $u = 0$ és az $\hat{u} = 0$ egyenlet határozza meg — mentén. Legyen $\boldsymbol{d} = (d, e, f)$ egy baricentrikus irány koordinátája (vagyis $d+e+f = 0$) az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ baricentrikus rendszerben, $\hat{\boldsymbol{d}} = (\hat{d}, \hat{e}, \hat{f})$ pedig ugyanennek az iránynak a baricentrikus koordinátája (vagyis $\hat{d} + \hat{e} + \hat{f} = 0$) az $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ rendszerben.

Az r-edik ($r = 0, \ldots, n$) iránymenti deriváltakra vonatkozó duális képlet szerint ekkor

$$\sum_{j+k=n-r} \boldsymbol{p}^r_{(0,j,k)}(\boldsymbol{d}) B^{n-r}_{(0,j,k)}(\boldsymbol{u})|_{u=0} = \sum_{j+k=n-r} \hat{\boldsymbol{p}}^r_{(0,j,k)}(\hat{\boldsymbol{d}}) B^{n-r}_{(0,j,k)}(\hat{\boldsymbol{u}})|_{\hat{u}=0},$$

hiszen csak a $\boldsymbol{p}^r_{(0,j,k)}$ és $\hat{\boldsymbol{p}}^r_{(0,j,k)}$ de Casteljau-pontok vannak az $u = 0$, illetve $\hat{u} = 0$ által meghatározott élen. Itt $\boldsymbol{u} = (0, v, w) = (0, v, 1-v)$, ezért az egyenletben szereplő baricentrikus Bernstein-polinomok valójában közönséges Bernstein-polinomok.

Az együtthatók összehasonlításából azt nyerjük, hogy $\boldsymbol{p}^r_{(0,j,k)}(\boldsymbol{d}) = \hat{\boldsymbol{p}}^r_{(0,j,k)}(\hat{\boldsymbol{d}})$ minden $j + k = n - r$, $\boldsymbol{d} = (d, e, f)$ és neki megfelelő $\hat{\boldsymbol{d}} = (\hat{d}, \hat{e}, \hat{f})$ baricentrikus irány esetén. Mivel ez minden $r = 0, \ldots, s$ esetén teljesül, az iránymenti deriválás formulája szerint minden $q \leq r$ esetén

$$\begin{aligned} D^q_{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{p}^r_{(0,j,k)}(\boldsymbol{u}) &= \frac{r!}{(r-q)!} \sum_{l+m=r-q} \boldsymbol{p}^q_{(0,j+l,k+m)}(\boldsymbol{d}) B^{n-r}_{(0,j+l,k+m)}(\boldsymbol{u}) \\ &= \frac{r!}{(r-q)!} \sum_{l+m=r-q} \hat{\boldsymbol{p}}^q_{(0,j+l,k+m)}(\boldsymbol{d}) B^{n-r}_{(0,j+l,k+m)}(\boldsymbol{u}) \\ &= D^q_{\hat{\boldsymbol{d}}} \hat{\boldsymbol{p}}^r_{(0,j,k)}(\hat{\boldsymbol{u}}). \end{aligned}$$

Mivel $\boldsymbol{p}^r_{(0,j,k)}(\boldsymbol{u})$ és $\hat{\boldsymbol{p}}^r_{(0,j,k)}(\hat{\boldsymbol{u}})$ is r-fokú polinomok, és formulánk szerint minden legfeljebb r-edrendű deriváltjuk egybeesik, azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{p}^r_{(0,j,k)}(\boldsymbol{u}) = \hat{\boldsymbol{p}}^r_{(0,j,k)}(\hat{\boldsymbol{u}})$, amint állítottuk. ■

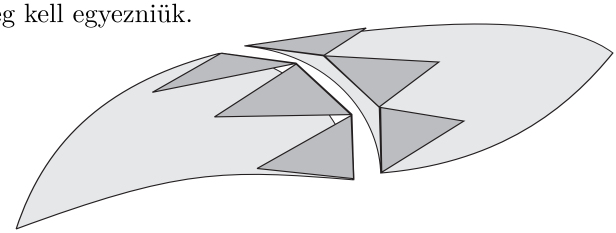
Eredményünket nehéz illesztésre használni, ezért lássunk egy olyan elégséges feltételt, amelyet könnyű ellenőrizni.

3.1.7. Következmény. *Feltételeink és jelöléseink ugyanazok, mint az előbb. Legyen* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *olyan baricentrikus koordináta, melyre* $\hat{\boldsymbol{a}} = v_1\boldsymbol{a} + v_2\boldsymbol{b} + v_3\boldsymbol{c}$.

Ha a két felület s-szeresen folytonosan differenciálható módon illeszkedik, akkor $\hat{\boldsymbol{p}}_{(r,j,k)} = \boldsymbol{p}^r_{(0,j,k)}(\boldsymbol{v})$ *minden* $r = 0, \ldots, s$ *és* $j + k = n - r$ *esetén.*

Bizonyítás. Előző eredményünket alkalmazva az $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ és a neki megfelelő $\hat{\boldsymbol{u}} = \underline{\mathrm{x}}$ esetben, $\boldsymbol{p}^r_{(0,j,k)}(\boldsymbol{v}) = \hat{\boldsymbol{p}}^r_{(0,j,k)}(\underline{\mathrm{x}})$ adódik. Ugyanakkor $\hat{\boldsymbol{p}}_{(r,j,k)} = \hat{\boldsymbol{p}}^r_{(0,j,k)}(\underline{\mathrm{x}})$ a de Casteljau-eljárás szerint, ami bizonyítja állításunk. ■

Eredményünk $s = 0$ esetén azt adja, hogy a határológörbéhez tartozó kontrollpontoknak meg kell egyezniük.



3.1.4. Ábra. A felületillesztés technikája.

Az $s = 1$ eset azt mondja, hogy $\hat{\boldsymbol{p}}^r_{(1,j,k)} = v_1\boldsymbol{p}_{1,j,k} + v_2\boldsymbol{p}_{0,j+1,k} + v_3\boldsymbol{p}_{0,j,k+1}$, vagyis a 3.1.11. ábrán látható háromszögpárok egy síkban vannak, és a megfelelő baricentrikus koordináta-rendszer referencia-háromszögének affin képei lesznek.

Az előbb vázolt módszer alkalmas arra, hogy bizonyos speciális feltételek teljesülése esetén felületeket illesszünk egymáshoz, de az általános esethez még az eddigeknél is hosszadalmasabb és bonyolultabb okoskodásra van szükség. Ez is egy ok, amiért nem ez a módszer lett a legelterjedtebb a felületek ábrázolásában.

3.1.1. Feladatok

3.1.8. Feladat. Bizonyítsuk be Ceva tételét baricentrikus koordinátákkal!

3.1.9. Feladat. Részletezzük, miért igaz a háromszögmódszerrel nyert felületekre a konvex burok tartásának tulajdonsága és az affin invariancia!

3.1.10. Feladat. Milyen kontrollpontokat kell választanunk, ha a $z = x^2 + y^2$ felületet kívánjuk előállítani?

3.2. Bézier-négyszögfelületek

Felületek előállítása során a Bézier-módszer legkézenfekvőbb általánosítása az, amikor a felületet két Bézier-görbesereggel közelítjük. Ezeket visszavezethetjük szakaszok előállítására, ami nem más, mint két pont közötti lineáris interpoláció. A görbesereg előállítását két irányban egyszerre végrehajtott interpolációra vezetjük vissza, melyet emiatt *bilineáris interpolációnak* nevezünk.

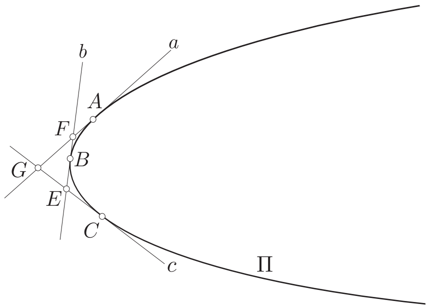
Ha két pont között a legegyszerűbb görbe a szakasz, akkor négy pont között a legegyszerűbb felület az lesz, amelyet a bilineáris interpoláció szolgáltat.

3.2.1. Definíció. Legyen $\boldsymbol{p}_{0,0}, \boldsymbol{p}_{0,1}, \boldsymbol{p}_{1,0}, \boldsymbol{p}_{1,1}$ négy különböző pont az euklideszi térben. A tér azon $\boldsymbol{x}$ pontjait, melyre

$$\boldsymbol{x}(u,v) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \boldsymbol{p}_{i,j} B_i^1(u) B_j^1(v),$$

a $\boldsymbol{p}_{0,0}, \boldsymbol{p}_{0,1}, \boldsymbol{p}_{1,0}, \boldsymbol{p}_{1,1}$ pontok *bilineáris interpoláltjának* nevezzük.

Amint a 3.2.2. ábrán látszik, a négy pontra vett bilineáris interpolált a négy ponton keresztülhaladó *hiperbolikus paraboloidot* határozza meg.



3.2.1. Ábra. Hiperbolikus paraboloid, mint a $\boldsymbol{p}_{0,0}, \boldsymbol{p}_{0,1}, \boldsymbol{p}_{1,0}, \boldsymbol{p}_{1,1}$ pontok bilineáris interpoláltja.

A bilineáris interpolált felület úgy is tekinthető, mint az (u,v)-sík $0 \le u, v \le 1$ egységnégyzetének leképezése. Ennek képlete formális mátrixszorzás formájában

$$\boldsymbol{x}(u,v) = (1-u, u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{0,0} & \boldsymbol{p}_{0,1} \\ \boldsymbol{p}_{1,0} & \boldsymbol{p}_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}.$$

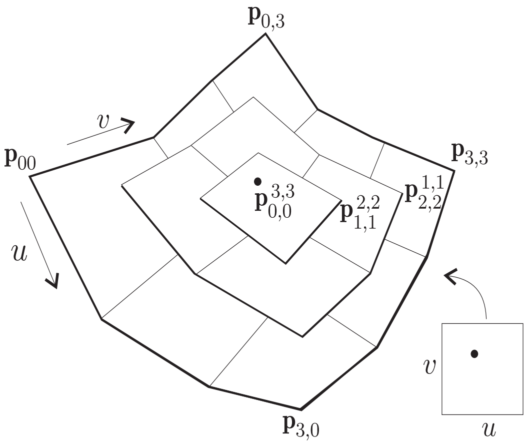
A görbéknél megismertekhez hasonlatosan a bilineáris interpoláció is általánosítható egy megfelelő de Casteljau-eljárás alkalmazásával. Ez adja a Bézier-négyszögfelületet.

3.2.2. Definíció. Legyenek adottak a $\boldsymbol{p}_{i,j}$ pontok a $0 \le i \le m$ és $0 \le j \le n$ indexekre. Legyen (u,v) az egységnégyzetben, vagyis $0 \le u \le 1$, és $0 \le v \le 1$. A $\boldsymbol{p}_{i,j}$ pontokat *kontrollpontoknak*, az által alkotott ponthalmazt *Bézier-hálónak* vagy *kontrollhálónak* nevezzük.

Legyen $\boldsymbol{p}_{i,j}^{0,0}(u,v) = \boldsymbol{p}_{i,j}$, aztán minden $r = 1,\dots,m$, $s = 1,\dots,n$, $i = 0,\dots,m-r$ és $j = 0,\dots,n-s$ esetén legyen

$$\boldsymbol{p}_{i,j}^{r,s}(u,v) = (1-u,u)\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_{i,j}^{r-1,s}\\ \boldsymbol{p}_{i+1,j}^{r-1,s}\end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \boldsymbol{p}_{i,j}^{r,s}(u,v) = (\boldsymbol{p}_{i,j}^{r,s-1}, \boldsymbol{p}_{i,j+1}^{r,s-1})\begin{pmatrix}1-v\\ v\end{pmatrix}.$$

Az egységnégyzetnek a $\boldsymbol{p}^{m,n} = \boldsymbol{p}_{0,0}^{m,n}$ leképezés meletti képét *Bézier-négyszögfelületnek* vagy *tenzorszorzat-felületnek*, a $\boldsymbol{p}_{i,j}^{r,s}(u,v)$ pontokat *de Casteljau-pontoknak*, az itt leírt eljárást *de Casteljau-algoritmusnak* nevezzük.



3.2.2. Ábra. A Bézier-négyszögfelületek de Casteljau-algoritmusa.

A 3.2.4. ábrán az algoritmus geometriai jelentését láthatjuk szimmetrikus esetben, amikor

$$\boldsymbol{p}_{i,j}^{r,r}(u,v) = (1-u,\ u)\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_{i,j}^{r-1,r-1} & \boldsymbol{p}_{i,j+1}^{r-1,r-1}\\ \boldsymbol{p}_{i+1,j}^{r-1,r-1} & \boldsymbol{p}_{i+1,j+1}^{r-1,r-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-v\\ v\end{pmatrix}.$$

A Bézier-görbék tulajdonságainak ismeretében igen könnyen (lásd 3.2.9. Feladat) belátható az alábbi.

3.2.3. Tétel. *A Bézier-négyszögfelületekre*

$$\boldsymbol{p}^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{p}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

A felületekre vonatkozó tulajdonságok egyenes következményei a Bézier-görbéknél megismert tulajdonságoknak.

3.2.4. Tétel. *A Bézier-felület affin invariáns, a kontrollpontok konvex burkában marad, és határoló görbéi polinomiálisak.*

Bizonyítás. *Affin invariancia.* A de Casteljau-algoritmus során csak olyan lépéseket hajtottunk végre, melyek megőrizték az affin invarianciát.

Konvex burokban maradás. A de Casteljau-algoritmus során egyik lépés sem vezetett ki a kontrollpontok konvex burkából.

Polinomiális határoló görbék. A határoló görbék a kontrollháló szélső pontjainak Bézier-görbéjeként állnak elő. ■

Görbék esetén a deriváltak a kontrollpontok differenciáiként álltak elő. Felületek esetén is hasonló a helyzet. Definiáljuk a differencia-operátorokat a

$$\Delta^{r,s}\boldsymbol{p}_{i,j} = \Delta^{r-1,s}\boldsymbol{p}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,s}\boldsymbol{p}_{i,j},$$
$$\Delta^{r,s}\boldsymbol{p}_{i,j} = \Delta^{r,s-1}\boldsymbol{p}_{i,j+1} - \Delta^{r,s-1}\boldsymbol{p}_{i,j}$$

rekurzív képlettel, ahol

$$\Delta^{1,0}\boldsymbol{p}_{i,j} = \boldsymbol{p}_{i+1,j} - \boldsymbol{p}_{i,j}, \qquad \Delta^{0,1}\boldsymbol{p}_{i,j} = \boldsymbol{p}_{i,j+1} - \boldsymbol{p}_{i,j}.$$

3.2.5. Tétel. *A Bézier-négyszögfelület deriváltja is Bézier-négyszögfelület, vagyis*

$$\partial_1^r\partial_2^s\boldsymbol{p}^{m,n}(u,v) = \frac{m!n!}{(m-r)!(n-s)!}\sum_{i=0}^{m-r}\sum_{j=0}^{n-s}\Delta^{r,s}\boldsymbol{p}_{i,j}B_i^{m-r}(u)B_j^{n-s}(v).$$

Bizonyítás. Előbb az u változó szerinti parciális deriváltat fogjuk tekinteni:

$$\begin{aligned}\partial_1\boldsymbol{p}^{m,n}(u,v) &= \sum_{j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial u}\Big(\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{p}_{i,j}B_i^m(u)\Big)B_j^n(v)\\ &= m\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}\Delta^{1,0}\boldsymbol{p}_{i,j}B_i^{m-1}(u)B_j^n(v).\end{aligned}$$

A v szerinti parciális deriváltakra ugyanígy kapjuk, hogy

$$\partial_2\boldsymbol{p}^{m,n}(u,v) = n\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^{0,1}\boldsymbol{p}_{i,j}B_j^{n-1}(v)B_i^m(u)$$

A magasabb rendű deriváltakat az előző deriváltak többszöri ismétlésével kaphatjuk, ami bizonyítja az állítást. ■

A határoló görbéken vett derivált az összetett Bézier-felületek tanulmányozásához fontos speciális eset.

3.2.6. Következmény. *Ha a Bézier-négyszögfelület határológörbéi mentén a deriváltak*

$$\partial_1^r \boldsymbol{p}^{m,n}(0,v) = \frac{m!}{(m-r)!}\sum_{j=0}^{n} \Delta^{r,0}\boldsymbol{p}_{0,j}B_j^n(v),$$

$$\partial_1^r \boldsymbol{p}^{m,n}(1,v) = \frac{m!}{(m-r)!}\sum_{j=0}^{n} \Delta^{r,0}\boldsymbol{p}_{m-r,j}B_j^n(v),$$

amiből látszik, hogy a határológörbék deriváltjai csak a határ mellett levő $r+1$ *oszlop* (*illetve sor*) *kontrollpontjaitól függnek.*

3.2.1. Feladatok

3.2.7. Feladat. A Bézier-görbéknél látott technikával igazoljuk a 3.2.5. tételt!

3.2.8. Feladat. $m = 2$, $n = 2$ esetén találhatók-e olyan kontrollpontok, hogy a kapott felület egy nyolcadgömb legyen?

3.2.9. Feladat. Súlyok bevezetésével általánosítsuk a Bézier-négyszögfelületet racionális Bézier-négyszögfelületté!

3.2.10. Feladat. A 3.2.11. feladatban kapott felületcsaládot általánosítsuk még tovább a B-szplájnok alkalmazásával! Az így kapott felületeket *NURBS-öknek* (non-uniform B-spline surface) hívják.

3.3. Összetett Bézier-négyszög- vagy szplájn-felületek

A Bézier-görbéknél is láttuk, hogy nem célszerű nagyszámú kontrollponttal közelíteni egy görbét, hanem előbb érdemes azt darabokra bontani, néhány kontrollponttal meghatározott elemi Bézier-görbékkel közelíteni a darabokat, majd e darabokat összeillesztve közelíteni a teljes görbét. Ez a kellőképpen sima közelítő görbe a szplájngörbe.

A szplájn-felületeket hasonlóan kapjuk: elemi Bézier-négyszögfelületekből állítunk össze differenciálható felületeket.

3.3.1. Definíció. Az $\mathcal{I} = [u_0, u_k] \times [v_0, v_l]$ zárt téglalapon paraméterezett $\boldsymbol{S}$ felület *összetett Bézier-négyszögfelület* vagy *szplájnfelület*, ha létezik az $\mathcal{I}$ téglalapnak olyan $u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < u_k$ és $v_0 < v_1 < \cdots < v_{l-1} < v_l$ felbontása $\mathcal{I}_{f,g} = [u_f, u_{f+1}] \times [v_g, v_{g+1}]$ téglalapokra, hogy $\boldsymbol{S}$ minden $\mathcal{I}_{f,g}$ téglalapon Bézier-négyszögfelület, az $\boldsymbol{S}_{f,g}(u,v) = \boldsymbol{S}(u(u_{f+1} - u_f) + u_f, v(v_{g+1} - u_g) + u_g)$ paraméterezéssel.

Az u_i és v_j értékeket *töréspontoknak* nevezzük. Az $\boldsymbol{S}_{f,g}$ felületet (f,g) indexű elemi felületnek, az $\boldsymbol{S}(u_f,v_g) = \boldsymbol{S}_{f,g}(0,0) = \boldsymbol{S}_{f-1,g-1}(1,1)$ pontokat pedig *csomópontoknak* nevezzük. Az $\boldsymbol{S}(u_f,\cdot)$ és $\boldsymbol{S}(\cdot,v_g)$ görbéket *csomógörbéknek* nevezzük.

A felépítésben használt elemi Bézier-négyszögfelületek fokszámának megfelelően hívjuk a szplájn-felületeket bikvadratikusnak, bikubikusnak stb. Érdemes megfigyelni, hogy a bilineáris szplájn-felületnek nincs igazán értelme.

A következőkben arra keresünk egyszerű feltételeket, hogy miként lehet kisebb Bézier-négyszögfelületeket (ezeket foltoknak, angolul: „patch”-eknek is hívják) meghatározott simasággal egymáshoz illeszteni.

Definiáljuk az $\boldsymbol{x}(u,v)$ elemi felületet az $[u_{f-1},u_f]\times[v_g,v_{g+1}]$ és az $\boldsymbol{y}(u,v)$ elemi felületet az $[u_f,u_{f+1}]\times[v_g,v_{g+1}]$ tartomány felett. Legyen $\{\boldsymbol{p}_{i,j}\}_{(0\le i\le m,\ 0\le j\le n)}$ a „bal oldali” $\boldsymbol{x}$, $\{\boldsymbol{p}_{i,j}\}_{(m\le i\le m+q,\ 0\le j\le n)}$ pedig a „jobb oldali” $\boldsymbol{y}$ elemi felületdarab kontrollhálója.

Az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ elemi felületek a közös $\boldsymbol{x}(u_f,v) = \boldsymbol{y}(u_f,v)$ határuk mentén pontosan akkor r-szer differenciálhatóak, ha v szerinti $\partial_1^r\boldsymbol{x}(u_f,v) = \partial_1^r\boldsymbol{y}(u_f,v)$ parciális deriváltjaik minden v mellett megegyeznek. A Bézier-négyszögfelületek határgörbéi menti deriváltakból

$$\frac{m!}{(m-r)!}\left(\frac{1}{\Delta_{f-1}}\right)^r\sum_{j=0}^{n}\Delta^{r,0}\boldsymbol{p}_{m-r,j}B_j^n(v) = \partial_1^r\boldsymbol{x}(u_f,v) = \partial_1^r\boldsymbol{y}(u_f,v)$$
$$= \frac{m!}{(m-r)!}\left(\frac{1}{\Delta_f}\right)^r\sum_{j=0}^{n}\Delta^{r,0}\boldsymbol{p}_{m,j}B_j^n(v)$$

adódik, ahol $\Delta_I = u_{I+1}-u_I$. Mivel a $B_j^n(v)$ polinomok lineárisan függetlenek, az együtthatóknak meg kell egyezni, ezért

$$\left(\frac{1}{\Delta_{f-1}}\right)^r\Delta^{r,0}\boldsymbol{p}_{m-r,j} = \left(\frac{1}{\Delta_f}\right)^r\Delta^{r,0}\boldsymbol{p}_{m,j} \quad j=0,1,\dots,n.$$

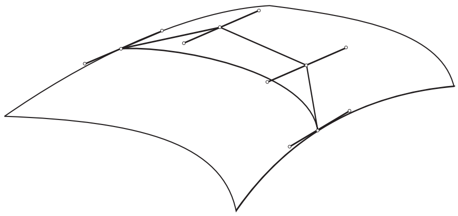
Ezzel bebizonyítottuk a következő eredményt.

3.3.2. Tétel. *Két elemi Bézier-felület akkor és csak akkor illeszkedik r-szer differenciálható módon, ha a Bézier-háló minden sora (oszlopa) olyan kontrollpoligont alkot, amely r-szer differenciálható összetett Bézier-görbéhez vezet.*

Az egyszeresen differenciálható illeszkedés feltétele tehát

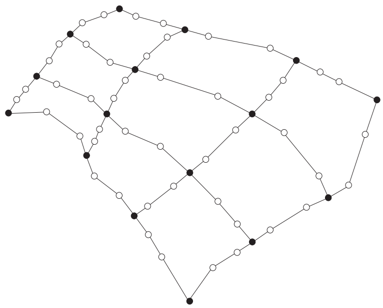
$$(\Delta_{f-1}+\Delta_f)\boldsymbol{p}_{m,j} = \Delta_f\boldsymbol{p}_{m-1,j} + \Delta_{f-1}\boldsymbol{p}_{m+1,j},$$

amelyet a 3.3.1 ábra mutat.



3.3.1. Ábra. Két Bézier-felület egyszeresen differenciálható illeszkedése.

Eredményünk birtokában képesek vagyunk szplájn-felületeket előállítani. Ezt illusztrálandó, alább 4×4 kontrollponthoz tartozó bikubikus (mindkét változójában köbös) elemi Bézier-felületdarabokból állítunk össze egy bikubikus szplájn-felületet, amely 3×3 uniform módon paraméterezett elemi bikubikus Bézier-négyszögfelületből áll.



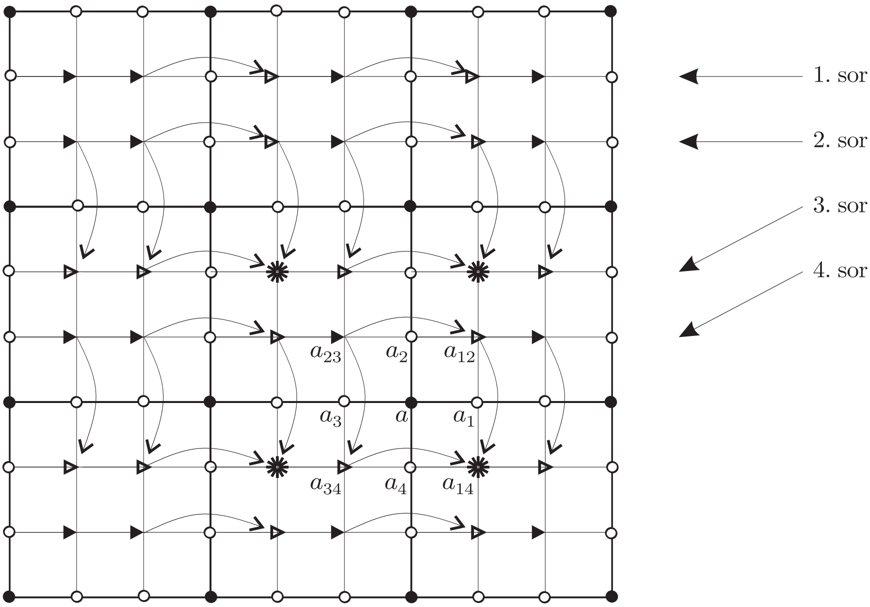
3.3.2. Ábra. Bikubikus szplájn-felület határológörbéinek előállítása.

A módszer leírása.

1. Először az interpolációs pontokat vesszük fel, melyeken tehát a kontrollháló és a felület is átmegy. (A 3.3.2 ábrán ezeket a pontokat telt körök jelzik.)

2. Ezt az elemi felületdarabok határológörbéihez tartozó kontrollpontok megkeresése követi. Ezt pontosan ugyanúgy tesszük meg, mint a kubikus összetett Bézier-görbéknél, ugyanis a határológörbék maradék kontrollpontjainak megkeresése során azok a többi határológörbe kontrollpontjaitól teljesen függetlenül választhatók ki. (Ezeket a 3.3.2 ábrán üres körök jelzik. Az egyszerűbb ábrázolás kedvéért a továbbiakban csak a síkbeli A 3.3.3 ábrán követjük az algoritmus menetét.)

3. Sorról sorra haladva fejezzük be a hiányzó kontrollpontok megkeresését. Az első és második sornál továbbra is úgy járhatunk el, mint a görbék esetében. A meglévő pontokhoz úgy keressük meg a kontrollpontokat, mint egy kubikus szplájngörbe interpolációs pontjaihoz. (A 3.3.3 ábrán ezeket a pontokat nyílheggyel jelöltük — a szabadon választhatókat telttel, a következményként adódóakat üressel. A nyílhegy iránya a módszer haladási irányát is mutatja.)



3.3.3. Ábra. A bikubikus szplájnfelület előállításának térképe.

4. A következő sort úgy kapjuk meg, hogy függőlegesen haladva nézzük meg azt, hogy annak a pontnak az előállításához a függőleges Bézier-görbéknél a köbös szplájn milyen pontja tartozik. (A 3.3.3 ábrán nyilak jelzik, hogy melyik pont melyik pont „következménye”.) Vannak „kritikus” pontok, melyek két pont következményei is lehetnek, ezeknél bizonyítanunk kell, hogy mindkét irányból ugyanaz a pont áll elő. (A 3.3.3 ábrán ezek a pontok csillaggal vannak jelölve.)

Legyen a felület egy pontja $\boldsymbol{a}$, legyenek $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ a határoló kontrollpoligon $\boldsymbol{a}$-hoz legközelebb eső pontjai, és tegyük fel, hogy a módszerrel már megkaptuk az $\boldsymbol{a}_{2,3}$, $\boldsymbol{a}_{1,2}$ és $\boldsymbol{a}_{3,4}$ pontokat. Uniform paraméterezés mellett a differenciálhatóság miatt

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3}{2} = \frac{\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4}{2},$$

a módszerünk — ezt persze szintén a differenciálhatóság elvárása motiválja — miatt pedig

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_{1,2} + \boldsymbol{a}_{2,3}}{2} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{a}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_{2,3} + \boldsymbol{a}_{3,4}}{2}.$$

Módszerünk akkor nem vezet összeütközéshez, ha

$$\boldsymbol{a}_4 = \frac{\boldsymbol{a}_{1,4} + \boldsymbol{a}_{3,4}}{2} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_{1,2} + \boldsymbol{a}_{1,4}}{2}$$

egyszerre teljesül. Valóban, eddigi képleteinket használva

$$\boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_{3,4} - \boldsymbol{a}_{1,2},$$

adódik, amely alapján a kérdéses egyenlőségek egymás következményei. (Természetesen tetszőleges paraméterekkel is bizonyíthattunk volna, és a kontrollpontokat is lehetett volna más sorrendben előállítani.)

5. A következő sort ugyanúgy kapjuk meg, mint az elsőt, a rákövetkezőt ennek eredményeképpen, és így tovább. ■

A fentiek precíz tisztázása, a bikvadratikus szplájn-felületek előállítása, és a Bézier-négyszögfelületeknél is létező polárforma-elmélet kidolgozása a sok technikai részlet okán ezúttal az érdeklődő olvasóra marad.

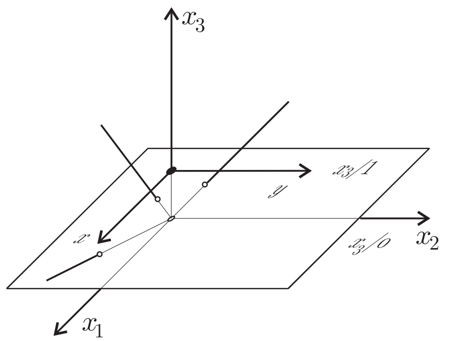
F

Függelék

F.1. A projektív geometria alapfogalmai

A *projektív síkot* viszonylag egyszerű módon származtathatjuk az euklideszi síkból. Az euklideszi síkot kibővítjük újabb pontokkal — az *ideális pontokkal*, melyek egy egyenest alkotnak — az *ideális egyenest*. A projektív sík egyenesei az ideális egyenesből és a közönséges egyenesekből állnak. A közönséges egyeneseket az euklideszi sík egyeneseiből úgy származtatjuk, hogy egy-egy ideális pontot hozzájuk adunk. Két egymással párhuzamos euklideszi egyeneshez ugyanazt az ideális pontot adjuk, így az ideális pontok lényegében az irányoknak feleltethetők meg. Ez a konstrukció biztosítja azt, hogy a projektív sík bármely két különböző egyenese pontosan egy pontban metszi egymást.

A háromdimenziós euklideszi tér origón áthaladó egyenesei segítségével elkészíthető a projektív sík egy modellje (F.1.1 ábra). A projektív sík pontjai legyenek az origón áthaladó egyenesek. A projektív sík egyenesei legyenek az origót tartalmazó síkok. Vegyük a háromdimenziós euklideszi térben az $x_3 = 1$ síkot! Az ezen síkot metsző egyenesek lesznek a projektív sík közönséges pontjai, a $x_3 = 0$ síkba simulók az ideális pontok. A $x_3 = 0$ sík reprezentálja az ideális egyenest.



F.1.1. Ábra. A projektív sík egy modellje.

Egy projektív pont koordinátái legyenek az azt reprezentáló euklideszi egyenes egy irányvektorának koordinátái. Ilyen módon egy projektív pontnak végtelen sok koordinátája lehet, melyek viszont egy konstans szorzó erejéig egyértelműen meghatározottak. Innen az elnevezés: *homogén koordináta*. Használva a homogén koordinátákat, modellünkben a közönséges pontok azok lesznek, melyeknek harmadik homogén koordinátája nem 0, ideális pontok azok lesznek, melyeknek a harmadik homogén koordinátája 0. Ha egy közönséges pont euklideszi koordinátája (x, y), akkor a homogén koordinátája $[x, y, 1]$. Fordítva, ha egy közönséges pont homogén koordinátája $[x_1, x_2, x_3]$, akkor az az $(x_1/x_3, x_2/x_3)$ euklideszi pontnak felel meg.

Az egyenesek homogén koordinátái az egyenes pontjait leíró lineáris egyenlet együtthatói lesznek. Ennek megfelelően egy $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]$ pont akkor és csak akkor illeszkedik az $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, u_3]$ egynesre, ha $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$, azaz $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Ideális egyenes az lesz, melynek első két koordinátája 0, hiszen ebben az esetben illeszkednek rá az ideális pontok.

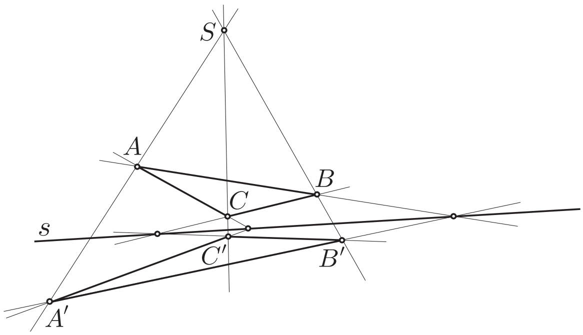
Az egy egyenesre illeszkedő pontok összességét *pontsor*nak nevezzük. Az $\boldsymbol{u}$ egyenes pontsorának egyenlete $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ (ahol $\boldsymbol{u}$ rögzített, $\boldsymbol{x}$ változó).

Az egy pontra illeszkedő egyenesek összességét *sugársornak* nevezzük. Az $\boldsymbol{x}$ pont sugársorának egyenlete $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ (ahol $\boldsymbol{x}$ rögzített, $\boldsymbol{u}$ változó).

Az $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]$, $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]$, $\boldsymbol{z} = [z_1, z_2, z_3]$ pontok akkor és csak akkor tartoznak egy pontsorhoz, azaz akkor kollineárisak, ha $\det \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{smallmatrix}\right) = 0$.

Az $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2, w_3]$ egyenesek akkor és csak akkor tartoznak egy sugársorhoz, azaz akkor haladnak át egy ponton, ha $\det \left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{smallmatrix}\right) = 0$

Ha két háromszög csúcsait páronként egymáshoz rendeljük, vizsgálhatjuk, hogy a megfelelő csúcspárok egy ponton áthaladó három (egymástól nem feltétlenül különböző) egyenesen vannak-e, s hogy a megfelelő oldalegyenespárok egy egyenes három (egymástól nem feltétlenül különböző) pontján haladnak-e át.



F.1.2. Ábra. A Desargues-tétel.

Az előbbi esetben a két háromszöget *pontra nézve perspektívnek*, az utóbbi esetben *egyenesre nézve perspektívnek* mondjuk. A pontot, illetve egyenest a *perspektivitás centrumának*, illetve a *perspektivitás tengelyének* nevezzük.

Az euklideszi tér korábban látott kibővítésével kapott projektív síkon igaz a következő.

Desargues-tétel. *Két háromszög akkor és csak akkor perspektív egy pontra nézve, ha egy egyenesre nézve is perspektív.*

Desargues tétele természetesen akkor is igaz, ha a centrum ideális pont, illetve a tengely az ideális egyenes.

Ha két háromszög tengelyesen perspektív, akkor sem szögeik, sem oldalaik hossza, sem azok aránya nem feltétlenül azonos. Az a mennyiség, mely ebben az esetben is invariáns marad, a *kettősviszony.*

Legyen A, B, C és D egy közönséges egyenes négy különböző pontja. Az

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{CD} : \frac{AD}{DB}$$

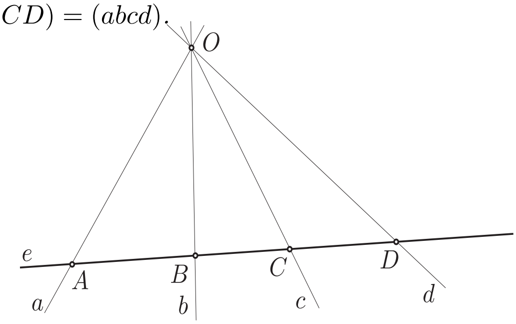
értéket az A, B, C, D pontok kettősviszonyának nevezzük. Felhívjuk a figyelmet, hogy a definícióban szereplő távolságok előjelesek, vagyis az egyenesen adott egy tetszőleges irány — ettől az érték nem függ.

Négy, egy ponton áthaladó a, b, c, d egyenesre (egy sugársor négy különböző elemére) a kettősviszonyt

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cd)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}$$

definiálja, ahol az egyenesek által bezárt irányított szögek szinuszai szerepelnek.

Pappos-tétel. *Ha a, b, c, d egy közönséges tartópontú sugársor négy eleme, és egy, a tartóponton át nem haladó egyenes ezeket a közönséges A, B, C, D pontokban metszi, akkor $(ABCD) = (abcd)$.*



F.1.3. Ábra. A Pappos-tétel.

Pappos tétele miatt a centrális (tengelyes) perspektivitás kettősviszonyt tartó.

A kettősviszonyt tartó leképezéseket *projektív transzformációknak* nevezzük. Ennek megfelelően a centrális perspektivitás (a középpontos vetítés) is megőrzi a kettősviszonyt.

A kettősviszony fogalmát arra az esetre is könnyen kiterjeszthetjük, amikor a kettősviszonyt meghatározó elemek között ideális pontok, egyenesek is szerepelnek. Ezt csak úgy érdemes megtenni, hogy Pappos tétele ekkor is érvényben maradjon. A homogén koordinátákat hívjuk segítségül. Jelölje $[x]$ egy pont homogén koordinátáját. Egy egyenesen minden pont előáll két különböző pontja lineáris kombinációjaként, ezért négy tetszőleges pont egy egyenesen mindig felírható $[x]$, $[y]$, $[\lambda_1 x + \mu_1 y]$, $[\lambda_2 x + \mu_2 y]$ alakban. Az általánosított kettősviszonyt a

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$

értékkel definiáljuk. Egy sugársor négy elemére ugyanúgy fogalmazható meg az általánosított definíció, mint pontok esetén — a homogén koordináták használatával. Belátható, hogy ez valóban általánosítás, azaz közönséges térelemekre a két definíció ugyanazt az értéket szolgáltatja. Könnyen láthatóak a kettősviszony alábbi tulajdonságai:

- ha A, B, C egy közönséges egyenes három közönséges pontja, D pedig az egyenes ideális pontja, akkor $(ABCD) = -(ABC)$,
- $(ABCD) = (CDAB) = (DCBA) = (BADC)$,
- $(ABDC) = 1/(BACD)$,
- $(ABCD) = 1$ akkor és csak akkor, ha $A = B$ vagy $C = D$, és
- ha $(ABCD_1) = (ABCD_2)$, akkor $D_1 = D_2$.

Egy pontsor négy eleme, illetve egy sugársor négy eleme *harmonikus négyest* alkot, ha kettősviszonyuk -1.

Másodrendű görbének azokat a görbéket nevezzük, melyek homogén koordinátáira $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0$ teljesül, ahol $a_{ij} = a_{ji}$. A kúpszeletek mind másodrendű görbék. A másodrendű görbék tulajdonságainak vizsgálatával, azok osztályozásával ugyanakkor igazolható, hogy minden másodrendű görbe kúpszelet (amennyiben az elfajuló kúpszeleteket is ezek közé soroljuk).

A másodrendű görbék ideális pontjait úgy kaphatjuk meg, hogy x_3 helyébe 0-t írunk, majd megoldjuk az így kapott másodfokú egyenletet x_1/x_2-re. A megoldások számától függően az egyenletnek 0, 1, illetve 2 ideális pontja van. Ezeket elliptikus, parabolikus illetve hiperbolikus másodrendű görbéknek nevezzük, mivel a nevüknek megfelelő kúpszeletek is ilyen típusúak.

A kúpszeletek perspektív képe is kúpszelet, így minden olyan tulajdonság, mely kettősviszony segítségével megfogalmazható, minden kúpszeletre (körre, parabolára, ellipszisre, stb.) igaz marad. Ezt használtuk a parabola 3-érintő tételében.

F.2. Művészet

A különböző korok művészete számára a festmények, a szobrok és egyéb műalkotások más-más üzenetet hordoznak. Az egyiptomiak számára elsősorban nem az volt fontos, hogy a valóság olyan formában jelenjen meg, mint ahogy az a szemlélő retináján érzékelhető. Tipikus az egyiptomiaknál, hogy az emberek testrészei különböző nézőpontokban látszanak. Az emberek méretét nem az határozza meg, hogy ki kisebb, ki nagyobb, vagy ki van közelebb, illetve távolabb, hanem az, hogy az alkotó kit tekintett fontosabbnak. A perspektíva szabályainál nagyobb súllyal estek latba a vallási és kultikus szempontok.

Az ókori görögök és rómaiak számára sokkal fontosabbá vált az élethű ábrázolás. A képeken, vázákon számtalan jele van a perspektívával kapcsolatos megfigyeléseknek, de sem olyan műalkotás, sem olyan könyv nem maradt ránk, amelyből arra lehetne következtetni, hogy rendszerezett, átfogó ismeretekkel rendelkeztek volna az ábrázolás tudományáról. A Római Birodalom összeomlásával a bizánciak elfordultak ezektől az eredményektől, és visszakanyarodtak az isteni szimbólumokhoz.

A reneszánsz művészete hozott áttörést. Filippo Brunelleschi (1377—1446), aki később a firenzei dóm kupolájának tervezőjeként vált ünnepelt építésszé, híres „kukucskáló” kísérletei segítségével mutatta be elsőként a perspektivikus ábrázolás alapelveit. Brunelleschi úgy igazolta kísérletei helyességét, hogy az általa készített festményre lyukat fúrt (melyet később enyészpontnak neveztek el). Az arca elé emelte a festmény festetlen oldalát, a lyukon keresztül belenézett a másik kezében tartott tükörbe, mely visszatükrözte a festményt. A lyukon keresztül pontról pontra össze lehetett vetni a képet a képen ábrázolt valósággal. A legelső geometriai szempontból is igényes, ránk maradt, ilyen tárgyú mű szintén firenzei művész, Leon Battista Alberti munkája (A festészetről, 1435).

Andrea Mantegna (1431—1506), nagy észak-itáliai mester nemcsak a perspektíva szerkesztésének elveivel volt tisztában, hanem azzal is, hogyan kell ezt felhasználni arra, hogy mély hatást gyakoroljon a közönségre. Ennek mintapéldája „A halott Krisztus siratása” című festménye, melyen a halott Krisztust a nézőpont miatt drámai rövidülésben láthatjuk. A festmény perspektivikus hatása olyan tökéletes, hogy úgy tűnik, mintha a holttest követné a képtől távolodó nézőt.

Leonardo da Vinci (1452—1519) már nemcsak a perspektíva tudatos szerkesztését használja ki, hanem annak tudatos megszegését is. Az utolsó vacsora című festményen a perspektíva szabályai több ponton sérülnek, de ez nem zavaró, hanem szuggesztív erejű.

Diego Velazquez (1599—1660) spanyol festő számtalan tudományos értekezést tanulmányozott át, melyek nem múltak el nyomtalanul festményein. Az arányok, a szín, az árnyékhatások mind-mind magabiztos ismeretekről tettek tanúbizonyságot. Képein még azt is sikeresen oldotta meg, amikor perspektivikusan kellett ábrázolni tükörből visszatükröződő alakokat.

A holland Pieter Jansz Saenredam 1648-ban olyan élethűen festette meg a St. Bavo templomot, mintha az fényképezőgéppel készült volna. Francesco Borromini 1653-ban olyan módon készítette el a római Palazzo Spada folyosóját, hogy a perspektívahatások keltésével azt imitálja, mintha az nagyon hosszú lenne.

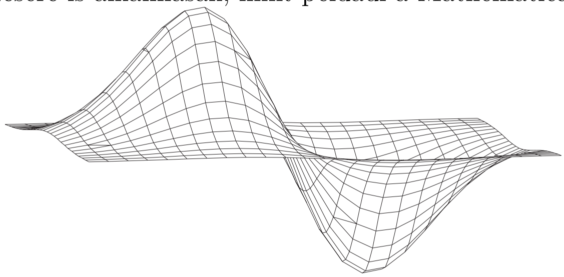
A fényképezőgépek korának beköszöntével a művészetben háttérbe szorult az a törekvés, hogy a vászonra a való világ minél élethűbb mása kerüljön. A művészek olyan perspektívákat kezdtek el keresni, melyek egyénileg az ő világukat képezi le. Ily módon az egyiptomi alkotásokhoz hasonlóan ismét megjelent egy ábrán több — a valóságban egymást kizáró — perspektíva. Az ezzel az eszközzel élő alkotók közül talán a leghíresebb Pablo Picasso (1881—1973), aki más kubistákhoz hasonlóan a rajzlap síkját több egyéni nézőpontnak megfelelő darabra törte szét.

M. C. Esher olyan perspektívákat eszelt ki, melyek első ránézésre reálisak, de jobban szemügyre véve ellentmondásosak. Ezt ő maga el is nevezte lehetetlen perspektívának.

Az 1960-as évek végére a tömegkommunikációs eszközök — a film, a fotográfia, a képregény, a reklám — olyan széles körben alkalmazták a perspektivikus képeket, hogy azok a hétköznapi vizuális nyelv részévé váltak. A számítógépek döbbenetes tempójú fejlődése lehetővé tette, hogy a televízióban látható képi kísérleteknek, effektusoknak csak a képzelet szabjon határt.

F.3. Informatika

A világ minden olyan szoftvere használja a Bézier-módszert, mely grafikát jelenít meg. Az AutoCAD a CADKey programokkkal számos épületet, autót terveztek, a Micrografx és a CorelDraw ábráit sok újság, üdvözlőlap, reklámképein láthattuk. Mindent tudnak az ábrázolási módokról azok a programok is, amelyek formális matematika végzésére is alkalmasak, mint például a Mathematica vagy a Maple.



F.3.1. Ábra. Az $xe^{-x^2-y^2}$ felület képe egy távoli perspektívából, melyet a Maple szerkesztett a $-2 \leq x, y \leq 2$ tartományon.

Ezek nemcsak arra alkalmasak, hogy egy bonyolult függvény határozatlan integrálját kiszámolják, hanem arra is, hogy az így kapott függvényeket axonometrikus vagy perspektivikus ábrázolási módban megjelenítsék.

Az előbb említett programok nem alkalmasak arra, hogy azokon a Bézier-módszert lehessen közvetlenül tanulmányozni, ezért közöljük az alábbi demonstrációs programot, melyet ki-ki számítástechnikai ismeretének megfelelően fejleszthet tovább. A program Maple-ben készült, de nyelve a C-ben programozók számára is érthető kell legyen.

```
> #egyszerű Bézier-görbe véletlenül generált kontrollpontokkal
> #Véletlen pontok generálása a síkon a [0,10]x[0,10] tartományon:
> fok:=3;#a görbe rangja
> for i from 0 to fok do
>   for j from 1 to 2 do
>     veletlen:=rand(10);Bezierpont[i,j]:=veletlen()
>   od;
> od;
> Kontrollpoligon:=
>   [seq([Bezierpont[i,1],Bezierpont[i,2]],i=0..fok)]:
> finom:=100; #a görbe finomsága
> #A görbe elkészítése (de Casteljau-algoritmussal):
> for k from 0 to finom do
>  deCasteljau:=Bezierpont:
>   for l from 0 to fok-1 do
>    for i from 0 to fok-1-l do
>     for j from 1 to 2 do
>      deCasteljau[i,j]:=evalf((1-k/finom)*deCasteljau[i,j]+
>      (k/finom)*deCasteljau[i+1,j])
>     od;
>     gorbe[k]:=[deCasteljau[i,1],deCasteljau[i,2]];
>    od;
>   od;
> od:
> Beziergorbe:=[seq(gorbe[k],k=0..finom)]:
> plot(Beziergorbe,Kontrollpoligon,-1..10,-1..10,color=black);
> #Kirajzolja a kontrollpoligont és a Bézier-görbét
```

F.4. Polárformák

A polárformák a polinomok olyan reprezentációját teszik lehetővé, melyből a jól ismert de Casteljau-algoritmus, illetve a Bézier-görbék és a polinomok közötti összefüggések természetesen adódnak.

F.4.1. Definíció. Egy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés *szimmetrikus*, ha változóit permutálva a függvény értéke nem változik, azaz $f(x_{1\pi}, \dots, x_{n\pi}) = f(x_1, \dots, x_n)$ tetszőleges $\pi \in S_n$ permutáció esetén.

F.4.2. Definíció. Egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ leképezés *affin*, ha megőrzi az affin kombinációt, azaz tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$.

Egy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés *multiaffin* (vagy más néven n-affin), ha minden változójában (mind az n változójában) affin.

F.4.3. Lemma. *Ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ leképezés affin, akkor*

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

bármely $s \neq r$ és $y \neq x$ valós számokra.

Bizonyítás. Az affinitást kihasználva

$$\begin{aligned} f(r) - f(s) &= f\Big(\frac{r-x}{y-x}y + \frac{y-r}{y-x}x\Big) - f\Big(\frac{s-y}{x-y}x + \frac{x-s}{x-y}y\Big) \\ &= \frac{r-x}{y-x}f(y) + \frac{y-r}{y-x}f(x) - \frac{s-y}{x-y}f(x) + \frac{x-s}{x-y}f(y) \\ &= \frac{r-s}{y-x}(f(y) - f(x)), \end{aligned}$$

ahogy állítottuk. ∎

Érdemes megfigyelni, hogy az $y = 1$ és $x = 0$ esetben

$$f(r) - f(s) = (r - s)(f(1) - f(0))$$

adódik, amiért a multiaffin leképezések minden változójukban parciálisan deriválhatóak.

F.4.4. Lemma. *Ha $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ szimmetrikus n-affin leképezés, akkor*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} f_i\Big(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I| = i}} \prod_{k \in I} x_k\Big)$$

valamely egyértelmű $f_i \in \mathbb{R}$ konstansokra.

Bizonyítás. Az állítás $n = 0$ és $n = 1$ esetén nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és $0, \ldots, n-1$ esetén igaz az állítás.

Legyen $\bar{f}^{[x]}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$. $\bar{f}^{[x]}$ nyilván szimmetrikus $(n-1)$-affin leképezés, ezért feltételezésünk értelmében

$$\bar{f}^{[0]}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{f}_i^{[0]} \Big(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n-1\} \\ |I|=i}} \prod_{k \in I} x_k \Big),$$

$$\bar{f}^{[1]}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{f}_i^{[1]} \Big(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n-1\} \\ |I|=i}} \prod_{k \in I} x_k \Big).$$

Az affinitás miatt

$$\begin{aligned} x_n \bar{f}^{[1]}&(x_1, \ldots, x_{n-1}) + (1 - x_n)\bar{f}^{[0]}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= x_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) + (1 - x_n) f^{[0]}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \\ &= f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot 1 + (1 - x_n) \cdot 0) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) &= x_n \bar{f}^{[1]}(x_1, \ldots, x_{n-1}) + (1 - x_n)\bar{f}^{[0]}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_n(\bar{f}_i^{[1]} - \bar{f}_i^{[0]}) + \bar{f}_i^{[0]}) \Big(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n-1\} \\ |I|=i}} \prod_{k \in I} x_k \Big), \end{aligned}$$

vagyis az $f_i = \left\{ \begin{array}{ll} \bar{f}_{i-1}^{[1]} - \bar{f}_{i-1}^{[0]} + \bar{f}_i^{[0]}, & \text{ha } i \geq 1, \\ \bar{f}_0^{[0]}, & \text{ha } i = 0, \end{array} \right\}$ együtthatók előállítják az f függvényt, ami igazolja az állítást. ■

A lemma alapján az olvasó könnyen igazolhatja a következő eredményt.

F.4.5. Tétel. *Az $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ szimmetrikus n-affin leképezések $(n + 1)$-dimenziós vektorteret alkotnak, melynek bázisa*

$$\Big\{ b_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=i}} \prod_{k \in I} x_k : i = 0, 1, \ldots, n \Big\}.$$

Az alábbi tétel rámutat a multiaffin szimmetrikus leképezések és a polinomok közti szoros kapcsolatra. Itt polinomnak nevezünk minden olyan $P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ függvényt, melynek minden koordinátája a változó algebrai polinomja.

Virágzási alapelv. *Tetszőleges n-fokú $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ polinomhoz pontosan egy olyan $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ n-affin szimmetrikus leképezés létezik, melyre $F(u) = f(u, u, \dots, u)$.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő a $k = 1$ esetben bizonyítani, hiszen ennek koordinátánkénti alkalmazása adja a kívánt eredményt.

Az n-fokú polinomok tere épp úgy $(n + 1)$-dimenziós vektortér, ahogy előbbi tételünk szerint az n-affin szimmetrikus leképezések tere is, ezért elég belátnunk, hogy a báziselemekből képzett $b_i(x, \dots, x)$ polinomok bázist alkotnak az n-fokú polinomok terében. Minthogy $b_i(x, \dots, x) = \binom{n}{i}x^i$, ezzel az állítást igazoltuk. ∎

Példaképpen, ha $n = 3$, $k = 1$, és $F(t) = 9t^3 + 3t^2 - 6t + 4$, akkor a tétel szerint egy háromváltozós polárformára van szükségünk, melynek általános alakja:

$$f(t_1, t_2, t_3) = at_1t_2t_3 + b(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3) + c(t_1 + t_2 + t_3) + d.$$

Az $a = 9$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 4$ paraméterek behelyettesítése adja az F polinomot.

F.4.6. Definíció. Az f leképezést az F polinom *polárformájának* hívjuk. Az F polinomot pedig az f leképezés *diagonálisának* nevezzük.

Míg a polárformából a polinom előállítása triviális, addig a fordított irány viszonylag bonyolult eljárás. Más fontos következmények mellett erre is megoldást kínál a következő eredmény.

F.4.7. Tétel. *Legyen F egy n-fokú polinom, f a hozzá tartozó polárforma, $a < b$, és $f_i = f(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_{i})$ minden $0 \le i \le n$ esetén. Ekkor*

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i B_i^n\Big(\frac{x - a}{b - a}\Big), \qquad x \in [a, b],$$

ahol B_i^n az i-edik n-fokú Bernstein-polinomot jelöli.

Bizonyítás. Legyen $t = \frac{x-a}{b-a}$. Ekkor $x = tb + (1 - t)a$, és $0 \le t \le 1$, ezért az f multiaffinitását és szimmetriáját kihasználva

$$\begin{aligned}
F(x) = f(x, \dots, x) &= f(tb + (1 - t)a, \dots, tb + (1 - t)a) \\
&= tf(b, tb + (1 - t)a, \dots, tb + (1 - t)a)+ \\
&\qquad + (1 - t)f(a, tb + (1 - t)a, \dots, tb + (1 - t)a) \\
&= t\big\{tf(b, b, tb + (1 - t)a, \dots, tb + (1 - t)a)+ \\
&\qquad\qquad + (1 - t)f(b, a, tb + (1 - t)a, \dots, tb + (1 - t)a)\big\}+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + (1-t)\big\{tf(a,b,tb+(1-t)a,\dots,tb+(1-t)a)+ \\
&\qquad\qquad + (1-t)f(a,a,tb+(1-t)a,\dots,tb+(1-t)a)\big\} \\
&= t^2 f(b,b,tb+(1-t)a,\dots,tb+(1-t)a)+ \\
&\quad + 2t(1-t)f(b,a,tb+(1-t)a,\dots,tb+(1-t)a)+ \\
&\quad + (1-t)^2 f(a,a,tb+(1-t)a,\dots,tb+(1-t)a) \\
&\ \vdots \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} f(\underbrace{b,\dots,b}_{i},\underbrace{a,\dots,a}_{n-i}),
\end{aligned}
$$

ahogy állítottuk. ∎

Eredményünk szerint a polárforma $n+1$ helyen felvett értéke már meghatározza a diagonális polinomot, ami viszont meghatározza az egész polárformát bármely argumentumok mellett. Összefoglalva: a polárformát a tételben megadott formájú $n+1$ pontja egyértelműen meghatározza!

F.4.8. Tétel. *Legyen F egy n-fokú polinom, és f a hozzá tartozó polárforma. Ekkor tetszőleges $a \neq b$ számokra*

$$F'(x) = n\frac{f(a,x,\dots,x) - f(b,x,\dots,x)}{a-b}.$$

Bizonyítás. A definícióból kiindulva

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{f(t,\dots,t)-f(x,\dots,x)}{t-x} \\
&= \lim_{t\to x} \Big(\frac{(f(t,\dots,t)-f(x,t,\dots,t)) + (f(x,t,\dots,t)-f(x,x,t,\dots,t)) + \cdots}{t-x} \\
&\qquad\qquad \frac{\cdots + (f(x,\dots,x,t)-f(x,\dots,x))}{t-x}\Big).
\end{aligned}
$$

Mivel a különbségek tagjainak argumentumaiban páronként csak egy eltérés van, $t \to x$, és a változók sorrendje nem számít, ebből

$$F'(x) = n \lim_{t\to x} \frac{f(t,x,\dots,x) - f(x,x,\dots,x)}{t-x}$$

adódik, amiből legelső lemmánk alapján az állítás azonnal következik. ∎

Ebből teljes indukcióval kaphatjuk meg a magasabb rendű derivált formuláját.

F.4.9. Tétel. *Legyen F egy n-fokú polinom, és f a hozzá tartozó polárforma. Ekkor tetszőleges $a \neq b$ számokra*

$$F^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{(a-b)^k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i f(\underbrace{a,\dots,a}_{k-i},\underbrace{b,\dots,b}_{i},\underbrace{x,\dots,x}_{n-k}).$$

Figyeljük meg, hogy a magasabb derivált formulájában szereplő tagok egyenkénti ismerete meghatározza magát a polárformát!

F.4.10. Tétel. *Az n-fokú F és G polinomok akkor és csak akkor illeszkednek s-ben ℓ-szer differenciálható (C^ℓ) módon, ha f és g polárformájukra*

$$f(u_1,\dots,u_\ell,\underbrace{s,\dots,s}_{n-\ell}) = g(u_1,\dots,u_\ell,\underbrace{s,\dots,s}_{n-\ell})$$

bármely $u_1,\dots,u_k \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Az előző tétel értelmében a megadott feltételből azonnal következik az ℓ-szer differenciálható illeszkedés.

Ha az illeszkedés ℓ-szer differenciálható, akkor előző eredményünk formuláját minden $0 \leq k \leq \ell$ esetre felhasználva, arra következtethetünk, hogy bármely $a \neq b$ esetén

$$f(\underbrace{a,\dots,a}_{k-i},\underbrace{b,\dots,b}_{i},\underbrace{x,\dots,x}_{n-k}) = g(\underbrace{a,\dots,a}_{k-i},\underbrace{b,\dots,b}_{i},\underbrace{x,\dots,x}_{n-k})$$

minden $0 \leq i \leq k \leq \ell$ mellett. Az F.4.7. tétel, illetve az utána található megjegyzés ebből már igazolja az állítást. ∎

F.5. Bernstein-polinomok

A Bernstein-polinomok a matematika szinte minden ágában jelentős szerepet játszanak. Mi most csak néhány, számunkra fontos tulajdonságra térünk ki. Mielőtt belemélyednénk, szükség van néhány jelölésre.

Konvenció. Egy egész számokból összeállított $\underline{\mathrm{i}} = (\underline{\mathrm{i}}_1,\dots,\underline{\mathrm{i}}_m)$ m-elemű vektort m-dimenziós *indexvektornak* nevezünk. A $\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}}$ jelölést egyszerűen a $\boldsymbol{p}_{\underline{\mathrm{i}}_1,\dots,\underline{\mathrm{i}}_m}$ rövidítéseként értelmezzük. Az indexvektor abszolút értékén az $|\underline{\mathrm{i}}| = \underline{\mathrm{i}}_1 + \cdots + \underline{\mathrm{i}}_m$ összeget, variációján az $\binom{n}{\underline{\mathrm{i}}} = \frac{n!}{\underline{\mathrm{i}}_1!\cdots\underline{\mathrm{i}}_m!}$ arányt értjük. Használni fogjuk még az $\underline{\mathrm{i}}^k = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ jelölést, ahol kizárólag a k-adik elem nem nulla, és éppen 1. Hasznunkra lesznek még az $\underline{\mathrm{x}} = (1,0,0)$, $\underline{\mathrm{y}} = (0,1,0)$ és $\underline{\mathrm{z}} = (0,0,1)$ konstans indexvektorok.

Figyeljük meg, hogy $\underline{\mathrm{i}} = \sum_{\ell=1}^{m} \underline{\mathrm{i}}_\ell \underline{\mathrm{i}}^\ell$, ha a skalárral való szorzást és az összeadást a vektoroknál megszokott módon értelmezzük.

F.5.1. Definíció. Legyen az $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)$ vektorra $\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_m = 1$, az $\underline{\mathrm{i}} = (\underline{\mathrm{i}}_1, \ldots, \underline{\mathrm{i}}_m)$ indexvektorra $|\underline{\mathrm{i}}| = \underline{\mathrm{i}}_1 + \cdots + \underline{\mathrm{i}}_m = n$. Ekkor a

$$B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) = \binom{n}{\underline{\mathrm{i}}} \prod_{\ell=1}^{m} \boldsymbol{u}_\ell^{\underline{\mathrm{i}}_\ell}$$

polinomot az $(m-1)$-dimenziós n-edrendű *Bernstein-polinomnak* nevezzük. Feltesszük, hogy $B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) = 0$, ha bármely index negatív, vagy nagyobb, mint n lenne.

Konvenció. Legtöbbször az egydimenziós Bernstein-polinomokkal dolgozunk, ezért ezekre alkalmazni fogjuk az egyszerűbb $B^n_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ jelölést, ahol $t \in [0,1]$ és $0 \le i \le n$ egész szám.

Amikor fontos utalni az általánosabb értelmezésre, akkor gyakran *baricentrikus Bernstein-polinomokat* említünk.

A kétdimenziós negyedrendű baricentrikus Bernstein-polinomokat a

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & v^4 & & & & \\
 & & & 4v^3w & & 4uv^3 & & & \\
 & & 6v^2w^2 & & 12uv^2w & & 6u^2v^2 & & \\
 & 4vw^3 & & 12uvw^2 & & 12u^2vw & & 4u^3v & \\
w^4 & & 4uw^3 & & 6u^2w^2 & & 4u^3w & & u^4
\end{array}$$

piramis forma szemlélteti, ahol $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ és $u + v + w = 1$.

F.5.2. Tétel. *A baricentrikus Bernstein-polinomok eleget tesznek a*

$$B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{u}_k B^{n-1}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{i}}^k}(\boldsymbol{u})$$

rekurziónak, és egységbontást adnak, vagyis

$$0 \le B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) \le 1, \quad \text{\textit{és}} \quad \sum_{|\underline{\mathrm{i}}|=n} B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\mathbf{u}) = \mathbf{1}.$$

Bizonyítás. A rekurzió a definíció és a jól ismert

$$\binom{n}{\underline{\mathrm{i}}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\underline{\mathrm{i}}_k}{n} \binom{n}{\underline{\mathrm{i}}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{\underline{\mathrm{i}} - \underline{\mathrm{i}}^k}$$

összefüggés következménye.

A többváltozós binomiális tételből pedig azonnal következik az egységbontás tulajdonsága.

■

A Bernstein-polinom $\partial_{\underline{\mathrm{j}}}$ parciális deriváltja nyilván a

$$\partial_{\underline{\mathrm{j}}} B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} B^{n-r}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u})$$

alakot ölti, ahol $|\underline{\mathrm{j}}| = r$, és $\partial_{\underline{\mathrm{j}}} = \partial_{\underline{\mathrm{j}}_1} \cdots \partial_{\underline{\mathrm{j}}_m}$. Ebből könnyen adódik a Bernstein-polinomok általános iránymenti deriváltja.

F.5.3. Tétel. *A* $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1, \dots, \boldsymbol{d}_m)$ *baricentrikus irányvektorra* $(\boldsymbol{d}_1 + \cdots + \boldsymbol{d}_m = 0)$

$$D^r_{\boldsymbol{d}} B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} B^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{d}) B^{n-r}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}).$$

Bizonyítás. A formula vizsgálatát az $r = 1$ esettel kezdjük. Ekkor nyilván

$$D_{\boldsymbol{d}} B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\ell=1}^{m} \boldsymbol{d}_\ell \partial_\ell B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\ell=1}^{m} \boldsymbol{d}_\ell \partial_{\underline{\mathrm{i}}^\ell} B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) = \frac{n!}{(n-1)!} \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=1} B^1_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{d}) B^{n-1}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}).$$

Teljes indukciós bizonyításunkban most $D^{r+1}_{\boldsymbol{d}} B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u})$ kiszámítása a cél az állítás szerint feltételezett formulából. Ezt a

$$\begin{aligned}
&D^{r+1}_{\boldsymbol{d}} B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) \\
&\quad = D_{\boldsymbol{d}} D^r_{\boldsymbol{d}} B^n_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{u}) = D_{\boldsymbol{d}} \Big(\frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} B^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{d}) B^{n-r}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}) \Big) \\
&\quad = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} B^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{d}) D_{\boldsymbol{d}} B^{n-r}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} B^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{d}) \sum_{\ell=1}^{m} \boldsymbol{d}_\ell \partial_{\underline{\mathrm{i}}^\ell} B^{n-r}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{u}) \\
&\quad = \frac{n!}{(n-r-1)!} \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} B^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{d}) \sum_{\ell=1}^{m} \boldsymbol{d}_\ell B^{n-r-1}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{j}}-\underline{\mathrm{i}}^\ell}(\boldsymbol{u}) \\
&\quad = \frac{n!}{(n-r-1)!} \sum_{\ell=1}^{m} \Big(\sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} \boldsymbol{d}_\ell B^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{d}) \Big) B^{n-r-1}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{j}}-\underline{\mathrm{i}}^\ell}(\boldsymbol{u}) \\
&\quad = \frac{n!}{(n-r-1)!} \sum_{\ell=1}^{m} \Big(\sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} \frac{\underline{\mathrm{j}}_\ell + 1}{r+1} B^{r+1}_{\underline{\mathrm{j}}+\underline{\mathrm{i}}^\ell}(\boldsymbol{d}) \Big) B^{n-r-1}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{j}}-\underline{\mathrm{i}}^\ell}(\boldsymbol{u}) \\
&\quad = \frac{n!}{(n-r-1)!} \sum_{|\underline{\mathrm{k}}|=r+1} \Big(\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\underline{\mathrm{k}}_\ell}{r+1} \Big) B^{r+1}_{\underline{\mathrm{k}}}(\boldsymbol{d}) B^{n-r-1}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{k}}}(\boldsymbol{u}) \\
&\quad = \frac{n!}{(n-r-1)!} \sum_{|\underline{\mathrm{k}}|=r+1} B^{r+1}_{\underline{\mathrm{k}}}(\boldsymbol{d}) B^{n-r-1}_{\underline{\mathrm{i}}-\underline{\mathrm{k}}}(\boldsymbol{u})
\end{aligned}$$

levezetés adja, egyben az állítást igazolva. ∎

A továbbiakban csak az egydimenziós Bernstein-polinomokkal foglalkozunk.

F.5.4. Tétel. *A Bernstein-polinomok a következő elemi tulajdonságokkal rendelkeznek:*

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t), \qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} B_i^n(t) = t,$$

$$\frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) = tB_i^n(t), \qquad \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) B_i^{n+1}(t) = (1-t)B_i^n(t),$$

$$B_k^n(t) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}t^j, \qquad \binom{n}{i}t^i = \sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}B_j^n(t),$$

és

$$B_k^n(tt_0) = \sum_{i=k}^{n} B_i^n(t)B_k^i(t_0).$$

Bizonyítás. Az első állítás igazolásához a binomiális együtthatóknak a Pascal-háromszögből ismert összefüggését kell kihasználni. A második képlet helyessége azon múlik, hogy a kivételektől eltekintve $\frac{i}{n}\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1}$. A következő kettő állítás a definíció alapján nyilvánvaló.

A hatványra bontást a

$$\begin{aligned} B_k^n(t) &= \binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = \binom{n}{k}t^k(-1)^{n-k}(t-1)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k}t^k(-1)^{n-k}\sum_{h=0}^{n-k}\binom{n-k}{h}t^h(-1)^{n-k-h} \\ &= \sum_{h=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{h}(-1)^h t^{k+h} = \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}(-1)^{j-k}t^j. \end{aligned}$$

levezetés bizonyítja. A fordítottját a

$$\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}B_j^n(t) = \binom{n}{i}t^i\sum_{j=i}^{n}\binom{n-i}{j-i}t^{j-i}(1-t)^{n-j} = \binom{n}{i}t^i$$

egyenlőség mutatja.

A szorzat szétbontását a definíció és a binomiális tétel felhasználásával a

$$\begin{aligned}
B_k^n(tt_0) &= \binom{n}{k}(tt_0)^k(1-tt_0)^{n-k}\\
&= \binom{n}{k}(tt_0)^k\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k}(1-t)^{n-i}(t-tt_0)^{i-k}\\
&= (tt_0)^k\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}(1-t)^{n-i}(t-tt_0)^{i-k}\\
&= \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}\binom{i}{k}t_0^k(1-t_0)^{i-k} = \sum_{i=k}^{n}B_k^i(t_0)B_i^n(t),
\end{aligned}$$

képlet bizonyítja. ■

F.5.5. Tétel. *A Bernstein-polinomok a* $[0,1]$ *egy egységbontását adják, vagyis*

$$0 \le B_i^n(t) \le 1, \quad \textit{és} \quad \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1,$$

és bázist alkotnak a $[0,1]$ *intervallumon értelmezett* n*-fokú polinomok vektorterében, vagyis tetszőleges a* $[0,1]$ *intervallumon értelmezett* P *polinom egyértelműen előáll mint az* n*-edrendű* B_i^n *Bernstein-polinomok lineáris kombinációja.*

Bizonyítás. Az első állítás a binomiális tétel miatt triviális, de következik a baricentrikus Bernstein-polinomok egységbontás tulajdonságából is.

A bázis tulajdonság az elemi tulajdonságok közt felsorolt hatványfelbontásból és annak fordítottjából már következik, de közvetlen számolással is megmutatható.

Legyen tehát $P(t) = \sum_{j=0}^{n} p_j t^j$ egy n-fokú polinom, és keressük azokat az α_k együtthatókat, melyre $P(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k^n(t)$.

A Bernstein-polinom hatványfelbontásával összevetve

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}(-1)^{j-k}t^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}\alpha_k\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}(-1)^{j-k}t^j$$

következik, amiből az

$$p_j = \sum_{k=0}^{j}\alpha_k\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}(-1)^{j-k} \qquad (0 \le j \le n)$$

egyenletrendszer adódik az α_k számokra. Mivel ennek az egyenletrendszernek a mátrixa alulról trianguláris, és a főátló elemei nem nullák, a rendszer determinánsa nem nulla, tehát pontosan egy megoldása létezik. Ez igazolja az állítást. ■

Egy-két Bernstein-polinom grafikonjának felrajzolása után azonnal feltűnik, hogy e polinomok a $[0,1]$ intervallumon „harang alakúak”, vagy pontosabban a B_i^n grafikonja az i/n közelében nagy értékeket vesz fel, attól távolodva pedig rohamosan csökkenőket. Azt is megfigyelhetjük, hogy minél nagyobb a polinom foka, ez a viselkedés annál erőteljesebb, szinte „hegyesedik” a grafikon.

F.5.6. Definíció. A fenti jelenséget a Bernstein-polinomok *szűkülésének* nevezzük.

F.5.7. Tétel. *A Bernstein-polinom derivált- és integrálfüggvényeire*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_i^n(t) = n\left(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right), \qquad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}B_i^n(t) = \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}B_{i-j}^{n-k}(t),$$

és

$$\int_0^t B_i^n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^{n+1}(t), \qquad \int_0^1 B_i^n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Bizonyítás. A deriváltra vonatkozó formulát közvetlen számolással a szereplő szorzat deriválásából adódó tagok ügyes csoportosításával, vagy az általánosabb baricentrikus iránymenti deriválból igazolhatjuk.

Ugyanígy tehetünk a magasabb rendű deriválással is:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}B_i^n(t) &= \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}t^i\right)\left(\frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}t^{k-j}}(1-t)^{n-i}\right)\\
&= \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{k}\frac{i!}{(i-j)!}t^{i-j}(-1)^{k-j}\frac{(n-i)!}{(n-i-k+j)!}(1-t)^{n-i-k+j}\\
&= \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}B_{i-j}^{n-k}(t).
\end{aligned}$$

A $k=1$ esetben azt látjuk, hogy $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$, amiért

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^n(t)\Big) = (n+1)\sum_{j=i+1}^{n+1}(B_{j-1}^n(t) - B_j^n(t)) = (n+1)B_i^n(t)$$

is igaz. Ebből azonnal következik az első integrálos formula, hiszen $t=0$-ban a két oldal megegyezik.

A második integrálos formula az előző speciális esete a $t=1$ pontban. Ezzel minden állítást beláttunk. ∎

F.5.1. Példa és feladatok

F.5.8. Példa. Számoljuk ki a derivált felhasználása nélkül a Bernstein-polinomok integrálját!

Megoldás. Legyen $b_i^n = \int_0^1 B_i^n(t)\,\mathrm{d}t$. Ekkor

$$\begin{aligned} b_i^n &= \int_0^1 \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i}\,\mathrm{d}t \\ &= \binom{n}{i}\int_0^1 t^i(1-t)^{n-i-1}\,\mathrm{d}t - \binom{n}{i}\int_0^1 t^{i+1}(1-t)^{n-i-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{n-i}b_i^{n-1} - \frac{i+1}{n-i}b_{i+1}^n, \end{aligned}$$

amit átrendezve $b_{i+1}^n = \frac{n}{i+1}b_i^{n-1} - \frac{n-i}{i+1}b_i^n$ adódik. Világos, hogy $b_i^0 = b_i^1 = 1$, és $b_0^n = 1/(n+1)$ minden n nemnegatív egészre.

Feltételezve most, hogy $\int_0^1 B_i^n(t)\,\mathrm{d}t = 1/(n+1)$, az n és i szerinti teljes indukcióból az következik, hogy

$$b_{i+1}^n = \frac{n}{i+1}\frac{1}{n} - \frac{(n+1)-(i+1)}{i+1}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

tehát $\int_0^1 B_i^n(t)\,\mathrm{d}t = 1/(n+1)$, ahogy vártuk. ■

F.5.9. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a B_i^n Bernstein-polinom maximuma i/n-ben van, és számítsuk ki e maximum értékét! Mi történik e maximummal, ha $n \to \infty$, és $i/n \to \lambda$ valamely adott λ konstansra?

F.5.10. Feladat. Bizonyítsuk be a baricentrikus Bernstein-polinomok bázis tulajdonságát!

F.6. B-szplájnfüggvények

A B-szplájnfüggvényeket („basis spline functions”) már régen használták a matematikában — Lobacsevszkij például a valószínűségszámításban —, aztán 1946-ban alkalmazta őket statisztikai adatok simításához Schönberg, ezzel elindítva a modern approximációelmélet kutatását. Másfelől egy $(k+1)$-dimenziós szimplexnek az egydimenziós egyenesen párhuzamos vetítés során keletkező röntgenképe is B-szplájnfüggvény (N_i^k), ha a szimplex homogén anyagból készült, és a röntgenkép világossága a vastagsággal arányos.

Mi az 1970-es évek elején de Boor, Cox és Mansfield által kidolgozott módon, de igen röviden tárgyaljuk a B-szplájnfüggvényeket.

F.6.1. Definíció. Az illeszkedési pontok egy növekvő $t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m$ számsorozatot határoznak meg, melyeket *csomópontoknak*, az ezekből alkotott $T = (t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m)$ vektort *csomópontvektornak* nevezzük.

A T csomópontvektorhoz tartozó i-dik k-adrendű (k-fokú) (normalizált) N_i^k *B-szplájnfüggvényt* az

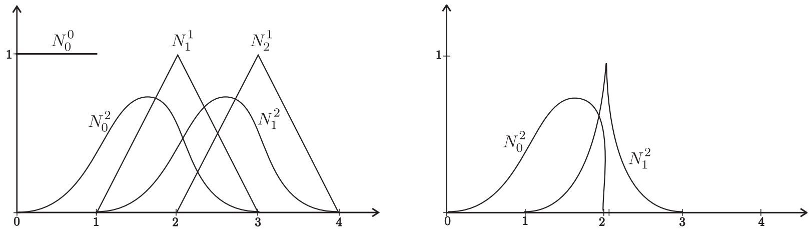
$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t_i \le t < t_{i+1}, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

és $k > 1$ esetén az

$$N_i^k(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t_i = t_{i+k+1}, \\ \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t), & \text{egyébként} \end{cases}$$

rekurzióval definiáljuk.

Ha a csomópontok egyenlő távolságra helyezkednek el, akkor *uniform B-szplájnokról* beszélünk.



F.6.1. Ábra. Uniform és nem uniform B-szplájnfüggvények.

F.6.2. Megjegyzés. Ha a csomópontvektor

$$T = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$$

alakú, akkor az $N_i^n(t)$ B-szplájnfüggvény a $B_i^n(t)$ Bernstein-polinom lesz, vagyis a B-szplájnfüggvények a Bernstein-polinomok általánosításai.

F.6.3. Tétel. *Az N_i^k B-szplájnfüggvények egységbontást alkotnak a $[t_k, t_n]$ intervallumon, vagyis*

$$\begin{aligned} N_i^k(t) &= 0, \quad \text{ha } t < t_i, \quad \text{vagy} \quad t_{i+k+1} < t, \\ N_i^k(t) &> 0, \quad \text{ha } t_i \le t \le t_{i+k+1}, \quad \text{és} \\ \sum_{i=0}^{n-1} N_i^k(t) &= 1, \quad \text{ha } t \in [t_k, t_n]. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A $k=0$ esetben az állítás nyilvánvaló, ezért elég teljes indukcióval megmutatni, hogy ha k esetén teljesül az állítás, akkor $k+1$ esetén is.

Az állítás első két sora nyilvánvaló, a harmadikat a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} N_i^{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^{n-1}\Big(\frac{t-t_i}{t_{i+k+1}-t_i}N_i^k(t)+\frac{t_{i+k+2}-t}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}N_{i+1}^k(t)\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t-t_i}{t_{i+k+1}-t_i}N_i^k(t)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t_{i+k+2}-t}{t_{i+k+2}-t_{i+1}}N_{i+1}^k(t)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t-t_i}{t_{i+k+1}-t_i}N_i^k(t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_i}N_i^k(t)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{t-t_i}{t_{i+k+1}-t_i}N_i^k(t)+\frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_i}N_i^k(t)\Big)+\\
&\qquad\qquad\qquad +\frac{t-t_0}{t_{k+1}-t_0}N_0^k(t)+\frac{t_{n+k+2}-t}{t_{n+k+2}-t_i}N_n^k(t)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}N_i^k(t)=\sum_{i=0}^{n-1}N_i^k(t)=1
\end{aligned}$$

levezetés igazolja a $t\in[t_{k+1},t_n]$ intervallumon. Ezzel a bizonyítás teljes. ■

Egy B-szplájnfüggvény deriváltja, a Bernstein-polinomokhoz hasonlóan, alacsonyabb fokszámú B-szplájnfüggvények segítségével állítható elő.

F.6.4. Tétel. *Az N_i^k B-szplájnfüggvény deriváltja*

$$(N_i^k)'(t)=k\Big(\frac{N_i^{k-1}(t)}{t_{i+k}-t_i}-\frac{N_{i+1}^{k-1}(t)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\Big).$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. A $k=1$ esetben könnyen belátható, hogy

$$(N_i^1)'(x)=\frac{N_i^0(x)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{N_{i+1}^0(x)}{t_{i+2}-t_{i+1}}.$$

Tegyük fel, hogy $(k-1)$-re igaz a formulánk! Ekkor nyilván

$$\begin{aligned}
(N_i^k)'(x) &= \lim_{t\to x}\frac{N_i^k(t)-N_i^k(x)}{t-x}\\
&= \lim_{t\to x}\frac{\frac{(t-t_i)N_i^{k-1}(t)-(x-t_i)N_i^{k-1}(x)}{t_{i+k}-t_i}+\frac{(t_{i+k+1}-t)N_{i+1}^{k-1}(t)-(t_{i+k+1}-x)N_{i+1}^{k-1}(x)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}}{t-x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to x} \frac{t_i(N_i^{k-1}(x) - N_i^{k-1}(t)) + tN_i^{k-1}(t) - xN_i^{k-1}(x)}{(t-x)(t_{i+k}-t_i)} + \\
&\qquad + \lim_{t\to x} \frac{t_{i+k+1}(N_{i+1}^{k-1}(t) - N_{i+1}^{k-1}(x)) - tN_{i+1}^{k-1}(t) + xN_{i+1}^{k-1}(x)}{(t-x)(t_{i+k+1}-t_{i+1})} \\
&= \frac{-t_i(N_i^{k-1})'(x) + (xN_i^{k-1}(x))'}{t_{i+k}-t_i} + \frac{t_{i+k+1}(N_{i+1}^{k-1})'(x) - (xN_{i+1}^{k-1}(x))'}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}. \\
&= \frac{(x-t_i)(N_i^{k-1})'(x) + N_i^{k-1}(x)}{t_{i+k}-t_i} + \frac{(t_{i+k+1}-x)(N_{i+1}^{k-1})'(x) - N_{i+1}^{k-1}(x)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}.
\end{aligned}
$$

Használva az indukciós feltevést, vagyis a deriváltak helyébe behelyettesítve a feltételezett képletet,

$$
\begin{aligned}
(N_i^k)'(x) = &\frac{(x-t_i)(k-1)\left(\frac{N_i^{k-2}(x)}{t_{i+k-1}-t_i} - \frac{N_{i+1}^{k-2}(x)}{t_{i+k}-t_{i+1}}\right) + N_i^{k-1}(x)}{t_{i+k}-t_i} + \\
&+ \frac{(t_{i+k+1}-x)(k-1)\left(\frac{N_{i+1}^{k-2}(x)}{t_{i+k}-t_{i+1}} - \frac{N_{i+2}^{k-2}(x)}{t_{i+k+1}-t_{i+2}}\right) - N_{i+1}^{k-1}(x)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}},
\end{aligned}
$$

adódik, amit az N_{i+1}^{k-2} együtthatóiban átrendezve, a

$$
\begin{aligned}
\frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} - \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} &= \left(1 - \frac{x-t_{i+1}}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\right) - \left(1 - \frac{t_{i+k}-x}{t_{i+k}-t_i}\right) \\
&= \frac{t_{i+k}-x}{t_{i+k}-t_i} - \frac{x-t_{i+1}}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}
\end{aligned}
$$

azonosság alapján az

$$
\begin{aligned}
(N_i^k)'(x) = &\frac{(k-1)\left(\frac{x-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_i^{k-2}(x) + \frac{t_{i+k}-x}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1}^{k-2}(x)\right) + N_i^{k-1}(x)}{t_{i+k}-t_i} - \\
&- \frac{(k-1)\left(\frac{x-t_{i+1}}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1}^{k-2}(x) + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+2}}N_{i+2}^{k-2}(x)\right) + N_{i+1}^{k-1}(x)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}
\end{aligned}
$$

eredmény következik, ahol a zárójelekben a B-szplájnfüggvények rekurzív képletét felismerve teljessé válik a bizonyítás. ∎

Ha a csomópontvektorban a t_k és t_n közötti minden csomópont multiplicitása egy, ahogy eddig feltételeztük, akkor érvényes az alábbi.

F.6.5. Következmény. *Az N_i^k B-szplájnfüggvények $(k-1)$-szeresen folytonosan deriválhatóak a $[t_k, t_n]$ intervallumon.* (Ha a differenciálhatóság negatív mértékű, azt úgy kell értelmezni, hogy a görbe nem folytonos.)

F.6.6. Megjegyzés. Az F.6.1. ábra nem uniform B-szplájnfüggvényeket ábrázoló grafikonján két csomópont egybeesik, és láthatólag a differenciálhatóság csorbát szenved. Ez általánosan is igaz. Ha a csomópontvektorban ℓ-szer szerepel a t csomópont, akkor t-ben a differenciálhatóság foka $(k-1)$-ről $(k-\ell)$-re csökken, a tartó hossza pedig $(k+1)$-ről $(k-\ell+2)$-re rövidül.

F.6.7. Megjegyzés. A B-szplájnfüggvényeket alacsonyabb fokszámú B-szplájnok simításaként is felfoghatjuk, mert uniform B-szplájn esetén

$$N_i^k(t) = \int_{t-(t_1-t_0)}^{t} N_i^{k-1}(x)dx.$$

A deriváltra vonatkozó eredményünket felhasználva nagyon egyszerű bizonyítás az olvasóra marad.

A most következő eredmény magyarázza, hogy miért B-szplájn, azaz „*basis*-spline” az N_i^k függvények neve.

F.6.8. Tétel. *Az N_i^k B-szplájnfüggvények bázist alkotnak a $[t_k, t_n]$ intervallumon értelmezett $(k-1)$-szer differenciálható, a T csomópontvektor szakaszain k-fokú polinomiális függvények vektorterében.*

Bizonyítás. Legyen P_T^k a $[t_k, t_n]$ intervallumon értelmezett $(k-1)$-szer differenciálható, a T csomópontvektor szakaszain k-rendű polinomiális függvények vektortere. Nyilván $N_i^k \in P_T^k$.

A P_T^k tér dimenziójának kiszámításához figyeljük meg, hogy a $[t_k, t_n]$ intervallumot a T csomópontvektor $n-1-k$ belső pontja töri szakaszokra, és a differenciálhatósági feltétel egyedül ezekben a pontokban megszorító. Mivel ezen pontok mindkét oldalán az első $(k-1)$ derivált meg kell egyezzen, a polinomok $0, \ldots, k-1$ fokbeli együtthatói is meg kell egyezzenek, vagyis csak a legmagasabb fokszámú tagok együtthatói térhetnek el. Eszerint csak a $[t_k, t_{k+1}]$ intervallumon választhatunk szabadon a k-fokú polinomok $(k+1)$-dimenziós teréből, a $[t_{k+1}, t_{k+2}], \ldots, [t_{k+(n-k-1)}, t_n]$ intervallumokon már csak a legfelső fokú tag szabadságával rendelkező polinomok egydimenziós teréből választhatunk. Eszerint

$$\dim P_T^k = (k+1) + \sum_{i=k+1}^{k+(n-k-1)} 1 = (k+1) + (n-k-1) = n.$$

Minthogy $\operatorname{supp} N_i^k = [t_i, t_{i+k+1}]$, nyilván éppen n darab $(i = 0, \ldots, n-1)$ B-szplájnfüggvény nem nulla a $[t_k, t_n]$ intervallumon. Mivel a dimenzió is n, elegendő belátnunk, hogy az $\{N_i^k\}_{i=0,\ldots,n-1}$ B-szplájnfüggvényrendszer független.

Tegyük fel, hogy $\sum_{i=0}^{n-1} c_i N_i^k(t) \equiv 0$ valamilyen c_i együtthatókkal. A fentiek értelmében be kell látnunk, hogy ezek az együtthatók csakis nullák lehetnek.

Ha $t \in [t_j, t_{j+1}]$ (persze $k \leq j \leq n-1$), akkor feltevésünk szerint $f(t) \stackrel{def}{\equiv} \sum_{i=j-k}^{j} c_i N_i^k(t) \equiv 0$, hiszen az ebben a szummában nem szereplő B-szplájnok eltűnnek a $[t_j, t_{j+1}]$ intervallumon. Ebből viszont $\operatorname{supp} f = [t_{j-k}, t_j]$ adódik.

Eszerint f benne van a $[t_{j-k}, t_j]$ intervallumon értelmezett $(k-1)$-szer differenciálható, a T csomópontvektor szakaszain k-rendű polinomiális függvények vektorterében, miközben a t_{j-k} és t_j pontban az f első $k-1$ deriváltja eltűnik. Ahogy az elején, most is beláthatjuk, hogy ennek a vektortérnek a dimenziója $\dim = (k+1) + \sum_{i=j-k+1}^{j-k+(k-1)} 1 = (k+1)+(k-1) = 2k$. Az f első $k-1$ deriváltjának a t_{j-k} és t_j pontokban való eltűnése éppen $2k$ független egyenletet ad meg, így a most látott vektortérből f kiválasztása egyértelmű. Minthogy ugyanakkor a nulla függvény minden feltételt teljesít, amit az f, ebből $f \equiv 0$ következik.

A $[t_{j-k}, t_{j-k+1}]$ intervallumon $f(t) = c_{j-k} N_{j-k}^k(t)$, hiszen a többi B-szplájn eltűnik ezen az intervallumon. Csakhogy $N_{j-k}^k(t) > 0$ az intervallum belsejében, ezért $c_{j-k} = 0$. Ezt felhasználva már következik, hogy a $[t_{j-k+1}, t_{j-k+2}]$ intervallumon viszont $f(t) = c_{j-k+1} N_{j-k+1}^k(t)$ érvényes, amiért $c_{j-k+1} = 0$ adódik. Így lépegetve tovább, végül az összes együtthatóról kiderül, hogy nulla. ∎

F.6.9. Tétel. *Az N_i^k B-szplájnok integráljára*

$$\frac{t_{i+k+1} - t_i}{k+1} = \int_{-\infty}^{\infty} N_i^k(t)dt.$$

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy $k=0$ esetén az állítás teljesül. A bizonyítás innentől teljes indukcióval halad, a rekurziós összefüggés felhasználásával.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} N_i^k(t)dt &= \int_{t_i}^{t_{i+k+1}} \Big(\frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t) \Big) dt \\
&= \int_{t_i}^{t_{i+k}} \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_i^{k-1}(t)dt + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+k+1}} \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t)dt \\
&= \int_{t_i}^{t_{i+k+1}} t \Big(\frac{N_i^{k-1}(t)}{t_{i+k}-t_i} - \frac{N_{i+1}^{k-1}(t)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} \Big) dt + \\
&\quad + \frac{-t_i}{t_{i+k}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+k}} N_i^{k-1}(t)dt + \frac{t_{i+k+1}}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+k+1}} N_{i+1}^{k-1}(t)dt \\
&= \int_{t_i}^{t_{i+k+1}} \frac{t}{k} (N_i^k)'(t)dt + \frac{t_{i+k+1}-t_i}{k} \\
&= \Big[\frac{t}{k} N_i^k(t) \Big]_{t_i}^{t_{i+k+1}} - \frac{1}{k} \int_{t_i}^{t_{i+k+1}} N_i^k(t)dt + \frac{t_{i+k+1}-t_i}{k}.
\end{aligned}$$

Átrendezéssel azonnal kapjuk az

$$\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\int_{-\infty}^{\infty} N_i^k(t)dt = \frac{t_{i+k+1}-t_i}{k}$$

egyenlőséget, ami igazolja állításunkat. ■

Ha egy csomópontvektorhoz hozzáveszünk egy újabb pontot, akkor a következő összefüggés lesz érvényes a generált B-szplájnfüggvényekre.

Böhm-tétel. *Legyen adott a* $T = (t_0 = t_1 = \ldots = t_{k-1} = t_k, \ldots, t_n = t_{n+1} = t_{n+2} = \ldots = t_{n+k})$ *csomópontvektor, és legyen* $t_* \in [t_j, t_{j+1})$ *valamely egyértelmű* $k \le j < n-1$ *indexre.*

Legyen a $\hat{T}$ *csomópontvektor a*

$$\hat{t}_i = \begin{cases} t_i, & \text{ha } i \le j,\\ t_*, & \text{ha } i = j+1,\\ t_{i-1}, & \text{ha } j+2 \le i \end{cases}$$

csomópontokkal adva.

Ekkor a $\hat{T}$ *csomópontvektor által meghatározott* $\hat{N}_i^k(t)$ *B-szplájnfüggvények és a* T *csomópontvektor által megadott* $N_i^k(t)$ *B-szplájnfüggvények között érvényes az*

$$N_i^k(t) = \alpha_i^k \hat{N}_i^k(t) + (1-\alpha_{i+1}^k)\hat{N}_{i+1}^k(t)$$

összefüggés, ahol

$$\alpha_i^0 = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \le j,\\ 0, & \text{ha } j < i, \end{cases}$$

és $k \ge 1$ *esetén*

$$\alpha_i^k = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \le j-k,\\ \frac{t_*-t_i}{t_{i+k}-t_i}, & \text{ha } j-k < i \le j,\\ 0, & \text{ha } j < i. \end{cases}$$

Bizonyítás. A definíció alapján nyilván $N_i^k = \hat{N}_i^k$ minden $i \le j-k-1$, és $N_i^k = \hat{N}_{i+1}^k$ minden $j+1 \le i$ esetén, ezért a továbbiakban $j-k \le i \le j$.

A $k=0$ esetben az állítás triviális, ezért feltételezve az

$$N_i^{k-1}(t) = \alpha_i^{k-1}\hat{N}_i^{k-1}(t) + (1-\alpha_{i+1}^{k-1})\hat{N}_{i+1}^{k-1}(t)$$

teljesülését minden i esetén, teljes indukciós bizonyításunk kulcsa az

$$N_i^k(t) = \alpha_i^k \hat{N}_i^k(t) + (1-\alpha_{i+1}^k)\hat{N}_{i+1}^k(t)$$

igazolása $j-k \le i \le j$ és $k \ge 1$ esetén.

A rekurziós azonosság után az indukciós feltevést használva

$$\begin{aligned} N_i^k(t) &= \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}N_{i+1}^{k-1}(t) \\ &= \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}\big(\alpha_i^{k-1}\hat{N}_i^{k-1}(t) + (1-\alpha_{i+1}^{k-1})\hat{N}_{i+1}^{k-1}(t)\big) + \\ &\qquad + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\big(\alpha_{i+1}^{k-1}\hat{N}_{i+1}^{k-1}(t) + (1-\alpha_{i+2}^{k-1})\hat{N}_{i+2}^{k-1}(t)\big). \end{aligned}$$

Ugyanakkor, amit bizonyítanunk kell, az az

$$\begin{aligned} N_i^k(t) &= \alpha_i^k \hat{N}_i^k(t) + (1-\alpha_{i+1}^k)\hat{N}_{i+1}^k(t) \\ &= \alpha_i^k\big(\frac{t-\hat{t}_i}{\hat{t}_{i+k}-\hat{t}_i}\hat{N}_i^{k-1}(t) + \frac{\hat{t}_{i+k+1}-t}{\hat{t}_{i+k+1}-\hat{t}_{i+1}}\hat{N}_{i+1}^{k-1}(t)\big) + \\ &\qquad + (1-\alpha_{i+1}^k)\big(\frac{\hat{t}_{i+k+1}-t}{\hat{t}_{i+k+1}-\hat{t}_{i+1}}\hat{N}_{i+1}^{k-1}(t) + \frac{\hat{t}_{i+k+2}-t}{\hat{t}_{i+k+2}-\hat{t}_{i+2}}\hat{N}_{i+2}^{k-1}(t)\big) \end{aligned}$$

egyenlőség, így elegendő ellenőriznünk, hogy

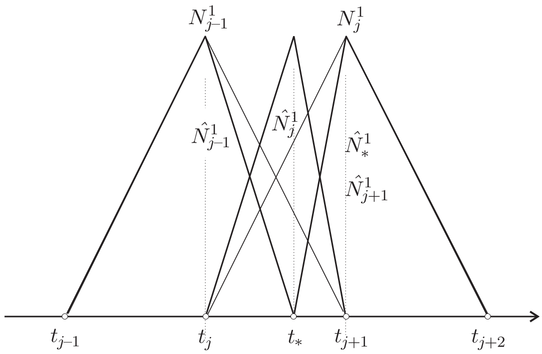
$$\frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}\alpha_i^{k-1} = \alpha_i^k\frac{t-\hat{t}_i}{\hat{t}_{i+k}-\hat{t}_i},$$

$$\frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}(1-\alpha_{i+1}^{k-1}) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\alpha_{i+1}^{k-1} = \alpha_i^k\frac{\hat{t}_{i+k+1}-t}{\hat{t}_{i+k+1}-\hat{t}_{i+1}} + (1-\alpha_{i+1}^k)\frac{\hat{t}_{i+k+1}-t}{\hat{t}_{i+k+1}-\hat{t}_{i+1}},$$

$$\frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}(1-\alpha_{i+2}^{k-1}) = (1-\alpha_{i+1}^k)\frac{\hat{t}_{i+k+2}-t}{\hat{t}_{i+k+2}-\hat{t}_{i+2}}.$$

Az ellenőrzés egyszerű számolással bizonyítja állításunkat. ■

A most következő ábra jól mutatja a csomópont beszúrásakor történő változásokat a B-szplájnoknál. Leovasható α_j^1, és a bizonyított összefüggés is azonnal látszik.



F.6.2. Ábra. Csomópont beszúrás elsőfokú B-szplájnok esetén.

F.7. További előismeretek

E szakasz célja olyan, inkább az azonnali elérhetőség kényelmét szolgáló vegyes ismereteknek a könyvhöz csatolása, melyeket az anyag tárgyalása közben általánosan ismertnek tételeztünk fel, de talán néhány olvasónak mégis új.

F.7.1. Mátrixok és determinánsok

F.7.1. Tétel. *Ha C és D a diagonális A és a vele felcserélhető B négyzetes mátrixszal azonos rendű mátrixok, akkor* $\det\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(DA - CB)$.

Bizonyítás. Mivel A és B felcserélhető mátrixok, teljesül az

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & DA - CB \end{pmatrix}$$

azonosság. A determinánsok kifejtési, szorzás-, és ismét a kifejtési tétele értelmében tehát

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A^{-1} & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & DA - CB \end{pmatrix} \\ &= \det(DA - CB), \end{aligned}$$

ami igazolja az állítást. ■

F.7.2. Definíció. Ha az $n \times n$-es A mátrix elemeire $|a_{i,i}| > |a_{i,1}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{i,n}|$ minden lehetséges i esetén, akkor az A mátrixot *diagonálisan dominánsnak* nevezzük.

Diagonálisan domináns mátrixok tétele. *Ha az A mátrix diagonálisan domináns, akkor az A mátrix invertálható, és* $|\det A| \geq a_1 \cdots a_n$*, ahol* $a_i = |a_{i,i}| - |a_{i,1}| - \cdots - |a_{i,i-1}| - |a_{i,i+1}| - \cdots - |a_{i,n}|$.

Bizonyítás. A bizonyítást Móricz Ferenc jegyzetéből másoljuk ide.

Legyen $f_{i,j} = a_{i,j}/a_i$. Ekkor $|f_{i,i}| - |f_{i,1}| - \cdots - |f_{i,i-1}| - |f_{i,i+1}| - \cdots - |f_{i,n}| = 1$. Ha λ az $F = (f_{i,j})$ mátrix egy sajátértéke, melyhez $(v_1, \ldots, v_n)$ egy sajátvektor, ahol $|v_i| = \max_j |v_j|$, akkor persze a $\lambda v_i = \sum_{j=1}^n f_{i,j} v_j$ alapján

$$|\lambda||v_i| = \Big|\sum_{j=1}^n f_{i,j} v_j\Big| \geq |f_{i,i}||v_i| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n |f_{i,j}||v_j| \geq \Big(|f_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n |f_{i,j}|\Big)|v_i| = |v_i|,$$

amiért $|\lambda| > 1$. Mivel ez F bármely sajátértékére igaz, nyilván $|\det F| \geq 1$, amiből az állítás közvetlenül következik. ∎

F.7.3. Definíció. Az $(n+1) \times (n+1)$-es A mátrixot *Vandermonde típusúnak* nevezzük, ha elemeire $a_{i,j} = t_j^i$, vagyis

$$A = \begin{pmatrix} t_0^0 & \ldots & t_n^0 \\ t_0^1 & \ldots & t_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ t_0^n & \ldots & t_n^n \end{pmatrix}.$$

Vandermonde-mátrixok tétele. *Ha az A mátrix Vandermonde típusú, akkor*

$$\det A = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i).$$

Bizonyítás. A Vandermonde-mátrix determinánsa egy olyan $(n+1)$-változós polinom, melynek fokszáma $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$, és bármely két különböző változójának egyenlősége esetén nulla. Ez utóbbiból és az algebra alaptételéből azonnal következik, hogy a determináns a $\prod_{0 \leq i < j \leq n}(t_j - t_i)$ polinom többszöröse. Mivel ennek is $\binom{n}{2} = n(n+1)/2$ a fokszáma, a két polinom csak konstans szorzóban térhet el. Mivel a determinánsban a $t_0^0 t_1^1 \cdots t_{n-1}^{n-1} t_n^n$ tag együtthatója nyilván $+1$, és a polinomban ugyanennek a tagnak szintén $+1$ az együtthatója, a szorzó csak $+1$ lehet, ami igazolja az állítást. ∎

F.7.2. Vektor-vektorfüggvények analízise

Ebben a részben az $f\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ típusú, úgynevezett vektor-vektorfüggvényekről szólunk.

Ha x_i a független és f_j a függő változók jele, akkor az ilyen függvényeket az

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_\ell) = (f_1(x_1, \dots, x_\ell), \dots, f_m(x_1, \dots, x_\ell)) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

alakokban írhatjuk, ahol $x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$.

Az f teljes deriváltja az x helyen az az egyértelmű lineáris $D\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ leképezés, melyre

$$\lim_{y\to 0} \frac{|f(x+y) - f(x) - Dy|}{|y|} = 0.$$

Ha mindkét téren adott egy bázis, akkor D megfeleltethető egy $m \times \ell$ (m sor és ℓ oszlop) típusú, szintén D-vel jelölt mátrixnak, a fenti formulában pedig az y vektort mint l magas oszlopvektort kell szerepeltetni. Ha D létezik, akkor az f függvényt differenciálhatónak mondjuk, és f' vagy $\dot{f}$ jelöli a D leképezést, illetve annak mátrixát. Ha $f(x) = Dx$ egy lineáris leképezés, akkor könnyű látni, hogy $f' = D$. Ha $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$, és $f\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$, akkor a láncszabály szerint

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' = f'(g) \cdot g',$$

ahol $(f \circ g)'$ egy $n \times m$ típusú, $f'(g)$ egy $n \times \ell$ és g' egy $\ell \times m$ típusú mátrix a megfelelő bázisbontásban.

Az f parciális deriváltjai a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_i(x_1, \dots, x_j, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_\ell) - f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_\ell)}{t}$$

határértékek. Ha ezek léteznek, akkor a határértéket $\partial_j f_i$ jelöli, és az f függvényt parciálisan deriválhatónak nevezzük.

Ha $f(x) = Dx$ egy lineáris leképezés, akkor nyilván $\partial_j f_i$ a D leképezés mátrixa i-edik sorának j-edik eleme.

Fontos tudni, hogy a parciális deriváltak létéből még a folytonosság sem következik, és még a folytonosság mellett sem következik a parciális differenciálhatóságból a deriválhatóság. Ugyanakkor a deriválhatóságból következik a parciális differenciálhatóság, és ekkor a megfelelő bázisbontásban

$$D_{i,j} = \partial_j f_i$$

a derivált i-edik sorának j-edik eleme. Megfordítva, a deriválhatóság következik abból, ha a parciális deriváltak mind folytonosak, és ekkor a fenti képlet ugyancsak helyes [19, 9.21. tétel]. A parciális differenciálás nyilvánvaló, de nagyon fontos tulajdonsága, hogy a különböző indexű deriválások sorrendje szabadon felcserélhető.

F.7.3. Differenciálgeometriai alapismeretek

Ebben a részben felsoroljuk a könyvben használt *differenciálgeometriai* alapfogalmakat. Tesszük ezt pontos definíciók és bizonyítás nélküli tételek sorozatában, miközben igyekszünk értelmező megjegyzésekkel segíteni az olvasó dolgát.

F.7.4. Definíció. Az $\boldsymbol{r}\colon (a,b)(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvény grafikonját *egyszerű görbeívnek* nevezzük, ha $\boldsymbol{r}$ injektív, inverze folytonos, és $\dot{\boldsymbol{r}} \neq 0$. Az $\boldsymbol{r}$ függvény a hozzá tartozó görbe egy *paraméterezése.*

Egy ponthalmazt *differenciálható görbének* nevezünk, ha minden pontjának létezik olyan környezete, melyben az egyszerű görbeív.

Az olvasó egyszerű helyettesítéses integrálással igazolhatja, hogy az alábbi definíció helyes, vagyis az ívhossz független a paraméterezéstől.

F.7.5. Definíció. Egyszerű görbe t_1 és t_2 paraméterű pontjai közti *ívhosszán* az $\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|dt$ értéket értjük, ahol $\boldsymbol{r}$ a paraméterező függvény.

Egy görbét *rektifikálhatónak* nevezünk, ha a közelítő poligonok hosszának létezik szuprémuma. Ekkor a görbe hosszán ezt a szuprémumot értjük. Differenciálható görbe esetén ez megegyezik a fenti definíciónkban szereplő értékkel.

Az $s = \int_0^s |\dot{\boldsymbol{r}}(s)|ds$ összefüggést deriválva kapjuk, hogy ha $\boldsymbol{r}$ ívhossz szerint paraméterez, akkor $|\dot{\boldsymbol{r}}(s)| = 1$, ahol s az ívhossz.

F.7.6. Definíció. Az ívhossz szerint paraméterezett $\mathbf{r}$ görbe s paraméterű egységnyi *érintője* $\boldsymbol{t}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(s)$, a *görbületi vektora* $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$, a *görbülete* $\kappa(s) = |\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|$, és a *normálisa* $\boldsymbol{n}(s) = \ddot{\boldsymbol{r}}(s)/\kappa(s)$.

A definícióból adódó differenciálegyenlet megoldásával nyilvánvalóvá válik, hogy egy görbe akkor és csak akkor egyenesdarab, ha $\kappa \equiv 0$. Az $\langle \dot{\boldsymbol{r}}(s), \dot{\boldsymbol{r}}(s)\rangle \equiv 1$ azonosság deriválásából adódik, hogy $\ddot{\boldsymbol{r}}(s) \perp \dot{\boldsymbol{r}}(s)$, vagyis a görbületi vektor merőleges az érintőre.

F.7.7. Definíció. Az $\boldsymbol{r}\colon T(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$ leképezés képterét *elemi felületnek* hívjuk, ha T nyitott, összefüggő, $\boldsymbol{r}$ injektív, C^∞, inverze folytonos, és ha az $\mathbb{R}^2$ u, v-vel van koordinátázva, az $\partial_1 \boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ és $\partial_2 \boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ érintő vektorok minden pontban függetlenek.

Az $\boldsymbol{r}$ az elemi felület *paraméterezése*, inverze a koordinátázása, $\boldsymbol{r}\colon T$ a koordináta-környezete. Az $\boldsymbol{r}(., v)$ és $\boldsymbol{r}(u, .)$ görbéket a felület *paramétervonalainak* nevezzük.

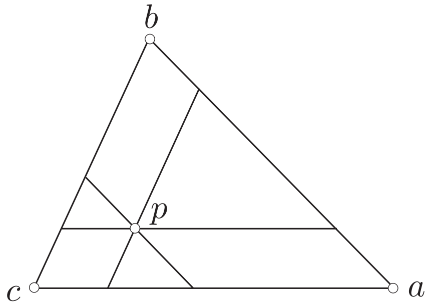
Differenciálható felületen, olyan térbeli ponthalmazt értünk, melynek minden pontja rendelkezik olyan gömbkörnyezettel, melyben a ponthalmaz elemi felület.

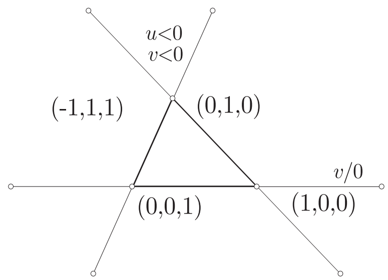
F.7.8. Definíció. A $\varphi\colon T' \to T$ $(T', T \subset \mathbb{R}^2)$ diffeomorfizmust, melyre $\det \varphi' \neq 0$ sehol sem, az $\boldsymbol{r}\colon T \to \mathbb{R}^3$ elemi felület *átparaméterezésének* nevezzük. A vele nyert új paraméterezés $\boldsymbol{r} \circ \varphi\colon T' \to \mathbb{R}^3$.

Az $\boldsymbol{r} \circ \varphi$ tényleg paraméterezés, amit az öszetett függvények deriválására vonatkozó láncszabály garantál. Ugyancsak ebből következik, hogy az átparaméterezés nem változtatja meg a paramétervonal érintőinek síkját (hisz abból lineáris kombinációként alakul ki az új), vagyis az F felület P pontjában a paramétervonalak érintői mindig ugyanazt a síkot feszítik, melyet *érintősíknak* nevezünk, és $T_P(F)$-fel jelölünk.

F.7.4. Baricentrikus koordinátázás

A háromszögek koordinátázásának legkényelmesebb eszköze a baricentrikus (súlyponti) koordinátázás. Tekintsünk egy $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ csúcsú háromszöget és egy negyedik $\boldsymbol{p}$ pontot az euklideszi síkon. Ekkor pontosan egy olyan u, v, w valós számhármas létezik, melyre $\boldsymbol{p} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + w\boldsymbol{c}$ és $u + v + w = 1$.





F.7.1. Ábra. A baricentrikus koordináta-rendszer elemei.

F.7.9. Definíció. A $\boldsymbol{p}$ pont $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ háromszögre vonatkozó *baricentrikus koordinátáján* az $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ valós számhármast értjük. Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ háromszöget a baricentrikus koordinátarendszer *referencia-háromszögének* nevezzük.

Két pont különbségeként előálló vektorok baricentrikus koordinátájára persze $d + e + f = 0$. Ezeket *baricentrikus iránynak*, vagy *baricentrikus vektornak* nevezzük.

Mivel a baricentrikus koordináták egyértelműen meghatározzák a pontot, többnyire azonosítani fogjuk a $\boldsymbol{p}$ pontot az $\boldsymbol{u}$ koordinátával. Jegyezzük meg még, hogy a baricentrikus koordinátázás affin invariáns, vagyis nem változik a párhuzamost tartó transzformációk hatására.

A baricentrikus koordináták használatával viszonylag egyszerűen definiálhatjuk az iránymenti deriváltak fogalmát. Legyen $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ két baricentrikus koordináta,

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ egy baricentrikus irány. Az $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ felület $\boldsymbol{d}$ irány szerinti deriváltja az $\boldsymbol{u}$ pontban:

$$D_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = d\partial_1\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) + e\partial_2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) + f\partial_3\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}).$$

Ennek az a geometriai tartalma, hogy az $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}+t\boldsymbol{d}$ egyenesen értelmezett $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}(t))$ térgörbének, mely az $\boldsymbol{x}$ felület része, milyen irányú lesz az érintője. Indexvektor segítségével tömörebben is felírhatjuk:

$$D_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \sum_{|\underline{\mathrm{i}}|=1} \partial_{\underline{\mathrm{i}}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})B^1_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{d}).$$

Meg kell jegyeznünk, hogy $B^1_{\underline{\mathrm{i}}}(\boldsymbol{d})$ annak ellenére jól definiált, hogy $d + e + f = 0$.

Analóg módon írhatjuk fel a magasabb rendű deriváltakat is:

$$D^r_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \sum_{|\underline{\mathrm{j}}|=r} \partial_{\underline{\mathrm{j}}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})B^r_{\underline{\mathrm{j}}}(\boldsymbol{d}),$$

ahol $B^r_{\underline{\mathrm{j}}}$ a baricentrikus Bernstein-polinom. Példaként az $r = 2$ eset:

$$D^2_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u^2}d^2 + 2\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u\partial v}de + 2\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u\partial w}df + \frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial v^2}e^2 + 2\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial v\partial w}ef + \frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial w^2}f^2.$$

Irodalomjegyzék

[1] W. Böhm, G. Farin and J. Kahmann, A survey of curve and surface methods in CAGD, *CAGD*, **1** (1984), 1–60.

[2] A. Cole, *Perspektíva, Szemtanú művészet*, Park Könyvkiadó, Budapest, 1993.

[3] H. S. M. Coxeter, *Projektív geometria*, Gondolat, Budapest, 1986.

[4] G. Farin, *Curves and surfaces for CAGD*, Arizona State University, Arizona, 1988.

[5] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide*, Academic Press, London, 1990.

[6] Hajós Gy., *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[7] Horvay K. és Reiman I., *Projektív geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[8] J. Hoschek, D. Lasser and A. K. Peters, *Foundation of Computer Aided Geometric Design*, Wellesley, Massachusetts, 1993.

[9] Kárteszi F., *Ábrázoló geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1957.

[10] A. G. Kuros, *Felsőbb algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[11] Kurusa Á., *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon Jegyzettár **11**, Polygon, Szeged, 1999.

[12] Kurusa Á. és Szemők Á., *A számítógépes ábrázoló geometria alapjai*, Polygon Jegyzettár **13**, Polygon, Szeged, 1999.

[13] G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, Toronto Press, Toronto, 1953.

[14] Lőrincz P. and Petrich G., *Ábrázoló geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[15] Móricz F., *Numerikus analízis I.*, JATE Jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[16] Móricz F., *Numerikus analízis II.*, JATE Jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[17] Nagy G., *Kiegészítések .... könyvéhez*, segédanyag, 2005; `http://www.math.u-szeged.hu/~nagyg/Oktatas/PDF/ksz_kiegeszit.pdf`.

[18] L. Ramshaw, *Beziers and B-splines as Multiaffine Maps, Theoretical Foundation of Computer Graphics and CAD*, Nato ASI Series Vol. F40, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1988.

[19] W. Rudin, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[20] H.-P. Seidel, A New Multiaffine Approach to B-Splines, *WSI Research Reports*, **5** (1988).

Jelölések és konvenciók

- $\cdot$ és $\langle .,. \rangle$ – skaláris szorzás
- $\mathbb{R}$ – valós számok
- **vektor** – vektorok félkövér betűvel
- $\underline{\text{index}}$ – indexvektorok aláhúzott egyenes betűvel
- $\circ$ – függvényösszetétel
- ∂_i – az i-edik változó szerinti parciális deriválás
- $\boldsymbol{t}$ – görbe egységnyi érintője
- $\boldsymbol{n}$ – görbe normálisa
- $\boldsymbol{B}$ – Bézier-görbe
- B_i^n – az i-edik n-fokú Bernstein-polinom
- N_i^k – az i-edik k-fokú B-szplájnpolinom
- κ – görbület
- τ – görbe torziója
- $\overset{i}{\ldots}$ – a sorból egyedül az i indexű elem hiányzik
- S_n – az n-rendű permutációk szimmetrikus csoportja
- $\delta_{i,j}$ – a Kronecker-delta, mely 1, ha $i = j$, és 0, ha $i \neq j$

Konvenciók

A $\mathfrak{i} = (j, k, l)$ indexvektor jelölés értelmezése alapján $\boldsymbol{p}_\mathfrak{i}$ jelentése egyszerűen $\boldsymbol{p}_{j,k,l}$. Használjuk az $|\mathfrak{i}| = j + k + l$ jelölést és az $\mathfrak{x} = (1, 0, 0)$, $\mathfrak{y} = (0, 1, 0)$, $\mathfrak{z} = (0, 0, 1)$ konstans indexvektorokat, valamint az $\mathfrak{i} = j\mathfrak{x} + k\mathfrak{y} + l\mathfrak{z}$ írásmódot, ahol a skalárral való szorzást és az összeadást a vektoroknál megszokott módon értelmezzük.

A B-szplájn csomópontvektoráról gyakran feltesszük, hogy első k darab és az utolsó k darab eleme megegyezik, és $m = n + k$, azaz $t_0 = t_1 = \ldots = t_{k-1}$, és $t_{n+1} = t_{n+2} = \ldots = t_{n+k}$.

Minden képletet szigorúan balról jobbra olvasunk, és az első értelmezhető részt azonnal értelmezzük. Az operátorok minden más műveletnél előbb hajtandók végre, $\partial_i f^2$ megegyezik a $(\partial_i f)^2$ formulával, de $\partial f + g$ és $\partial(f + g)$ nem egyezik meg.

Amikor ez nem okozhat félreértést, ugyanazon a néven jelöljük egy függvény két paraméterezését. Más szóval az $f(x)$ az $f(x(t))$ jelölés rövidítése is lehet, amennyiben az $x(t)$ függvényt a szövegkörnyezet meghatározza.

Amikor ez nem okozhat félreértést, a függvényegyenleteknél az azonos paramétereket elhagyjuk. Más szóval az $f(x) = g(x)$ egyenletet az $f = g$ jelöléssel rövidítjük, azzal, hogy ilyenkor a paramétereket mindig a szövegkörnyezet által meghatározott azonos pontban vesszük.

Görög betűk

név	kisbetű	nagybetű	verzió	név	kisbetű	nagybetű	verzió
alfa	α			nű	ν		
béta	β			kszí	ξ	Ξ	
gamma	γ	Γ		pí	π	Π	ϖ
delta	δ	Δ		ró	ρ		ϱ
epsilon	ϵ		ε	szigma	σ	Σ	ς
zéta	ζ			tau	τ		
éta	η			üpszilon	υ	Υ	
theta	θ	Θ	ϑ	fí	ϕ	Φ	φ
iota	ι			chi	χ		
kappa	κ		$\varkappa$	pszí	ψ	Ψ	
lambda	λ	Λ		omega	ω	Ω	
mű	μ						

Gótikus betűk

név	kisbetű	nagybetű	név	kisbetű	nagybetű
a	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{A}$	n	$\mathfrak{n}$	$\mathfrak{N}$
b	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{B}$	o	$\mathfrak{o}$	$\mathfrak{O}$
c	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{C}$	p	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{P}$
d	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{D}$	q	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{Q}$
e	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{E}$	r	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{R}$
f	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{F}$	s	$\mathfrak{s}$	$\mathfrak{S}$
g	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{G}$	t	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{T}$
h	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{H}$	u	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{U}$
i	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{I}$	v	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{V}$
j	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{J}$	w	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{W}$
k	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{K}$	x	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{X}$
l	$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{L}$	y	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{Y}$
m	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{M}$	z	$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{Z}$

Héber betűk

név	betű
alef	$\aleph$

Név- és tárgymutató

A

affin leképezés, 92
alapsík, 2
átparaméterezés, 114
axonometria, 13
  alaptétele, 16

B

baricentrikus
  Bernstein-polinom, 97
  irány, 114
  koordináták, 114
  vektor, 114
beforgatás
  Monge-féle ∼, 25
  perspektivikus ∼, 2
Bernstein-polinom, 97
Bézier-, 37
  ∼poligon, 39
  ∼pontok, 39
  ∼görbe, 39
    felosztása, 44
    polárformája, 47
    rangja, 39
    rangemelése, 43
  ∼háló, 77
  ∼háromszögfelület, 72
  ∼négyszögfelület, 78
bilineáris interpoláció, 77
bilineáris interpolált, 77
Boehm csomópontbeszúrási tétele, 64
Boehm-tétel, 108
B-szplájnfelület, 80
B-szplájnfüggvény, 103
B-szplájngörbe, 61

C

ciklográfia, 9
csomógörbe, 81
csomópont
  összetett Bézier-görbéké, 53
  B-szplájné, 61
  négyszögfelületé, 81
  B-szplájnfüggvényé, 103
  ∼vektor B-szplájnfüggvényé, 103
  ∼vektor B-szplájné, 61
  ∼beszúrás, 64

D

de Boor-
  ∼algoritmus, 63
  ∼poligon, 61
  ∼pont, 61
  ∼-Cox-rekurzió, 62
de Casteljau-, 37
  ∼algoritmus, 69, 78
  ∼ ∼ háromszögfelületé, 72
  ∼ ∼ négyszögfelületé, 78
  ∼eljárás Béziergörbékre, 39

de Casteljau-pont
Bézier-görbéké, 39
háromszögfelületé, 72
négyszögfelületé, 78
Desargues-tétel, 87
diagonális, 94
∼an domináns, 110
∼ ∼ mátrixok tétele, 111
differenciák, 45
differenciálható felület, 113
differenciálható görbe, 113
distanciakör, 9

E
Eckhart-féle eljárás, 15
egyszerű görbeív, 113
elemi felület, 113
érintő, 113
∼sík, 114

F
főhomloksík, 2

G
Gauss tétele, 18
gömbi szög, 29
görbület, 113
∼i vektor, 113

H
harmonikus négyes, 88
hiperbolikus paraboloid, 77
homogén koordináta, 86

I
ideális egyenes, 85
ideális pont, 85
indexvektor, 72, 96
inverzió gömbre, 31
ívhossz, 113

K
képközéppont, 2
képsík
nyompárosé, 13
perspektívé, 2
∼tengely, 2
kettősviszony, 87
koincidenciasík, 22
kontrollháló, 72, 77
kontrollpoligon, 39, 68
kontrollpont, 39, 61, 68, 77
kontúregyenes, 22
kontúrsík, 22
köbös összetett Bézier-görbe, 54
köztes pontok, 54
kvadratikus összetett Bézier-görbe, 54

L
Lagrange-görbe, 35
látóhatár, 2
lokalitás, 44

M
másodrendű görbe, 88
mérőszámos vetítőrendszer, 11
metrikus alapszerkesztés, 25
Möbius-rács, 4
Monge-féle
alapszerkesztések, 24
nyom, 22
transzformáció, 26
szerkesztése, 26
vetítőrendszer, 21
multiaffin leképezés, 92

N

normális, 113
NURBS, 80
nyompáros vetítőrendszer, 8
nyom, 8
  ~háromszög, 13
  ~képvonal, 9
  ~pont, 8
  ~vektor, 9
  ~vonal, 8

O

osztópont, 45
osztott görbe, 45
osztott kontrollpoligon, 45

Ö

összetett Bézier-görbe, 53
  köbös ~, 54
  kvadratikus ~, 54
összetett Bézier-négyszögfelület, 80

P

Pappos-tétel, 87
parabola 3-érintő tétele, 37
paraméterezés, 113, 113
paramétervonal, 113
perspektív
  egyenesre nézve ~, 87
  pontra nézve ~, 87
perspektivikus vetítőrendszer, 2
perspektiv kép, 2
perspektivitás
  alaptétele, 3
  centruma, 87
  tengelye, 87
Pohlke-tétel, 16
  ~ variáns, 19
polárforma, 94
polinomiális görbe, 41
projektív sík, 85
projektív transzformáció, 88

R

racionális Bézier-görbe, 68
  kontrollsúlya, 68
referencia-háromszög, 114
rektifikálható görbe, 113
rendezőegyenes, 22
rotáció, 25
  szerkesztése, 26
rövidülés, 14

SZ

szempont, 2
szemsík, 2
szimmetriasík, 22
szimmetrikus, 92
szplájnfelület, 80
sztereografikus projekció, 29
szűkülés, 101

T

tárgysík, 2
tenzorszorzatfelület, 78
töréspont, 53, 81

U

uniform B-szplájn, 103

V

Vandermonde-mátrix, 111
virágzási alapelv, 94
vizuális folytonosság, 54

X

$x_{1,2}$-egyenes, 21

Újak

Még nem besorolt mutatók

Tennivalók listája