

Matematikai tomográfia

Habilitációs tézisek

Kurusa Árpád

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

A címben szereplő felfogásban a matematikai tomográfia nem más, mint a Radon-transzformáció, a modern integrálgeometria, a geometriai analízis, az analitikus tomográfia és a geometriai tomográfia bizonyos szempontok alapján jól elkülönülő, más szempontok alapján nagyon is átfedő témaköreinek közös megnevezése.

Ebben a dolgozatban a szerző ezen területre eső néhány kedvenc eredménye, és az azok megértéséhez szükséges matematikai háttér minimalista leírása szerepel.

Szeged
2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	1
2. A Radon-transzformáció képtere	5
3. Radon-transzformáció Riemann-sokaságokon	9
4. Általánosított Radon-transzformációkról	13
5. Takarási szám	17
Hivatkozások	20

1. Bevezető



Talán éppen 1895-ben, amikor *Wilhelm Conrad Röntgen* felfedezte a *Röntgen-sugárzást*¹, kaphatta meg *Otto Zoll* doktorandusz *David Hilbert* kérdését, hogy van-e az S^2 gömbfelületen olyan nem gömbi metrika, amelynek minden geodetikusa zárt és egyforma hosszú. Zoll pozitív választ² tartalmazó disszertációja éppen abban az 1901-es évben készült el, amikor a Röntgen-sugárzás felfedezéséért Röntgen megkapta a világ első *fizikai Nobel-díját*.



Hilbert egy másik doktorandusza, az osztrák *Paul Georg Funk* 1911-es disszertációjában azt mutatta meg [18], hogy ha a gömbi ds metrika $e^{\varrho_t} ds$ ($\varrho_t \in C^\infty(S^2)$) deformációja³ minden t esetén *Zoll-metrika*, akkor $\frac{d\varrho_t}{dt}|_0$ páratlan függvény⁴, vagyis $\frac{d\varrho_t}{dt}(x)|_0 = -\frac{d\varrho_t}{dt}(-x)|_0$.



Hilbert tanácsára Funk megismerte *Hermann Minkowski* egy jóval korábbi cikkét [55], amelyről kiderült, hogy Funk megoldása döntő lépésének egy speciális esetét már tartalmazza. Ezt a lépést ma *Funk-transzformációnak* nevezzük.⁵

Az F Funk-transzformáció az n -dimenziós⁶ $\mathbb{R}^n$ tér egységsugarú $\mathcal{B}^n$ gömbjének S^{n-1} felületén értelmezett folytonos $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez azt az $Ff: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt rendeli, amelyre

$$Ff(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{u}^\perp \cap S^{n-1}} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

ahol $\mathbf{u}^\perp$ az $\mathbf{u}$ egységvektor ortogonális komplementere az $\mathbb{R}^n$ térben, $d\mathbf{v}$ pedig az $(n-2)$ -dimenziós $\mathbf{u}^\perp \cap S^{n-1}$ gömbfelületen a természetes felszínmérték.

1.1. Funk-tétel. *Az F Funk-transzformáció magja a páratlan függvények tere.*



Ha ezt tekintjük a modern integrálgeometria első lépésének, akkor a második lépésnek a szintén osztrák *Johann Radon* azon 1917-es munkáját kell tekintenünk, amelyben 2-dimenzióban, majd egy bizonyos általánosítás után 3-dimenzióban is invertálta [60] a Funk-transzformáció — ma már *Radon-transzformációnak* nevezett — analógját.

A d -dimenziós Radon-transzformáció az $S(\mathbb{R}^n)$ *Schwartz-féle függvénytér*⁷ egy

¹Ezt a világ nagyobbik része X-sugárzásnak hívja.

²Nem gömbi, de forgásinvariáns metrikák [74].

³Minden 2-dimenziós Riemann-metrikához van *izotermikus koordinátakörnyezet*.

⁴Minden páratlan ρ függvényhez van olyan Zoll-féle ϱ_t , amelyre $\frac{d\varrho_t}{dt}|_0 = \rho$. Lásd [30].

⁵A jelzett történetre tekintettel sokan Funk–Minkowski- vagy Minkowski–Funk-transzformációról beszélnek.

⁶Funk maga csak az $n = 3$ esetet vizsgálta, nálunk $n \in \mathbb{N}$ természetes szám.

⁷Ezt a végtelenszer differenciálható függvények $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ terének azon elemei alkotják, amelyek minden rendű deriváltjukkal együtt minden polinomnál gyorsabban tartanak 0-hoz a végtelenben.

f függvényéhez azt az $R_{d,n}f: \mathbb{G}^{d,n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt rendeli, amelyre

$$R_{d,n}f(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

ahol $\mathcal{G}$ a d -dimenziós affin alterek $\mathbb{G}^{d,n}$ *affin Grassmann-sokaságának* egy eleme, $d\mathbf{x}$ pedig a d -dimenziós természetes mozgásinvariáns (felszín) mérték a $\mathcal{G}$ affin altéren. A jobb átláthatóság érdekében az $(n-1)$ -dimenziós Radon-transzformációt, amelyet sokszor csak *Radon-transzformációnak* neveznek, röviden $R = R_{n-1,n}$, az 1-dimenziós Radon-transzformációt, amelyet *Röntgen-transzformációnak* hívunk⁸, röviden $X := R_{1,n}$ jelöli.

1.2. Radon-tétel⁹. ([60],[48]) *A Radon-transzformáció injektív, és*

$$f(\mathbf{x}) = 2^{-n} \pi^{1-n} (-L_{\mathbf{x}})^{\frac{n-1}{2}} \left(\int_{S^{n-1}} Rf(\mathcal{G}(\mathbf{u}, \mathbf{x})) \, d\mathbf{u} \right), \quad (1.2)$$

ahol $d\mathbf{u}$ az S^{n-1} mozgásinvariáns (felszín) mértéke, $\mathcal{G}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ az a hipersík, amelynek normálisa az $\mathbf{u}$ egységvektor, és átmegy az $\mathbf{x}$ ponton, $L_{\mathbf{x}} = \text{div} \circ \text{grad}$ pedig a *Laplace-operátor* az $\mathbb{R}^n$ téren.

Fontos felfedezést tett 1931-ben *Gustav Herglotz*, aki észre vette [45], hogy (1.2) jól alkalmazható parciális differenciálegyenletek megoldására, mert a „szabályosabb” [72] parciális differenciálegyenletek megoldásait egyváltozós differenciálegyenletek megoldásaiból lehet vele előállítani [41, I.7.b].

Jelentős eredményt bizonyított 1938-ban *Fritz John* [49], amely szerint a ma már *John-egyenletnek* nevezett ultrahiperbolikus

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_3^2 - \partial_4^2)F = 0 \quad (1.3)$$

differenciálegyenlet megoldástere a *Plücker-koordinátákon* keresztül éppen a d -dimenziós Radon-transzformáció képtere.

Aztán az új¹⁰ *integrálgeometria* elméletének kiépülése az 1960-as években, majd robbanásszerű fejlődése a 70-es évektől kezdve nagyon sok új eredményt és kérdést hozott felszínre.

Az alkalmazások irányából nem lehet említés nélkül hagyni *Allan McLeod Cormack* 1963-ban és 1964-ben megjelent munkáit [11], amelyek az orvosi diagnosztika tudományát teljesen megújító *komputertomográfia* kialakulásához vezettek. Az alkalmazás és a hozzá szükséges matematika súlyát is jól mutatja, hogy ez a kutatás 1979-ben Cormack-nak *Sir Godfrey Newbold Hounsfield*-del megosztott *orvosi Nobel-díjat* hozott.

⁸A nemzetközi szóhasználat szerint ez az X -sugár-transzformáció, amely a síkon megegyezik a Radon-transzformációval.

⁹Radon maga csak az $n = 2, 3$ eseteket vizsgálta, nálunk $n \in \mathbb{N}$ természetes szám.

¹⁰*Morgan Crofton* és társai már dolgoztak [14] egy akkor *geometriaival valószínűségnek*, később integrálgeometriának, ma már sokszor klasszikus integrálgeometriának mondott területen.

Az elmélet oldalán az 1960-as években elindult szisztematikus kutatások közül meg kell említeni a ma már klasszikusnak mondható módszereket és eredményeket létrehozó *Sigurdur Helgason* [33, 34, 36], *Israel Moiseevich Gelfand* [22, 23] és D. Ludwig [51] munkáit. A vizsgált Radon-transzformációk általános elméletének kidolgozására is történtek lépések: Helgason 1966-ban [35] bemutatott egy csoportelméleti *dupla fibrációs* modellt, majd 1969-ben Gelfand és társai is kidolgoztak [24] egy még általánosabb, a mértékek kompatibilitására épülő *dupla fibrációs* modellt. Ezek mind a mai napig inkább keretként szolgálnak, hiszen már a csoportelméleti modellről is „kétséges, hogy képes lenne az individuális eredményeket egy közös elméletben megfogalmazni” [44, 71. oldal legalsó bekezdése].

Később olyan Radon-transzformációk kutatása is megkezdődött — talán az addigra nyilvánvaló gyakorlati alkalmazhatóság miatt is —, melyek már nem mozgásinvariáns mértékekre épültek. Az $R_{d,n}^\mu$ *általánosított Radon-transzformáció*, amelyet $d = n - 1$ esetén egyszerűen R^μ jelöl, az $S(\mathbb{R}^n)$ tér¹¹ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényéhez azt az $R_{d,n}^\mu f: \mathbb{G}^{d,n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt rendeli, amelyre

$$R_{d,n}^\mu f(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} f(\mathbf{x}) \mu_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.4)$$

ahol $\mathcal{G} \in \mathbb{G}^{d,n}$, $\mu: \mathbb{G}^{d,n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy „kellően szabályos”¹² *súlyfüggvény*. Az ilyen transzformációk vizsgálatának területe *Andrew Markoe* [53] könyve óta az *analitikus tomográfia* nevet viseli.

A vizsgált függvények halmazát a konvex tartományok indikátorfüggvényeire szűkítve jelentősen változnak a vizsgálathoz szükséges módszerek. Az f integrálható függvény *d-dimenziós párhuzamos Röntgen-képének* nevezzük az $R_{d,n}^{\mathcal{G}} f: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt, ahol $\mathcal{G} \in \mathbb{G}_{n-d,n}$ valamely $(n - d)$ -dimenziós altér, és $R_{d,n}^{\mathcal{G}} f(\mathbf{x}) = R_{d,n} f(\mathbf{x} + \mathcal{G}^\perp)$, ahol $\mathcal{G}^\perp \in \mathbb{G}_{d,n}$ a $\mathcal{G}$ ortogonális komplementer altére. Bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pontra az f integrálható függvény *d-dimenziós divergens Röntgen-képeinek* nevezzük az $R_{d,n}^{\mathbf{x}} f: \mathbb{G}_{d,n} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt, amelyre minden $\mathcal{G} \in \mathbb{G}_{d,n}$ esetén $R_{d,n}^{\mathbf{x}} f(\mathcal{G}) = R_{d,n} f(\mathbf{x} + \mathcal{G})$. A klasszikus integrálgeometriában már korábban is vizsgáltak ehhez kapcsolódó konvex geometriai problémákat [5, 6], de nagyon motiválónak bizonyult *P. C. Hammer* 1961-ben feltett újszerű kérdése¹³ [32], hogy mennyi 1-dimenziós Röntgen-kép kell egy konvex síktartomány beazonosításához¹⁴. Az ilyen kérdésekkel foglalkozó terület *Richard J. Gardner* [20] könyve óta a *geometriai tomográfia* nevet viseli.

¹¹Persze más függvényterek is alkalmazásra kerülhetnek.

¹²Egy külön fejezetet is elfoglalhatna, hogy milyen „anomáliák” léphetnek fel bizonyos esetekben.

¹³A *Steiner-szimmetrizáció* kapcsán Giering [25] már korábban is tett ebbe az irányba lépéseket.

¹⁴Párhuzamos kép esetében négy jól választott irány kell és elég is [19]. A divergens kép esete még nyitott, mert bár tudjuk, hogy négy elég [73], de gyakran kettő is elegendő [16].

Szintén ide tartozó, de megint csak alapvetően más módszereket igénylő kérdést tett fel a klasszikus integrálgeometria *Crofton formulája* kapcsán *Hugo Steinhaus* 1954-ban [68]: meghatározható egy rektifikálható síkgörbe az egyenesekkel vett metszésszámai alapján? Ha az egyeneseken a $\#$ *számláló mértéket* alkalmazzuk, akkor Steinhaus-nak ez a kérdése a $\mathbb{C} := \mathbb{R}_{1,2}^\#$ *Crofton-transzformáció* [17] invertálhatóságát célozza a sík 1-dimenziós pontalmazainak indikátorain¹⁵.

A fentiektől teljesen eltérő jellegű¹⁶ kérdések is az integrálgeometria részét képezik. Erre itt csak kettő, bizonyos értelemben megoldott, de mindenképpen szép példa következik: (1) Egy „legendően szabályos határú” $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-tartományra azt mondjuk, hogy *Pompeiu-tulajdonságú*, ha van olyan folytonos, nem triviális $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek minden $\Phi(\mathcal{D})$ tartományon eltűnik az integrálja minden Φ mozgás (vagy izometria stb.) esetén. Még 1929-ben *Dimitrie Pompeiu* tette fel a kérdést [70], hogy milyenek a Pompeiu-tulajdonságú tartományok. Azt sejtette, hogy csak a körlap ilyen, de a *Pompeiu-problémára* máig nincs teljes megoldás, habár azt tudjuk, egy valódi „sarokkal” rendelkező konvex test biztosan nem Pompeiu-tulajdonságú [9]; (2) Egy konvex test (kompakt konvex halmaz belső ponttal) kovariogrammján azt a valós függvényt értjük, amely megadja minden eltoláshoz az eredeti és az eltoló test metszetének térfogatát. *Georges Matheron* vette fel 1986-ban a kérdést [54], hogy a kovariogram meghatározza-e a testet. Matheron sejtésének megfelelően már tudjuk, hogy a síkban a kovariogram meghatározza a testet [2]. Magasabb dimenzióban azonban ez csak a testek sokkal szűkebb halmazára teljesül [4].

Habár a modern integrálgeometria önmagában is érdekes és értékes terület, íme egy személyes ízlés szerint válogatott, hivatkozásokkal ellátott lista néhány kiemelkedően szép alkalmazásáról: mozgásinvariáns differenciálegyenletek megoldása szimmetrikus tereken [37, 38], az összes projektív metrika előállítás [69], John-egyenlet a Yang—Mills-elméletben [3, p. 79], izospektrál szimmetrikus Riemann-sokaságok merevsége [21] és *Rényi Alfréd* egy gondolata a *Tarski-féle lefedési problémával* kapcsolatban [61].

Befejezésésképpen pedig csak utalunk a mind a mai napig rendkívül lendületesen, sokrétűen és szerteágazóan fejlődő elmélet néhány, egy-egy területen meghatározó könyvére: Gelfand modern integrálgeometriáról [22, 23], Helgason sokaságok Radon-transzformációiról és differenciálegyenleteiről [42–44], Gardner geometriai tomográfiáról [20], Markoe analitikus tomográfiáról [53], Kuchment komputertomográfiáról [50], és így tovább [58, 64].

¹⁵Crofton klasszikus eredménye [14, 75. bekezdés a 786. oldalon], vagyis a metszési formula [56, Theorem 3.16 a 31. oldalon] szerint $\mathbb{C}$ átlaga éppen a görbe hosszát adja.

¹⁶Nem alacsonyabb, hanem azonos dimenziós objektumokon történik integrálás.

2. A Radon-transzformáció képtere

A fő eredmények érthető ismertetéséhez előbb néhány klasszikus eredményről kell szót ejteni. Ezekhez szükséges az

$$S^{n-1} \times \mathbb{R} \ni (\omega, r) \mapsto \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \omega \rangle = r\} =: \mathcal{G}(\omega, r) \in \mathbb{G}^{n-1, n}$$

kétszeres — hiszen $\mathcal{G}(\omega, r) = \mathcal{G}(-\omega, -r)$ — fedőleképezés, amelynek segítségével minden $F: \mathbb{G}^{n-1, n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt azonosítunk az $\tilde{F}: S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel, amelyre $\tilde{F}(\omega, r) = \tilde{F}(-\omega, -r) = F(\mathcal{G}(\omega, r))$. Ennek értelmében az R Radon-transzformáció (1.1) definíciója az

$$Rf(\omega, r) = \int_{\langle \mathbf{x}, \omega \rangle = r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

formát ölti, ahol $d\mathbf{x}$ a mozgásinvariáns (felszín) mérték a $\mathcal{G}(\omega, r)$ hipersíkon. Azonnal látszik, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$\int_{\mathbb{R}} Rf(\omega, r) r^k dr = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \langle \mathbf{y}, \omega \rangle^k d\mathbf{y} \quad (2.2)$$

az ω koordinátában k -homogén polinom. Másfelől az 1- és n -dimenziós Fourier-transzformációt is a $\hat{\cdot}$ szimbóllummal jelölve

$$\widehat{Rf}(s\omega) := \int_{\mathbb{R}} Rf(\omega, r) e^{-isr} dr = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) e^{-is\langle \mathbf{y}, \omega \rangle} d\mathbf{y} = \hat{f}(s\omega) \quad (2.3)$$

adódik¹⁷. Minthogy a Schwartz-tétel [15, 140. oldal] szerint a Fourier-transzformáció a Schwartz-tér bijektív transzformációja, azt látjuk, hogy a Radon-transzformáció az $S(\mathbb{R}^n)$ teret az $S(\mathbb{G}^{n-1, n})$ tér azon $S_H(\mathbb{G}^{n-1, n})$ alterébe képezi, amelyben lévő F függvényekre

$$\int_{\mathbb{R}} F(\omega, r) r^k dr \text{ az } \omega \text{ koordinátában } k\text{-homogén polinom}^{18} \quad (2.4)$$

minden $k \in \mathbb{N}$ esetén.

2.1. Helgason-féle Swartz-tétel. ([41, Theorem 2.4])

Az R Radon-transzformáció folytonos $S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S_H(\mathbb{G}^{n-1, n})$ bijekció.¹⁹

¹⁷Ezt sokan *Fourier-, vagy centrális/központi szelet-tételnek* nevezik.

¹⁸Ezt *momentum-feltételnek* nevezzük.

¹⁹A bizonyításban az n -dimenziós Fourier-transzformáció inverzét használva a (2.3) egyenletre azt kell igazolni, hogy a jobb oldalon adódó függvény az origóban is sima. Ehhez szükség van a függvény erős nullához tartására: van olyan nem triviális $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ függvény, amelynek minden egyenesen nulla az integrálja! Lásd [1] vagy [44, Theorem 3.6].

Világos, hogy ha az $f \in S(\mathbb{R}^n)$ függvény eltűnik valamely $\varrho \in \mathbb{R}_+$ sugarú $\varrho\mathcal{B}^n$ gömbön kívüli minden pontban, akkor $Rf(\omega, r)$ is eltűnik minden $r > \varrho$ értékre. Ennek fordítottja is igaz.

2.2. Helgason-féle tartótétel. ([44, Theorem 2.6]) *Ha az $f \in C(\mathbb{R}^n)$ függvény olyan, hogy $f(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^k$ minden²⁰ $k \in \mathbb{N}$ esetén korlátos, és Rf eltűnik valamely $\mathcal{B}$ gömböt nem metsző hipersíkokon, akkor az f függvény eltűnik a $\mathcal{B}$ gömbön kívül.*

Ezt a Helgason-féle Swartz-tétellel összevetve újabb képtérleírást kapunk. Legyen $\mathcal{K}$ egy konvex test, $S^\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) = \{f \in S(\mathbb{R}^n) : f(\mathbf{x}) = 0 \text{ ha } \mathbf{x} \notin \mathcal{K}\}$ és $S_H^\mathcal{K}(\mathbb{G}^{n-1,n}) = \{f \in S_H(\mathbb{G}^{n-1,n}) : f(\omega, r) = 0 \text{ ha } \mathcal{G}(\omega, r) \cap \mathcal{K} = \emptyset\}$.

2.3. Helgason-féle Paley–Wiener-tétel²¹. ([41, Theorem 2.10]) *Bármely $\mathcal{K}$ konvex test esetén $R: S^\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow S_H^\mathcal{K}(\mathbb{G}^{n-1,n})$ bijektív.*

A továbbiakban $n > 2$, a $d \in \mathbb{N}$ természetes számra pedig $0 < d < n - 1$.

Az d -dimenziós Radon-transzformáció jelentősen eltér a fentiekben bemutatott $((n-1)$ -dimenziós) Radon-transzformációtól, amelynek nyilvánvaló jele, hogy $\mathbb{G}^{d,n} \cong ISO(n)/(ISO(d) \times O(n-d))$ ²² miatt $\dim \mathbb{R}^n = n < (d+1)(n-d) = \dim \mathbb{G}^{d,n}$, amiért a d -dimenziós Radon-transzformáció esetében $R_{d,n}(S(\mathbb{R}^n))$ sokkal szűkebb kell legyen, mint $S(\mathbb{G}^{d,n})$.

Tekintsünk egy $f \in D(\mathbb{R}^n)$ függvényt²³, legyen $\mathcal{G} \in \mathbb{G}^{d,n}$, ennek ortogonális komplementer altere pedig $\mathcal{G}^\perp \in \mathbb{G}_{n-d,n}$. Ekkor minden $\omega \in \mathcal{G}^\perp$ esetén

$$p_{\mathcal{G}^\perp, k}(\omega) := \int_{\mathcal{G}^\perp} R_{d,n}f(\mathcal{G} + \mathbf{y})\langle \omega, \mathbf{y} \rangle^k d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z})\langle \omega, \mathbf{z} \rangle^k d\mathbf{z} =: p_k(\omega), \quad (2.5)$$

ahol p_k nyilván az $\omega \in \mathbb{R}^n$ egy k -rendben homogén polinomja, $p_{\mathcal{G}^\perp, k}$ pedig ennek megszorítása a $\mathcal{G}^\perp$ altérre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Jelölje $D(\mathbb{G}^{d,n})$ a $C^\infty(\mathbb{G}^{d,n})$ kompakt tartójú elemeinek terét. Legyen $D_H(\mathbb{G}^{d,n})$ az olyan $F \in D(\mathbb{G}^{d,n})$ függvények tere, amelyekre²⁴ minden $k \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén létezik olyan k -rendben homogén $p_{F,k}$ polinom, amelyre

$$\int_{\mathcal{G}^\perp} F(\mathcal{G} + \mathbf{y})\langle \omega, \mathbf{y} \rangle^k d\mathbf{y} = p_{F,k}|_{\mathcal{G}^\perp} \quad (2.6)$$

a $p_{F,k}$ megszorítása a $\mathcal{G}^\perp$ térre.

²⁰Mind kell, mert az $f(x, y) = (x + y)^{-5}$ integrálja minden egységkörön kívüli egyenesen nulla.

²¹Ez a [41, Theorem 2.10] némi pontosítása az erősebb [41, Theorem 2.6] állítás alkalmazásával.

²² $ISO(n)$ az $\mathbb{R}^n$ izometriáinak csoportja, $O(n)$ pedig az ortogonális csoport.

²³ $D(\mathbb{R}^n)$ a kompakt tartójú, végtelenszer differenciálható függvények tere.

²⁴Ez a (Helgason-féle) momentum-feltétel a d -dimenziós Radon-transzformációra.

2.4. Helgason-féle képtértétel²⁵. ([44, Theorem 6.3]) Az $R_{d,n}: D(\mathbb{R}^n) \rightarrow D_H(\mathbb{G}^{d,n})$ transzformáció bijektív.

Jegyezzük meg, hogy $R_{d,n}(S(\mathbb{R}^n))$ szűkebb az $S_H(\mathbb{G}^{d,n})$ térnél [27].

Legyen $\mathcal{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) \in \mathbb{G}^{d,n}$ minden általános helyzetű $(d+1)$ pontból álló $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^n$ pontrendszer esetén az azt tartalmazó egyértelmű d -dimenziós affin altér. Ezzel a paraméterezéssel a d -dimenziós Radon-transzformáció az

$$R_{d,n}f(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_d) = \int_{\mathcal{G}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_d)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^d t_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)\right) |\det \mathbf{U}_{\mathbf{x}}^{-1}| dt,$$

alakban jelenik meg²⁶, ahol $d\mathbf{x}$ az $\mathcal{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ felszínmértéke, $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$ az $\mathbb{R}^n$ egy olyan automorfizmusa, amely az $\{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\}_{i=1, \dots, d}$ független vektorrendszert ortonormált rendszerbe viszi, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, végül $d\mathbf{t}$ az $\mathbb{R}^d$ térfogtmértéke.

Mivel $|\det \mathbf{U}_{\mathbf{x}}^{-1}|$ éppen az $\{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\}_{i=1, \dots, d}$ vektorok által feszített paralelepipedon $\text{vol}\{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\}_{i=1, \dots, d}$ térfogata, ami az $X = R_{1,n}$ esetén éppen $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|$, a differenciálások és az integrálás(ok) felcserélésével a következő adódik.

2.5. John-feltétel. ([KÁ91, Lemma 2.1]) Ha $f \in S(\mathbb{R}^n)$ és $F = R_{d,n}f$, akkor

$$(\partial_{i,k} \partial_{j,e} - \partial_{i,e} \partial_{j,k}) \frac{F(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_d)}{\text{vol}\{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\}_{i=1, \dots, d}} = 0, \quad (2.7)$$

ahol $0 \leq i < j \leq d$, $1 \leq k < e \leq n$ és $\partial_{i,k}$ az i -edik $\mathbf{x}_i$ paraméter k -edik x_i^k koordinátája szerinti parciális deriválás.

2.6. Ekvivalencia-tétel. (Kurusa [KÁ91, Theorem 3.1]) A $D(\mathbb{G}^{d,n})$ függvényeken a (2.6) momentum-feltétel és a (2.7) John-feltétel ekvivalens.

Ez az eredmény 50 évvel a John-tétel után született, és az (1.3) John-egyenlet általánosításához vezetett. A (2.7)-rendszerben látható jelentős „redundancia” leküzdéséhez előbb a koordinátázásban rejlő redundanciát érdemes célba venni. Egy ℓ egyenes *Plücker-koordinátái*

$$p_{i,k} = \det \begin{pmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad q_j = \det \begin{pmatrix} x_j & 1 \\ y_j & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ az ℓ egyenes különböző pontjai, $1 \leq i < k \leq n$ és $1 \leq j \leq n$. Jól ismert [KÁ09], hogy ezeknek a $p_i := p_{i,n}$ és

²⁵Helgason-féle Paley–Wiener-tétel d -dimenziós Radon-transzformációra.

²⁶Ebben a felfogásban $R_{d,n}f$ egy $\mathbb{G}^{d,n}$ feletti principális fibrált nyalábon van értelmezve, az $\mathbb{R}^d$ affin csoportjával mint struktúra-csoporttal. Ez teljesül az $R_{d,n}f/|\det \mathbf{U}_{\mathbf{x}}^{-1}|$ függvényre is.

q_j koordinátáknak a belső arányai nem függenek az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ választásától, csak is az ℓ egyenestől. Az egyenesek sokaságának Plücker-koordinátázása után a 2.6 ekvivalencia-tétel azt jelenti [KÁ91, Theorem 4.2]²⁷, hogy egy $F \in D(\mathbb{R}^4)$ függvény akkor és csak akkor megoldása az (1.3) John-egyenletnek, ha létezik olyan $f \in D(\mathbb{R}^3)$ függvény, amelyre

$$R_{1,3}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{q_i}{q_3} \right)^2 \right)^{1/2} F\left(\frac{p_1 + q_2}{q_3}, \frac{-p_2 + q_1}{q_3}, \frac{p_1 - q_2}{q_3}, \frac{-p_1 - q_1}{q_3} \right).$$

Bár létezik Plücker-koordinátázás²⁸ $d > 1$ esetre is, a 2.6 ekvivalencia-tétel átparaméterezése magasabb dimenzióban is csak a $d = 1$ esetben történt meg.

2.7. Általánosított John-egyenlet. (Kurusa [KÁ91, Corollary 4.3]) Az $F \in D(\mathbb{R}^{2(n-1)})$ függvény akkor és csak akkor megoldása az (ultrahiperbolikus)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_e} - \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial x_e} \right) F(x_1, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_{n-1}) = 0 \quad (1 \leq e, k \leq n-1) \quad (2.9)$$

parciális differenciálegyenlet-rendszernek, ha van olyan $f \in D(\mathbb{R}^n)$ függvény, hogy

$$R_{1,n}f(\ell) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{q_n^2} \right)^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{p_1 + q_1}{q_n}, \dots, \frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{q_n}; \frac{p_1 - q_1}{q_n}, \dots, \frac{p_{n-1} - q_{n-1}}{q_n} \right),$$

ahol p_i és q_i ($1 \leq i \leq n-1$) a tetszőleges ℓ egyenes Plücker-koordinátái.

Természetesen más jellegű képtér-jellemzések is születtek: több más próbálkozás után Grinberg [29] megmutatta, hogy a momentum- és a John-feltétel együtt pontosan jellemzi az $R_{d,n}(S(\mathbb{R}^n))$ képteret minden $d < n$ esetén, majd Gonzalez csoportelméleti módszerekkel bizonyította [26], hogy a John-feltétel²⁹ egyedül is jellemzi a d -dimenziós Radon-transzformációt.

Összefoglalva differenciálható függvényekre: a $d = n-1$ esetben a momentum-feltétel, a $d < n-1$ esetben pedig a John-feltétel írja le a képteret általában. Kompakt tartójú függvények esetén a két feltétel ekvivalens, ellenkező esetben a John-feltétel a szigorúbb.

Sok más téren is sikerült meghatározni a képteret, amelyekről a további fejezetekben még lesz szó.

²⁷Ez éppen John eredménye [49].

²⁸A (2.8)-ben jelzetténi jelentősen bonyolultabb eljárással, lásd [KÁ09, V.2 szakasz].

²⁹Valójában egy azzal ekvivalens negyedrendű differenciálegyenlet.

3. Radon-transzformáció Riemann-sokaságokon

A *differentiálható sokaság* nyelvén a Röntgen-transzformáció egy *Riemann-sokaságon* nem más, mint megengedett függvények integrálása a *geodetikusokon*. Ennek megfelelően, a d -dimenziós Radon-transzformáció egy n -dimenziós $\mathbb{M}^n$ Riemann-sokaságon olyan d -dimenziós $\mathbb{N}^d \subset \mathbb{M}^n$ *alsokaságain*³⁰ integrál, amelyek bármely $G_0 \in \mathbb{N}^d$ pontjukon áthaladó minden olyan $G(s) \subset \mathbb{M}^n$ geodetikust tartalmaznak, amelynek $\dot{G}(0) \in \mathcal{T}_{G_0}\mathbb{M}^n$ érintője a $G_0 = G(0)$ pontban az $\mathbb{N}^d$ alsokaság $\mathcal{T}_{G_0}\mathbb{N}^d$ érintőterében van. Az így elképzelt függvénytranszformációt d -dimenziós *totalgeodetikus* Radon-transzformációnak nevezzük.

A d -dimenziós totalgeodetikus Radon-transzformációt már a hatvanas évek óta vizsgálták *konstans görbületű* tereken [22, 23, 33, 34].

Nagyon eredményes megközelítésre vezetett a *gömbi harmonikusok* nem euklidészi tereken való alkalmazása³¹ 1991-től előbb a hiperbolikus, aztán a gömbi, majd a forgássokaságokon [KÁ91h, KÁ92, KÁ93]. Ezek a vizsgálatok rávilágítottak, hogy a totalgeodetikus Radon-transzformációk közötti analógiákat a terek közötti *geodetikus kapcsolat*³² okozza. Kiderült, hogy e kapcsolat alkalmazása a totalgeodetikus Radon-transzformációra sok új információt eredményez [KÁ94, BCK97]. Az az ebből eredő felismerés, hogy a Radon-transzformáció egyes tereken könnyebben kezelhetővé válik a tér valamely más térrel való kapcsolatának felhasználásával, hamar hozott újabb eredményeket más tereken is [KÁ97, KÁ00], és ma már általánosan alkalmazott módszer. A továbbiakban néhány konkrét eredményt ismertetünk.

Egy $(\mathbb{F}^n, \langle, \rangle)$ teljes Riemann-sokaságot *forgássokaságnak*³³ nevezünk az $O \in \mathbb{F}^n$ *bázisponttal*, ha az $\mathbb{F}^n$ sokaság O pontot fixen hagyó izometriának csoportja a $\mathcal{T}_O\mathbb{F}^n$ érintőtéren az $O(n)$ ortogonális csoportot indukálja [47, §3]. Egy $\mathbb{F}^n$ forgássokaságot meghatároz a $\nu: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *méretfüggvénye*, amely azt adja meg, hogy az O középpontú, $r > 0$ sugarú geodetikus gömb mekkora sugarú euklidészi gömbbel izometrikus. Forgássokaságon természetes polárkoordinátázást ad az $\text{Exp}_O(r\omega) \mapsto (\omega, r)$ leképezés, ahol $\omega \in \mathcal{T}_O\mathbb{F}^n \cong \mathbb{R}^n$ egységnyi és $r \geq 0$.

A d -dimenziós totalgeodetikus alsokaságok sokaságát jelölje $\mathbb{G}^{d, \mathbb{F}^n}$, és használjuk az $|X|$ és $|\mathcal{G}|$ jelöléseket az $X \in \mathbb{F}^n$ pont illetve $\mathcal{G} \in \mathbb{G}^{d, \mathbb{F}^n}$ alsokaság O alapponttól mért távolságának jelölésére. Legyen $i > 0$ az a legnagyobb szám,

³⁰ Az ilyen alsokaságokat *totalgeodetikusnak* nevezzük.

³¹ Az $\mathbb{R}^n$ térben ezeket először talán Ludwig használta [51], de ő a Lax–Phillips párost említi az ötlet forrásaként. Az alkalmazhatóság kulcsa a Funk–Hecke-tétel [65]. Durván mondván ez azt állítja, hogy egy megfelelő *síkhullámfüggvény* vetülete egy gömbi harmonikusra (konstans szorzótól eltekintve) éppen a síkhullámot definiáló függvény vetülete a megfelelő *Gegenbauer-polinomra*.

³² A *Beltrami-tétel* miatt az euklidészi térrel ilyen kapcsolatban csak a konstans görbületű terek lehetnek [KÁ99, Beltrami-tétel a 143. oldalon].

³³ Ilyenek például a konstans görbületű terek, és a forgásfelületek is.

amelyre $\mathbb{G}^{n-1, \mathbb{F}^n}$ elemeit egyértelműen jellemzi az O alapponthoz legközelebbi G pontjuk, ha $|G| < i^{34}$. Innentől

csak azon X pontokat tekintjük a forgássokaság elemének, amelyekre $|X| < i$.

Az $\mathbb{F}^n$ forgássokaságon értelmezett, minden $\mathcal{G} \in \mathbb{G}^{d, \mathbb{F}^n}$ alsokaságon integrálható f valós függvény d -dimenziós *totalgeodetikus Radon-transzformáltja* az az $R_{d, \mathbb{F}^n} f$ valós függvény, amelyre

$$R_{d, \mathbb{F}^n} f(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} f(X) dX,$$

ahol dX a $\mathcal{G}$ természetes, az öröklött Riemann-metrika által adott felszínmértéke.

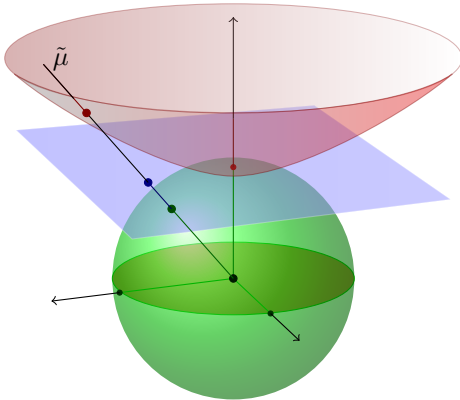
3.1. Tartótétel forgássokaságokra. (Kurusa [KÁ92, Theorem 3.1]) *Legyen $f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{F}^n)$ kompakt tartójú és $r \in (0, i)$. Ha minden $|\mathcal{G}| \geq r$ esetén $R_{d, \mathbb{F}^n} f(\mathcal{G}) = 0$, akkor $f(X) = 0$ minden $|X| \geq r$ esetén.*

Legyen X az $\mathbb{F}^n$ forgássokaság egy pontja, $\mathbb{G}_X^{n-1, \mathbb{F}^n}$ pedig a $\mathbb{G}^{n-1, \mathbb{F}^n}$ sokaság rá illeszkedő elemeinek sokasága. A $\mathbb{G}_X^{n-1, \mathbb{F}^n}$ elemeinek normális vektorai duplán fedik le a $T_X \mathbb{F}^n$ egységgömbfelületét, így ez átviszi az utóbbi természetes felszínmértékét a $\mathbb{G}_X^{n-1, \mathbb{F}^n}$ sokaságra, amelyet jelöljön d_X .

Ha $F \in C(\mathbb{G}^{n-1, \mathbb{F}^n})$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbb{F}^n$ sokaságon értelmezett

$$R_{n-1, \mathbb{F}^n}^* F(X) = \int_{\mathbb{G}_X^{n-1, \mathbb{F}^n}} F(\mathcal{G}) d_X \mathcal{G}$$

függvény az F *duális totalgeodetikus Radon-transzformáltja*.



Az n -dimenziós, konstans κ görbületű $\mathbb{K}_\kappa^n$ terek is forgássokaságok. Ezeken van egy μ_κ *vetítő függvény* is, amelyre a $\tilde{\mu}_\kappa: \text{Exp}_O(r\omega) \mapsto \mu_\kappa(r)\omega$ leképezés³⁵ geodetikus kapcsolatot hoz létre. Konkrétan:

$\mathbb{K}_\kappa^n$	κ	ν_κ	μ_κ	i_κ
$\mathbb{H}^n$	-1	$\sinh r$	$\tanh r$	∞
$\mathbb{R}^n$	0	r	r	∞
$\mathbb{S}^n (\mathbb{P}^n)$	$+1$	$\sin r$	$\text{tg } r$	$\pi/2$

Ez lehetővé teszi az összes konstans görbületű $\mathbb{K}_\kappa^n$ tér egységes kezelését.

Innentől ebben a fejezetben $\kappa \in \{-1, 0, +1\}$.

³⁴Gömbfelületen például $i = \pi/2$ az *injektivitási sugár*.

³⁵Itt $\omega \in S^{n-1}$, és a $\mathcal{T}_O \mathbb{K}^n$ teret azonosítottuk az $\mathbb{R}^n$ térrel.

3.2. Tétel. (Kurusa [KÁ92, Theorem 4.8]) Legyen $f \in C_c^\infty(\mathbb{K}_\kappa^n)$, $\delta_k = \frac{d^2}{dt^2} + \kappa k^2$ ($k \in \mathbb{N}$) és $\tilde{R} := R_{n-1, \mathbb{K}_\kappa^n}$ valamint $\tilde{R}^* := R_{n-1, \mathbb{K}_\kappa^n}^*$. Ha $n \geq 3$ páratlan, akkor

$$f(\bar{\omega}, t) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^{1-n}}{\pi^{n-1}} \delta_1 \delta_3 \cdots \delta_{n-2} \left(\tilde{R}^* \left(\tilde{R} f(\omega, h) \frac{\dot{\mu}_\kappa(h) \dot{\nu}_\kappa(h)}{\mu_\kappa^{n-1}(h)} \right) (\bar{\omega}, t) \nu_\kappa^{n-1}(t) \right).$$

Ha $n \geq 2$ páros, akkor

$$f(\bar{\omega}, t) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2^{1-n}}{\pi^n} \frac{d}{dt} \delta_2 \delta_4 \cdots \delta_{n-2} \left(\tilde{R}^* \left(\mathcal{H}_\kappa \left\langle \tilde{R} f(\omega, h) \frac{\dot{\mu}_\kappa(h) \dot{\nu}_\kappa(h)}{\mu_\kappa^{n-1}(h)} \right\rangle \right) (\bar{\omega}, t) \nu_\kappa^{n-1}(t) \right),$$

ahol

$$\mathcal{H}_\kappa \langle F \rangle (\omega, h) = \frac{1}{\dot{\nu}_\kappa^2(h)} \int_{-\dot{i}_\kappa}^{\dot{i}_\kappa} F(\omega, r) \frac{1}{\mu_\kappa(r) - \mu_\kappa(h)} dr. {}^{36}$$

E képletek nem csak az egységességük miatt értékesek, hanem mert igazolják a Radon-transzformáció invertálásának korábban csak euklidészi esetben bizonyított azon tulajdonságát, hogy páros dimenzióban egyetlen pontbeli függvényérték meghatározásához is a teljes téren kell ismerni a Radon-transzformáltat³⁷

3.3. Tétel. (Kurusa, [KÁ94, Theorem 2.1]) Legyen $d \in \{1, \dots, n-1\}$ és $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, amelyre $\text{supp } f \subseteq \mathcal{B}^n$, amennyiben $\kappa = -1$. Ekkor a $\tilde{\mu}_\kappa$ inverzével definiált $g: \tilde{\mu}_\kappa^{-1}(\mathcal{X}) \mapsto f(\mathcal{X})(1 + \kappa|\mathcal{X}|^2)^{\frac{d+1}{2}}$ függvényre

$$R_{d,n} f(\mathcal{G}) = (1 + \kappa|\mathcal{G}|^2)^{-1/2} R_{d, \mathbb{K}_\kappa^n} g(\tilde{\mu}_\kappa^{-1}(\mathcal{G})).$$

A 3.3 tétel lehetővé teszi a különböző konstans görbületű tereken elért eredmények összevetését, illetve kiterjesztését más konstans görbületű terekre.

3.4. Tartótétel konstans görbületű terekre. (Kurusa [KÁ94, Theorem 3.1 és 3.2]) Legyen $r \in (0, \dot{i})$, $d \in \{1, \dots, n-1\}$ és $g \in C(\mathbb{K}_\kappa^n)$ olyan, hogy minden $\mathcal{G} \in \mathbb{G}^{d,n}$ esetén $R_{d, \mathbb{K}_\kappa^n} g(\mathcal{G}) = 0$, amennyiben $|\mathcal{G}| \geq r$. Ha

(ℓ) $d \leq n-2$, továbbá

(i) $\mathcal{S}^{n-1} \ni \omega \mapsto \lim_{r \rightarrow \dot{i}} (g(\omega, r) \nu_\kappa^{d+1}(r))$ korlátos és szimmetrikus,

vagy

($\hbar$) $d = n-1$, továbbá

(i^-) $\kappa = -1$, és $\mathcal{S}^{n-1} \ni \omega \mapsto \lim_{r \rightarrow \dot{i}} (g(\omega, r) \nu_\kappa^{d+1}(r))$ korlátos, vagy

(i^+) $\kappa \geq 0$, és minden $\omega \in \mathcal{S}^{n-1}$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén $g(\omega, r) \mu_\kappa^m(r)$ korlátos,

akkor $g(X) = 0$, amennyiben $|X| > r$.

³⁶Cauchy-féle főérték integrálás szerint.

³⁷Ezt azzal fejezik ki, hogy az inverzformula globális.

Ez a tétel a $d = n - 1$ euklidészi esetét kivéve minden más téren korábban ismert tartótételek szignifikáns javítása³⁸. A hiperbolikus tér esetében, teljesen új és meglepő³⁹ eredményeket adott. Jelenleg is a legerősebb ilyen jellegű állítás a konstans görbületű sokaságokon⁴⁰.

Végül egy jobb oldali⁴¹ inverziós formulát említünk. Ez az $S(\mathbb{G}^{n-1,n})$ tér végtelen csökkenési feltételéről mindössze $(n - 2)$ -szeres fogyásra javítja a [67, Theorem 8.1] követelményeit, és jól mutatja, hogyan hat vissza a görbült tereken végzett vizsgálat az euklidészi téren ismert Radon-transzformációs eredményekre.

3.5. Tétel. (Berenstein–Casadio–Tarabusi–Kurusa [BCK97, Theorem 4.4])

Ha $F \in C^\infty(\mathbb{G}^{n-1,n})$, $F(\mathcal{G}) = O(|\mathcal{G}|^{-n})$, és F teljesíti a (2.4) momentum-feltételt minden $k \in \{0, \dots, n - 2\}$ esetén, továbbá bármely $\mathcal{G} \in \mathbb{G}^{d,n}$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ választásra

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{dt} \right)^j \frac{F(\mathcal{G} + t\mathbf{x}) - F(\mathcal{G} - t\mathbf{x})}{t^{-n}} = 0 \quad \text{minden } j \in \mathbb{N} \text{ mellett,}$$

akkor

$$2^{-n} \pi^{1-n} \mathbf{R}(-L_{\mathbf{x}})^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{R}^* F = F.$$

³⁸A gömbfelületen egy korábban elégtelen feltételek mellett igazolt tartótételt [39, 40] korigált.

³⁹Minden korábbi eredmény a függvény minden polinomnál gyorsabb csökkenését követelte.

⁴⁰Arra, hogy euklidészi és így a gömbi esetben sem lehet csökkenteni a megkívánt feltételeken, az origó körül kisímtott $f(x, y) = (x + y\mathbf{i})^{-5}$ függvény a példa [44, Remark 2.9, §2].

⁴¹Össze kell hasonlítani az (1.2) formulával.

4. Általánosított Radon-transzformációkról

Habár a 3.3 tétel mutatja, hogy az elmélet szempontjából is jelentősek lehetnek, azért az (1.4) általánosított Radon-transzformációk kutatását elsősorban mégis inkább az alkalmazások [50] indukálják.

Az alkalmazások szempontjából legfontosabb kérdések az elméletben más miatt is vizsgált invertálhatóság⁴², tartótételek⁴³ és képtérjellemzések⁴⁴ mellett megjelenik egy merőben új kérdés is, amelyet *azonosítási problémának* hívunk. Ebben arra keresik a választ, hogy az általánosított Radon-transzformáció milyen *külső* tulajdonságai alapján azonosítható be a definiáló súlyfüggvény.

Első tételünk ennél speciálisabb, de később további példákat fogunk látni.

4.1. Tétel. (Kurusa [KÁ90, Theorem 2]) *Legyen $P: C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_c(\mathbb{G}^{n-1,n})$ egy nem eltűnő lineáris függvénytranszformáció, amely teljesíti az alábbi feltételeket:*

- (i) $P(f \circ U) = Pf \circ U$ minden $U \in O(n)$ és $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ esetén;
- (ii) $P(f \circ (\delta I)) = \delta^{1-n} Pf \circ (\delta I)$ minden $\delta \in \mathbb{R}_+$ és $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ esetén, ahol I az identikus leképezés;
- (iii) $Pf_{\mathbf{y}}(\omega, r) = Pf(\omega, r + \langle \omega, \mathbf{y} \rangle)$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ és $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ esetén, ahol $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$;
- (iv) amennyiben a közös tartójú $f, f_1, \dots, f_k, \dots \in C_c(\mathbb{R}^n)$ függvényekre $f_k \rightarrow f$ lokálisan egyenletesen, akkor $Pf_k \rightarrow Pf$.

Akkor P konstans szorzó erejéig az R Radon-transzformáció.

Azt mondjuk, hogy az R^μ általánosított Radon-transzformáció

- (1) *exponenciális*⁴⁵, ha $\mu_{\mathcal{G}(\omega, p)}(\mathbf{x}) = \mu_1(\mathcal{G}(\omega, p)) \exp(\langle \mu_2(\omega), \mathbf{x} \rangle)$,
- (2) *eltolás invariáns*, ha $R^\mu f_{\mathbf{x}}(\omega, p) = \nu(\mathbf{x}, \mathcal{G}(\omega, p)) R^\mu f(\mathcal{G}(\omega, p + \langle \omega, \mathbf{x} \rangle))$,

ahol $\mu_1 \in C^\infty(\mathbb{G}^{n-1,n})$, $\mu_2: S^{n-1} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^n$, $\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{G}^{n-1,n})$ és $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén.

4.2. Tétel. (Kurusa [KÁ91t, Theorem 3.1]) *Egy R^μ általánosított Radon-transzformáció akkor és csak akkor exponenciális, ha eltolásinvariáns.*⁴⁶

⁴²Ha a súlyfüggvény szigorúan pozitív és analitikus, akkor (1.4) injektív [7] szerint, de ha a súlyfüggvény csak C^∞ , akkor (1.4) nem injektív [8] szerint.

⁴³Ha a súlyfüggvény pozitív és analitikus, akkor a kompakt tartójú C^∞ függvényekre [10] bizonyítja a tartótételt, más függvényosztályra azonban [66] ellenpéldát ad.

⁴⁴Guillemin és Sternberg megmutatta [31], hogy majdnem minden általánosított Radon-transzformáció képtere egy alkalmas parciális differenciálegyenletrendszer nulltere.

⁴⁵Pontosabban Kurusa-féle exponenciális Radon-transzformációról beszélünk [53, Definition 5.48].

⁴⁶A 4.2 tétel nem öncélú pontosítása és általánosítása a [46, 59] eredményeknek, mert tartótétel és inverziós formula bizonyítását adja [KÁ91t] a „*single-photon emission tomography*” technikában megjelenő exponenciális Radon-transzformáció [52, 66] esetére.

Legyen adott az $\mathbb{R}^n$ tér valamely $(d+1)$ -dimenziós $\mathcal{G} \in \mathbb{G}_{d+1,n}$ alterében minden $t \in [0, \infty)$ valós számra egy d -dimenziós $\mathcal{S}_t$ hiperfelület. Ezek halmazát jelölje $\hat{\mathcal{S}}$ és legyen $\mathcal{S}_{t,\phi} = \phi(\mathcal{S}_t)$ minden 1-determinánsú ortogonális $\phi \in SO(n)$ lineáris transzformációra. A d -dimenziós $\mathcal{S}_{t,\phi}$ felületeket *szirmoknak*, a szirmok $\hat{\mathcal{S}} = \{\mathcal{S}_t : t \in [0, \infty)\}$ halmazát *alapnak*, ezek $\mathbb{G}^{\hat{\mathcal{S}},n} = \bigcup_{\phi \in SO(n)} \phi(\hat{\mathcal{S}})$ unióját *virágnak* nevezzük⁴⁷.

Az $\hat{\mathcal{S}}$ alapú $\mathbb{R}_{\hat{\mathcal{S}},n}^\mu$ általánosított Radon-transzformáció⁴⁸, amelyet $d = n - 1$ esetén egyszerűen $\mathbb{R}_{\hat{\mathcal{S}}}^\mu$ jelöl, a minden szirmon integrálható $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez azt az $\mathbb{R}_{\hat{\mathcal{S}},n}^\mu f: \mathbb{G}^{\hat{\mathcal{S}},n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt rendeli, amelyre

$$\mathbb{R}_{\hat{\mathcal{S}},n}^\mu f(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} f(\mathbf{x}) \mu_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.1)$$

ahol $\mathcal{G} \in \mathbb{G}^{\hat{\mathcal{S}},n,49}$, $\mu: \mathbb{G}^{\hat{\mathcal{S}},n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy „kellően szabályos” *súlyfüggvény*⁵⁰.

Legyen $L_m^2(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : |\mathbf{x}| \leq m \Rightarrow f(\mathbf{x}) = 0\}$ minden $m > 0$ valós számra, továbbá $L_*^2(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{m>0} L_m^2(\mathbb{R}^n)$.

4.3. Tétel. (Kurusa [KÁ93s, Theorem 2 és Theorem 3])

Ha $\mathcal{C}$ olyan görbe az $\mathbb{R}^2$ síkon, hogy

- (i) az O origótól legtávolabbi $\mathcal{C}$ pontja az origótól 1 távolságra van,
- (ii) a $\mathcal{C}$ pontban a görbülete $\kappa > 1$,
- (iii) valamely $0 < \varepsilon$ esetén minden origó körüli, $\frac{1}{1+\varepsilon}$ -nál nagyobb sugarú kört legfeljebb kettő pontban metsz, és ezek az origótól vett r távolságukkal az O középpontú polárkoordináta-rendszerben $(r, \varphi(r))$ és $(r, \psi(r))$ paraméterezéssel rendelkeznek a $(\frac{1}{1+\varepsilon}, 1]$ szakaszon,
- (iv) $\frac{\varphi(r)}{\sqrt{1-r}}, \frac{\psi(r)}{\sqrt{1-r}} \in C^1((\frac{1}{1+\varepsilon}, 1])$ és $\varphi(1) = \psi(1) = 0$,

akkor a $\hat{\mathcal{C}} = \{t\mathcal{C} : t \in [0, \infty)\}$ alapú⁵¹ Radon-transzformáció teljesíti, hogy

- (1) $\mathbb{R}_{\hat{\mathcal{C}}} : L_m^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_*^2(\mathbb{R}^2)$ folytonos,
- (2) ha $f \in L_*^2(\mathbb{R}^2)$ és $\mathbb{R}_{\hat{\mathcal{C}}} f(\mathbf{x}) = 0$ minden $|\mathbf{x}| \leq m$ esetén, akkor $f \in L_m^2(\mathbb{R}^2)$

és

- (3) $\mathbb{R}_{\hat{\mathcal{C}}}$ injektív az $L_*^2(\mathbb{R}^2)$ téren.

Ez az állítás egyrészt rámutat [71, Proposition 2.2] egy pontatlanságára, másrészt bizonyos értelemben a legjobb, mert a következő példa szerint nem igazán lehet általában sokkal jobb eredményre számítani.

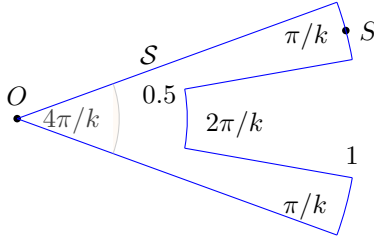
⁴⁷A klasszikus térbeli Radon-transzformáció esetén a virág az összes sík sokasága, az alap a síkok párhuzamossági osztályai, a szirmok az egyes síkok.

⁴⁸Ez egy átfogó leírása sokat vizsgált speciális Radon-transzformációknak, mint [12, 13] stb.

⁴⁹Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{G} = \mathcal{S}_{t,\phi} = \phi(\mathcal{S}_t)$ valamely, esetleg több $\phi \in SO(n)$ és $t \in [0, \infty)$ esetén.

⁵⁰A konstans 1 súlyfüggvényt nem jelöljük, és a dimenziót is elhagyjuk, ha nem specifikus.

⁵¹A $\mathbb{G}^{\hat{\mathcal{C}},2}$ virágot *szimmetrikusnak* mondjuk, ha $\varphi = \psi$.



Legyen $k \geq 5$ természetes szám, és tekintsük a mellékelt ábrán látható $\mathcal{S}$ görbét, amelyet egy 0.5 sugarú kör egy $2\pi/k$ szögű íve és egy ezzel koncentrikus 1 sugarú kör két π/k hosszú ívei alkotnak sugarakkal összekötve. Ekkor az

$$f(r, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r \leq 1, \\ e^{\frac{-r^2}{r-1}} \cos(k\alpha), & \text{ha } r > 1. \end{cases}$$

függvény $L_1^2(\mathbb{R}^2)$ eleme, az $\mathcal{S}$ csak az (iii) feltételt nem teljesíti, mégis $R_{\mathcal{S}}f(\mathbf{x}) \equiv 0$, ha $|\mathbf{x}| \leq 2$.

A 4.3 tétel magasabb $n \geq 3$ dimenzióra is kiterjeszthető. Legyen $\mathcal{C}_t$ minden $t \in [0, \infty)$ valós számra olyan görbe valamely 2-dimenziós $\mathcal{G} \in \mathbb{G}_{2,n}$ altérben, amelynek $\mathcal{C}_t \in \mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ egy az O origótól legtávolabbi pontja, és amely ebben a $\mathcal{G}$ síkban szimmetrikus az OC_t tengelyre. Minden $t \in [0, \infty)$ valós számra legyen a $(n-1)$ -dimenziós $\mathcal{S}_t$ felület az, amelyet a $\mathcal{C}_t$ görbe súrol az OC_t tengely körüli forgásokra. Végül legyen $\hat{\mathcal{S}} = \{\mathcal{S}_t : t \in [0, \infty)\}$. Az így nyerhető $(n-1)$ -dimenziós $\mathbb{G}^{\hat{\mathcal{S}},n}$ virágot *forgásvirágnak* nevezzük⁵², $\mathcal{C}$ pedig ennek *generáló görbéje*. Az olyan forgásvirágoakat, amelyekre $\mathcal{C}_{ts} = s\mathcal{C}_t$ minden $s \in [0, \infty)$ esetében, *konform virágnak* mondjuk. Vegyük észre, hogy egy $(n-1)$ -dimenziós $\mathbb{G}^{\hat{\mathcal{S}},n}$ forgásvirág minden szirmát meghatározza origótól legtávolabbi pontja, tehát⁵³ $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{G}^{\hat{\mathcal{S}},n}$.

Definiáljuk még minden $m > 0$ és $k \in \mathbb{Z}$ számra az

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}^n, r^k) &= \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^{k/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}, \\ L_m^2(\mathbb{R}^n, r^k) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^n, r^k) : |\mathbf{x}| \leq m \Rightarrow f(\mathbf{x}) = 0\}, \end{aligned}$$

és $L_*^2(\mathbb{R}^n, r^k) = \bigcup_{m>0} L_m^2(\mathbb{R}^n, r^k)$ függvénytereket.

4.4. Tétel. (Kurusa [KÁ93s, Theorem 5]) *Ha az $(n-1)$ -dimenziós $\mathbb{G}^{\hat{\mathcal{S}},n}$ konform virág generáló görbéje eleget tesz a 4.3 tétel feltételeinek, és a megfelelő φ függvényére $\frac{\varphi(r)}{\sqrt{1-r}} \in C^{[(n+2)/2]}((\frac{1}{1+\varepsilon}, 1])$, akkor*

- (1) $R_{\hat{\mathcal{S}}} : L_m^2(\mathbb{R}^n, r^{n-3}) \rightarrow L_*^2(\mathbb{R}^n, r^{-n-1})$ folytonos,
- (2) ha $f \in L_*^2(\mathbb{R}^n, r^{n-3})$ és $R_{\hat{\mathcal{S}}}f(\mathbf{x}) = 0$ minden $|\mathbf{x}| \leq m$ esetén, akkor $f \in L_m^2(\mathbb{R}^n, r^{-n-1})$

és

- (3) $R_{\hat{\mathcal{S}}} : L_*^2(\mathbb{R}^n, r^{n-3}) \rightarrow L_*^2(\mathbb{R}^2, r^{-n-1})$ injektív.

⁵²A síkban ennek a szimmetrikus virág felel meg.

⁵³A 0 pontban megfelelő korrekciókkal értve.

A 4.3 (2) és 4.4 (2) tartótételek és a 4.3 (3) és 4.4 (3) képtérleírások nyilván általánosíthatók a szirmokon „kellően szabályos” súlyfüggvények esetére is. Egy szigorúan pozitív $\mu: \mathbb{G}^{\hat{S},n} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *forgásinvariáns súlyfüggvény a $\mathbb{G}^{\hat{S},n}$ forgásvirágon*, ha $\mu_{\Phi\omega,t}(\Phi\mathbf{x}) = \mu_{\omega,t}(\mathbf{x})$ minden $\Phi \in SO(n)$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ és $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\omega,t}$ esetén, és
- *konform súlyfüggvény a $\mathbb{G}^{\hat{S},n}$ konform virágon*, ha forgásinvariáns, és $\mu_{\omega,pt}(p\mathbf{x}) = \mu_{\omega,t}(\mathbf{x})$ minden $p > 0$ esetén.

A következő tételek azt mutatják, hogy a súly és bizonyos mértékig a virág is meghatározható a megfelelő Radon-transzformáció tulajdonságából.

4.5. Tétel. (Kurusa [KÁ13, Theorem 3.1 és Theorem 3.4]) *Legyen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ olyan, hogy minden $\varrho > 0$ esetén az $f_\varrho: \mathbb{S}^{n-1} \ni \omega \mapsto f(\varrho\omega)$ függvény*

- gyengített hiper Pompeiu-tulajdonságú⁵⁴, amennyiben $n \geq 3$,*
- $\int_{\mathbb{S}^1} f_\varrho(\omega) d\omega \neq 0$ és az $f_\varrho(\cos(\xi + \beta), \sin(\xi + \beta)) = f_\varrho(\cos \xi, \sin \xi)$ véges sok megoldása van a ξ -ben bármely $\beta \in (-\pi, \pi]$ esetén, amennyiben $n = 2$.*

Ha f a $\mathbb{G}^{\hat{S},n}$ forgásvirág minden szirmán integrálható, és a $g(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}|^\ell f(\mathbf{x})$ függvény bármely $\ell \in \mathbb{N}$ mellett teljesíti, hogy

- $R_S^\mu g(\Phi\bar{\omega}, r) = R_S^\mu g^\Phi(\bar{\omega}, r)$ minden $\Phi \in SO(n)$ esetén,*

akkor μ forgásinvariáns.

4.6. Tétel. (Kurusa [KÁ13, Theorem 3.4]) *Legyen a kompakt tartójú $f \in L_*^2(\mathbb{R}^n)$ függvény olyan, hogy*

- a gömbi harmonikusok szerinti $f(t\omega) = \sum_{l,m} f_{l,m}(t) Y^{l,m}(\omega)$ sorfejtésében szereplő $f_{l,m}$ együtthatók lineárisan függetlenek az $L^2(\mathbb{R})$ térben.*

Ha f a $\mathbb{G}^{\hat{S},n}$ konform virág minden szirmán integrálható, és a $g(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}|^\ell f(\mathbf{x})$ függvény bármely $\ell \in \mathbb{N}$ mellett teljesíti, hogy

- (a) *$R_S^\mu g(\Phi\bar{\omega}, r) = R_S^\mu g^\Phi(\bar{\omega}, r)$ minden $\Phi \in SO(n)$, és*
- (b) *$R_S^\mu g(\bar{\omega}, pr) = p^{n-1} R_S^\mu g_p(\bar{\omega}, r)$ minden $p > 0$ esetén,*

akkor μ is konform.

4.7. Tétel. (Kurusa [KÁ13, Theorem 4.3]) *Legyen a differenciálható $\mathbb{G}^{\hat{S},n}$ konform virág nem önérintő⁵⁵. Legyen ezen a μ olyan súlyfüggvény, amelyhez van olyan folytonos, a második változójában szigorúan monoton $\nu: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy a $\hat{\mu}_{\omega,r}(\mathbf{x}) := \nu(r, \mu_{\omega,r}(\mathbf{x}))$ súlyfüggvény konform.*

Ha az $F(\bar{\omega}, r) = R_S^\mu f(\bar{\omega}, r)$ függvény ismert az ismeretlen $f = \sum_{i=1}^m \delta_{\mathbf{x}_i} + \ell$ függvényre, ahol $\ell \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq m \in \mathbb{N}$ és $\delta_{\mathbf{x}_i}$ az $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ pontra koncentrált Dirac-mérték, akkor a $\mathcal{C}$ generáló görbe, és a μ súlyfüggvény is kiszámítható.

⁵⁴ $f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ és főgömböknek egy sűrű halmazán csak a triviális $\mu \in C(\mathbb{S}^{n-2})$ súlyfüggvényre teljesül $P_f \mu(\Phi) := \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \mu(\omega) f(\Phi\omega) d\omega \equiv 0$ minden $\Phi \in SO(n-1)$ esetén.

⁵⁵ Egy virág önérintő, ha két szirma érinti egymást.

5. Takarási szám

Ha az f függvény nem jól vagy egyáltalán nem integrálható a $\mathcal{D}$ konvex tartományt metsző hipersíkokon⁵⁶, akkor f meghatározásának problémájára az analitikus tomográfia *tartótételek* (például 2.2, 3.1, 3.4, 4.3(2), 4.4(2) stb. tételek) sorával válaszol, ami lehetővé teszi az f meghatározását a $\mathcal{D}$ tartományon kívül. Az f függvény tartományon belüli viselkedésének meghatározásához más módszerek kellenek, amelyeket a geometriai tomográfia témakörébe sorolunk.

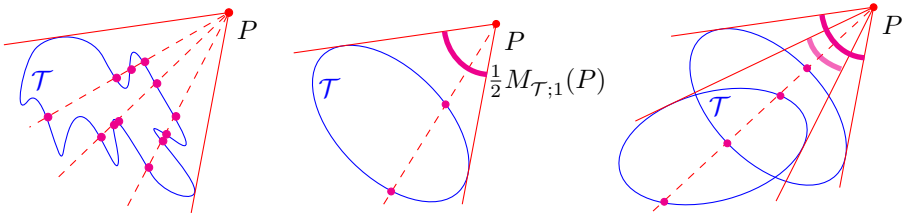
*Multigörbének*⁵⁷ nevezzük parametrikus görbék egy véges $\mathbf{r}_{\mathcal{J}}$ halmazát. Egy *multigörbe tagjai* olyan véges hosszúságú $\mathbf{r}_j: [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($j \in \mathcal{J}$) görbék, amelyeknek páronként nincs közös ívük. Egy multigörbét akkor nevezünk valamilyen tulajdonságúnak, ha minden egyes tagja rendelkezik az adott tulajdonsággal⁵⁸.

Egy $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ görbe nyomán azt a $\text{Tr } \mathbf{r}$ pontthalmazt értjük, amely az $\mathbf{r}$ értékkészletében van. Az $\mathbf{r}_{\mathcal{J}}$ multigörbe nyomán a tagjai nyomának $\text{Tr } \mathbf{r}_{\mathcal{J}} := \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \text{Tr } \mathbf{r}_j$ unióját értjük.

Egyenes súlynak nevezünk egy szigorúan pozitív, folytonos $\bar{\omega}: \mathbb{G}^{1,n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt. *Súlyozott takarási számnak* mondjuk a

$$M_{\mathcal{T};\bar{\omega}}(P) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \#(\mathcal{T} \cap \ell(P, \mathbf{w})) \bar{\omega}(\ell(P, \mathbf{w})) d\mathbf{w}, \quad (5.1)$$

számot⁵⁹, ahol $\mathcal{T} = \text{Tr } \mathbf{r}_{\mathcal{J}}$, $\ell(P, \mathbf{w})$ a P ponton $\mathbf{w} \in \mathbb{S}^{n-1}$ irányvektorral átmenő egyenes és $\#$ a számláló mérték⁶⁰. A P pontot *forrásnak*, a $\mathcal{T}$ halmazt *objektumnak* a $M_{\mathcal{T};\bar{\omega}}$ hozzárendelést *takarási függvénynek* nevezzük⁶¹.



5.1. Ábra. Zárt konvex síkgörbe takarási száma a látószögének duplája. Több ilyenből álló multigörbe takarási száma ezek látószögei összegének duplája.

⁵⁶A CT-alkalmazásokban ez egyáltalán nem ritka eset.

⁵⁷Hasonló konstrukció a [63] cikkben is található.

⁵⁸Egy *multiszakasz* (*multikör*) olyan multigörbe, amelynek tagjai kizárólag szakaszok (körök).

⁵⁹Ha $\mathcal{T}$ konvex és a súly konstans 1, akkor a [20] könyvben ezt *pontvételnek*, a [KK95] cikkben pedig *árnyékképnek* vagy a síkban egyszerűen *látószögnek* nevezik.

⁶⁰Az általunk vizsgált esetekben ez majdnem mindenütt véges szám.

⁶¹Valójában ez a $C := R_{1,n}^{\#}$ Crofton-transzformáció átlagolása

Rögzített $\nu > 0$ esetén azon P pontok halmazát, ahol $M_{\mathcal{T};\bar{\omega}}(P) = \nu$, a $\mathcal{T}$ ν -izoptikusának nevezzük. Azon P pontok halmazát, ahol $M_{\mathcal{T};\bar{\omega}}(P) = M_{\mathcal{T}';\bar{\omega}}(P)$, a $\mathcal{T}$ és $\mathcal{T}'$ ekvioptikusának nevezzük.

Számos olyan eredmény ismert⁶², ahol források egy $\mathcal{S}$ és objektumok egy $\mathcal{O}$ halmazáról az derül ki, hogy az $\mathcal{O} \ni \mathcal{T} \mapsto M_{\mathcal{T};\bar{\omega}}|_{\mathcal{S}}$ leképezés injektív.

Green 1950-ben bizonyította [28], hogy a síkban csak akkor van a körtől eltérő zárt konvex görbe, amelynek ν -izoptikusa kör, ha a ν teljesít bizonyos feltételeket⁶³, vagyis az ilyen ν esetén vannak nem kör alakú zárt konvex görbék, amelyek ekvioptikusa kör.

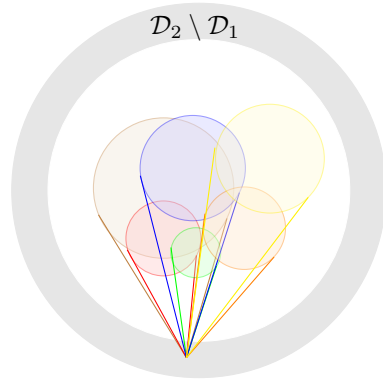
5.1. Általánosított Green-tétel. (Kurusa [KÁ12i, Theorem 3.1]) *Különböző zárt konvex görbéknek akkor és csak akkor lehet közös ν -izoptikusa, ha $1 - \nu/\pi$ racionális szám, és legegyszerűbb alakjában a számláló páratlan.*

Nitsche 1990-ben mutatta meg [57], hogy ha egy zárt konvex görbének két koncentrikus kör is az izoptikusa, akkor az maga is egy kör.

5.2. Nitsche-tétel bármely dimenzióban. (Kurusa & Ódor [KO15i, Theorem 5.1]) *Ha $\mathbb{R}^n$ -ben ($n \neq 3$) egy konvex testnek egy gömbbel két közös izoptikusa van, akkor az gömb.*

5.3. Nitsche-tétel síkbeli multigörbékre.

(Kurusa [KÁ16m, Corollary 7.1]) *Legyen a $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ koncentrikus körlapok középpontja O . Ha egy $\mathcal{D}_1$ belsejében lévő, konvex (nem feltétlenül korlátos) tartományokat határoló, egymást legfeljebb első fokban érintő, a teljes egyenesen analitikus görbék megszorításából álló multigörbének a $\mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_1$ gyűrű minden O középpontú köre izoptikusa, akkor az egy multikör.*⁶⁴



Kincses Jánossal bizonyítottuk [KK95], hogy ha a síkban két konvex kompakt sokszög ekvioptikusa tartalmaz egy, a sokszögek unióját körülvevő analitikus görbét, akkor a sokszögek egybeesnek. Algebrai geometriai eszközökkel, az úgynevezett Apollóniusz-görbéket vizsgálva a görbe analitikusságának feltételét 7-szeres differenciálhatóságra sikerült redukálni [KÁ13p].

⁶²A [17, cross integral], a [62, weighted back projection] és a [KÁ96u, generalized visual angle] valójában takarási számok.

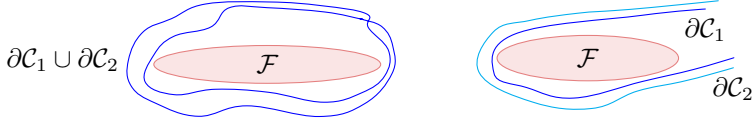
⁶³Az $1 - \nu/\pi$ nem olyan racionális szám, amelynek legegyszerűbb alakjában a számláló páratlan.

⁶⁴Ez valójában az 5.5 tétel közvetlen következménye.

5.4. Tétel. (Kurusa [KÁ96u, Theorem 1], [KÁ96n, Theorem 1, Theorem 3] és [KÁ12s, Theorem 2.1]) *Legyenek a síkban $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ zárt tartományok C^2 határral úgy, hogy a szigorúan konvex, kompakt $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ tartományok a $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ metszet belsejében vannak. Ha a $\partial\mathcal{C}_1$ és $\partial\mathcal{C}_2$ határgörbék*

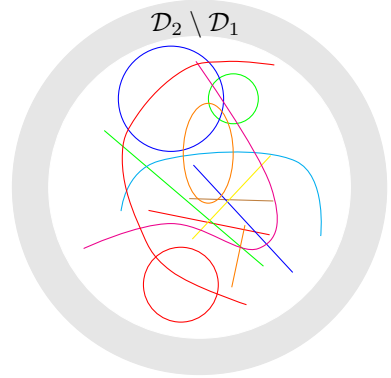
(a) *valamely pontban nem nulla szögben metszik egymást,*
vagy

(b) *valamely ideális pontban érintik egymást*
és $\partial\mathcal{C}_1 \cup \partial\mathcal{C}_2$ része az $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ ekvoptikusának, akkor $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2$.



Sajnos az 5.4 tételnek egyelőre nem ismert magasabb dimenziós általánosítása, és az sem ismert, hogy mi a helyzet, ha $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ kompaktak és $\partial\mathcal{C}_1 \cap \partial\mathcal{C}_2 = \emptyset$ (például ha $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ koncentrikus körök).

5.5. Tétel. (Kurusa [KÁ16m, Theorem 6.2]) *Ha a $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ konvex lemezek közti $\mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_1$ gyűrű része a konvex (nem feltétlenül korlátos) tartományokat határoló, egymást legfeljebb első fokban érintő, a teljes egyenesen analitikus görbék megszorításából álló $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{D}_1$ multi-görbék ekvoptikusának, akkor $\mathcal{X} \equiv \mathcal{Y}$.*



Hivatkozások

- [1] D. H. ARMITAGE, A non-constant function on the plane whose integral on every line is 0, *Amer. Math. Monthly*, **101** (1994), 892–894; doi: [10.2307/2975138](https://doi.org/10.2307/2975138). ⁽⁵⁾
- [2] G. AVERKOV and G. BIANCHI, Confirmation of Matheron’s Conjecture on the Covariogram of a Planar Convex Body, *J. Europe Math. Soc.*, **11** (2009), 118–1202. ⁽⁴⁾
- [3] M. F. ATIYAH, *Geometry of Yang–Mills fields*, Scuola Normale Superiore, 1979; [pdf](#). ⁽⁴⁾
- [BCK97] C. A. BERENSTEIN, E. CASADIO-TARABUSI and Á. KURUSA, Radon transform on spaces of constant curvature, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 455–461 doi: [10.1090/S0002-9939-97-03570-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-03570-3). ^(9, 12)
- [4] G. BIANCHI, Matheron’s conjecture for the covariogram problem, *J. London Math. Soc.*, **29** (2004), 1–18. ⁽⁴⁾
- [5] W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1916; [pdf](#). ⁽³⁾
- [6] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1955. ⁽³⁾
- [7] J. BOMAN, Uniqueness theorems for generalized Radon transforms, *Constructive Theory of Functions* ’84, Sofia, 1984, 173–176. ⁽¹³⁾
- [8] J. BOMAN, An example of non-uniqueness for a generalized Radon transform, *J. D’Anal. Math.*, **61** (1993), 395–401; doi: [10.1007/BF02788850](https://doi.org/10.1007/BF02788850). ⁽¹³⁾
- [9] L. BROWN, B. M. SCHREIBER and A. B. TAYLOR, Spectral synthesis and the Pompeiu problem, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **23** (1973), 125–154. ⁽⁴⁾
- [10] J. BOMAN and E. T. QUINTO, Support theorems for real-analytic Radon transforms, *Duke Math. J.*, **55** (1987), 943–948; doi: [10.1215/S0012-7094-87-05547-5](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-87-05547-5). ⁽¹³⁾
- [11] A. M. CORMACK, Representation of a function by its line integrals with some radiological applications I.–II., *J. Appl. Phys.*, **34** (1963), 2722–2727; doi: [10.1063/1.1729798](https://doi.org/10.1063/1.1729798); **35** (1964), 2908–2913; doi: [10.1063/1.1713127](https://doi.org/10.1063/1.1713127). ⁽²⁾
- [12] A. M. CORMACK and E. T. QUINTO, A Radon transform on spheres through the origin in $\mathbb{R}^n$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **260** (1980), 575–581; doi: [10.1090/S0002-9947-1980-0574800-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1980-0574800-3). ⁽¹⁴⁾
- [13] A. M. CORMACK, The Radon transform on a family of curves in the plane I.–II., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **83** (1981), 325–330; doi: [10.2307/2043520](https://doi.org/10.2307/2043520); **86** (1982), 293–298; doi: [10.2307/2043399](https://doi.org/10.2307/2043399). ⁽¹⁴⁾
- [14] M. W. CROFTON, Probability, *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., **19** (1885), 768–788; url: <http://www.1902encyclopedia.com/>. ^(2, 4)
- [15] W. F. DONOGHUE, *Distributions and Fourier transforms*, Pure and Applied Mathematics Volume **32**, Academic Press, Inc., 1969; url: <http://www.sciencedirect.com/>. ⁽⁵⁾

- [16] K. J. FALCONER, X-ray problems for point sources, *Proc. London Math. Soc.*, **46** (1983), 241–262; doi: [10.1112/plms/s3-46.2.241](https://doi.org/10.1112/plms/s3-46.2.241). [⟨3⟩](#)
- [17] H. FAST, The injectivity of the Crofton transform, *Real Anal. Exchange*, **21** (1995/96), 615–621; url: <https://projecteuclid.org>. [⟨4, 18⟩](#)
- [18] P. FUNK, Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, *Math. Ann.*, **74** (1913), 278–300; doi: [10.1007/BF01456044](https://doi.org/10.1007/BF01456044). [⟨1⟩](#)
- [19] R. J. GARDNER and P. McMULLEN, On Hammer’s X-ray problem, *J. London Math. Soc.*, **21** (1980), 171–175; doi: [10.1112/jlms/s2-21.1.171](https://doi.org/10.1112/jlms/s2-21.1.171). [⟨3⟩](#)
- [20] R. J. GARDNER, *Geometric tomography* 2nd ed., Encyclopedia of Math. and its Appl. **58**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006 (1996); url: <http://www.cambridge.org/>. [⟨3, 4, 17⟩](#)
- [21] J. GASQUI and H. GOLDSCHMIDT, *Radon Transforms and the Rigidity of the Grassmannians*, Annals of Mathematical Studies **156**, Princeton Univ. Press, Princeton, 2004; url: <http://press.princeton.edu/>. [⟨4⟩](#)
- [22] I. M. GELFAND and G. E. SHILOV, *Generalized functions Vol. 1.: Properties and Operations*, Academic Press, Inc., 1964; AMS: doi: [10.1090/ch11-377](https://doi.org/10.1090/ch11-377). [h.⟨3, 4, 9⟩](#)
- [23] I. M. GELFAND, M. I. GRAEV and N. YA. VILENKIN, *Generalized functions Vol. 5: Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press, Inc., 1966. [⟨3, 4, 9⟩](#)
- [24] I. M. GELFAND, M. I. GRAEV and S. J. SHAPIRO, Differential forms and integral geometry, *Funct. Anal. Appl.*, **3:2** (1969), 101–114; doi: [10.1007/BF01674015](https://doi.org/10.1007/BF01674015). [⟨3⟩](#)
- [25] O. GIERING, Bestimmung von Eibereichen und Eiköpern durch Steiner-Symmetrisierungen, *Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.S.-B.*, (1962), 225–253; mr: [0173197](https://mr.ams.org/). [⟨3⟩](#)
- [26] F. B. GONZALEZ, Invariant differential operators and the range of the Radon d -plane transform, *Math. Ann.*, **287** (1990), 627–635; doi: [10.1007/BF01446918](https://doi.org/10.1007/BF01446918). [⟨8⟩](#)
- [27] F. B. GONZALEZ, On the range of the Radon d -plane transform and its dual, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **327:2** (1991), 601–619; doi: [10.2307/2001816](https://doi.org/10.2307/2001816). [⟨7⟩](#)
- [28] J. W. GREEN, Sets subtending a constant angle on a circle, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 263–267; doi: [10.1215/S0012-7094-50-01723-6](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-50-01723-6). [⟨18⟩](#)
- [29] E. L. GRINBERG, Euclidean Radon transforms: ranges and restrictions, *Cont. Math. Amer. Math. Soc.*, **63** (1987), 109–133; doi: [10.1090/comm/063/876316](https://doi.org/10.1090/comm/063/876316). [⟨8⟩](#)
- [30] V. GUILLEMIN, The Radon transform on Zoll surfaces, *Adv. Math.*, **22:1** (1976), 85–119; doi: [10.1016/0001-8708\(76\)90139-0](https://doi.org/10.1016/0001-8708(76)90139-0). [⟨1⟩](#)
- [31] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG, Some problems in integral geometry and some related problems in micro-local analysis, *Amer. J. Math.*, **101** (1979), 915–955; doi: [10.2307/2373923](https://doi.org/10.2307/2373923). [⟨13⟩](#)

- [32] P. C. HAMMER, Problem 2, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. VII: Convexity (Providence, RI). Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963, 498–499. [⟨3⟩](#)
- [33] S. HELGASON, Differential operators on homogeneous spaces, *Acta Math.*, **102** (1959), 239–299. [⟨3, 9⟩](#)
- [34] S. HELGASON, The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds, *Acta Math.*, **113** (1965), 153–180; doi: [10.1007/BF02391776](#). [⟨3, 9⟩](#)
- [35] S. HELGASON, A duality in integral geometry on symmetric spaces, *Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry*, Kyoto, 1965; Nypon Hyronsha, Tokyo, 1966, 37–56. [⟨3⟩](#)
- [36] S. HELGASON, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, *Adv. Math.*, **5** (1970), 1–154; doi: [10.1016/0001-8708\(70\)90037-X](#). [⟨3⟩](#)
- [37] S. HELGASON, The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces I, *Ann. Math.*, **98** (1973), 451–479; doi: [10.2307/1970914](#). [⟨4⟩](#)
- [38] S. HELGASON, Paley–Wiener theorems and surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces and Lie groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 129–131; url: <https://projecteuclid.org>. [⟨4⟩](#)
- [39] S. HELGASON, The totally geodesic Radon transform on constant curvature spaces, *Contemp. Math.*, **113** (1990), 141–149; doi: [10.1090/conm/113/1108651](#). [⟨12⟩](#)
- [40] S. HELGASON, Support theorems in integral geometry and their applications, *Differential Geometry: Geometry in Mathematical Physics and Related Topics*, Proc. of Symp. in Pure Math. **54.2**, Amer. Math. Soc. Summer Inst. 1990, 1993, 317–323; doi: [10.1090/pspum/054.2/1216548](#). [⟨12⟩](#)
- [41] S. HELGASON, *The Radon transform*, Progress in Mathematics **5**, Birkhäuser, Boston, 1999 (1980); springer: url: <http://www.springer.com/us/book/9780817641092>; pdf: url: <http://www-math.mit.edu/~helgason/Radonbook.pdf>. [⟨2, 5, 6⟩](#)
- [42] S. HELGASON, *Groups and geometric analysis: Integral Geometry, Invariant Differential Operators and Spherical Functions*, Academic Press Inc., Boston, 1984; Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2000; doi: [10.1090/surv/083](#). [⟨4⟩](#)
- [43] S. HELGASON, *Geometric Analysis on Symmetric Spaces*, Mathematical Surveys and Monographs **39**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2008 (1994); doi: [10.1090/surv/039](#). [⟨4⟩](#)
- [44] S. HELGASON, *Integral Geometry and Radon Transforms*, Springer-Verlag, New York, 2011; doi: [10.1007/978-1-4419-6055-9](#). [⟨3, 4, 5, 6, 7, 12⟩](#)
- [45] G. HERGLOTZ, *Mechanik der Kontinua*, Lecture notes, Göttingen, 1931; doi: [10.1007/978-3-7091-9510-9](#). [⟨2⟩](#)
- [46] A. HERTLE, On the injectivity of the attenuated Radon transform, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **92** (1984), 201–205; doi: [10.2307/2045185](#). [⟨13⟩](#)

- [47] WU-YI HSIANG, On the laws of trigonometries of two-point homogeneous spaces, *Ann. Global Anal. Geom.*, **7:1** (1989), 29–45; doi: [10.1007/BF00137400](https://doi.org/10.1007/BF00137400). (9)
- [48] F. JOHN, Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **100** (1934), 488–520; doi: [10.1007/BF01449151](https://doi.org/10.1007/BF01449151). (2)
- [49] F. JOHN, The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, *Duke Math. J.*, **4:2** (1938), 300–322; doi: [10.1215/S0012-7094-38-00423-5](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-38-00423-5). (2, 8)
- [KK95] J. KINCSES and Á. KURUSA, Can you recognize the shape of a figure from its shadows?, *Beitr. Algebra Geom.*, **36** (1995), 25–34; url: <https://eudml.org/doc/232213>. (17, 18)
- [KK16] J. KOZMA and Á. KURUSA, Hyperbolic is the only Hilbert geometry having circumcenter or orthocenter generally, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **57:1** (2016), 243–258; doi: [10.1007/s13366-014-0233-3](https://doi.org/10.1007/s13366-014-0233-3).
- [50] P. KUCHMENT, *The Radon Transform and Medical Imaging*, C B M S - N S F Regional Conference Series in Applied Mathematics **85**, SIAM, Philadelphia, 2014; doi: [10.1137/1.9781611973297](https://doi.org/10.1137/1.9781611973297). (4, 13)
- [KÁ90] Á. KURUSA, A characterization of the Radon transform and its dual on Euclidean space, *Acta Sci. Math.*, **54** (1990), 273–276. (13)
- [KÁ91d] Á. KURUSA, *A Radon-transzformáció*, Kandidátusi értekezés, Magyar Tud. Akad., 1991.
- [KÁ91] Á. KURUSA, A characterization of the Radon transform’s range by a system of PDEs, *J. Math. Anal. Appl.*, **161** (1991), 218–226. (7, 8)
- [KÁ91t] Á. KURUSA, Translation invariant Radon transforms, *Math. Balcanica*, **5** (1991), 40–46. (13)
- [KÁ91h] Á. KURUSA, The Radon transform on hyperbolic space, *Geom. Dedicata*, **40** (1991), 325–339. (9)
- [KÁ92] Á. KURUSA, The invertibility of the Radon transform on abstract rotational manifolds of real type, *Math. Scand.*, **70** (1992), 112–126. (9, 10, 11)
- [KÁ93s] Á. KURUSA, Support curves of invertible Radon transforms, *Arch. Math.*, **61** (1993), 448–458. (14, 15)
- [KÁ93] Á. KURUSA, The Radon transform on half sphere, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **58** (1993), 143–158; url: <http://www.acta.hu/>. (9)
- [KÁ94] Á. KURUSA, Support theorems for totally geodesic Radon transforms on constant curvature spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122** (1994), 429–435; doi: [10.2307/2161033](https://doi.org/10.2307/2161033). (9, 11)
- [KÁ97] Á. KURUSA, The totally geodesic Radon transform on the Lorentz space of curvature -1 , *Duke Math J.*, **86** (1997), 565–583; doi: [10.1215/S0012-7094-97-08618-X](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-97-08618-X). (9)

- [KÁ99] KURUSA Á., *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon Jegyzettár **11**, Polygon Kiadó, Szeged, 1999; url: <http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/>. (9)
- [KÁ00] Á. KURUSA, Orbital integrals on the Lorentz space of curvature -1 , *Arch. Math.*, **75** (2000), 132–146; doi: [10.1007/PL00000433](https://doi.org/10.1007/PL00000433). (9)
- [KÁ09] KURUSA Á., *Nemeuklidészi geometriák*, Polygon Jegyzettár **47**, Polygon Kiadó, Szeged, 2009; url: <http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/>. (7, 8)
- [KÁ96U] Á. KURUSA, You can recognize the shape of a figure by its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 103–112; doi: [10.1007/BF00155723](https://doi.org/10.1007/BF00155723). (18, 19)
- [KÁ96N] Á. KURUSA, The shadow picture problem for nonintersecting curves, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 113–125; doi: [10.1007/BF00181528](https://doi.org/10.1007/BF00181528). (19)
- [KÁ12I] Á. KURUSA, Is a convex plane body determined by an isoptic?, *Beitr. Alg. Geom.*, **53** (2012), 281–294; doi: [10.1007/s13366-011-0074-2](https://doi.org/10.1007/s13366-011-0074-2). (18)
- [KÁ12S] Á. KURUSA, The shadow picture problem for parallel straight lines, *J. Geom.*, **103:3** (2012), 515–518; doi: [10.1007/s00022-012-0137-z](https://doi.org/10.1007/s00022-012-0137-z). (19)
- [KÁ13P] Á. KURUSA, Visual distinguishability of polygons, *Beitr. Algebra Geom.*, **54:2** (2013), 659–667; doi: [10.1007/s13366-012-0121-7](https://doi.org/10.1007/s13366-012-0121-7). (18)
- [KÁ13] Á. KURUSA, Identifying rotational Radon transforms, *Period. Math. Hungar.*, **67:2** (2013), 187–209; doi: [10.1007/s10998-013-5391-9](https://doi.org/10.1007/s10998-013-5391-9). (16)
- [KO15I] Á. KURUSA and T. ÓDOR, Isoptic characterization of spheres, *J. Geom.*, **106** (2015), 63–73; doi: [10.1007/s00022-014-0232-4](https://doi.org/10.1007/s00022-014-0232-4). (18)
- [KÁ16M] Á. KURUSA, Can you see the bubbles in a foam?, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, ? (2016), ?–? benyújtva. (18, 19)
- [51] D. LUDWIG, The Radon transform on Euclidean space, *Comm. Pure Appl. Math.*, **69** (1966), 49–81; doi: [10.1002/cpa.3160190105](https://doi.org/10.1002/cpa.3160190105). (3, 9)
- [52] A. MARKOE, Fourier inversion of the attenuated X -ray transform, *SIAM J. Math. Anal.*, **15** (1984), 718–722; doi: [10.1137/0515055](https://doi.org/10.1137/0515055). (13)
- [53] A. MARKOE, *Analytic Tomography*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **103**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006; url: <http://www.cambridge.org/>. (3, 4, 13)
- [54] G. MATHERON, Le covariogramme géométrique des compacts convexes des $\mathbb{R}^2$, *Technical report*, Centre de Géostatistique, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, **2** (1986). (4)
- [55] H. MINKOWSKI, About bodies of constant width, *Mathematics Sbornik*, **25** (1904), 505–508 (oroszul). (1)
- [56] F. MORGAN, *Geometric Measure Theory: a Beginner's Guide*, Academic Press, San Diego, 1988; url: <http://www.sciencedirect.com/science/book/9780125068512>. (4)
- [57] J. C. C. NITSCHKE, Isoptic characterization of a circle, (Proof of a conjecture of M. S. Klamkin), *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 45–47; doi: [10.2307/2324004](https://doi.org/10.2307/2324004). (18)

- [58] V. PALAMODOV, *Reconstructive Integral Geometry*, Monographs in Mathematics **98**, Birkhäuser, Basel, 2004; doi: [10.1007/978-3-0348-7941-5](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7941-5). [\(4\)](#)
- [59] E. T. QUINTO, The dependence of the generalized Radon transform on defining measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **257** (1980), 331–346; doi: [10.2307/1998299](https://doi.org/10.2307/1998299). [\(13\)](#)
- [60] J. RADON, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, **69** (1917), 262–277; url: http://people.csail.mit.edu/bkph/courses/papers/Exact_Conebeam/Radon_Deutsch_1917.pdf;
P. C. Parks fordításában: On the determination of functions from their integral values along certain manifolds, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **5:4**(1986), 170–176; doi: [10.1109/TMI.1986.4307775](https://doi.org/10.1109/TMI.1986.4307775). [\(1, 2\)](#)
- [61] A. RÉNYI, On projections of probability distributions, *Acta Math. Acad. Sci. Budapest*, **3** (1952), 131–141; doi: [10.1007/BF02022515](https://doi.org/10.1007/BF02022515). [\(4\)](#)
- [62] T. J. RICHARDSON, Planar rectifiable curves are determined by their projections, *Discrete Comput. Geom.*, **16** (1996), 21–31; doi: [10.1007/BF02711131](https://doi.org/10.1007/BF02711131). [\(18\)](#)
- [63] T. J. RICHARDSON, Total curvature and intersection tomography, *Advances Math.*, **130** (1997), 1–32; doi: [10.1006/aima.1996.1640](https://doi.org/10.1006/aima.1996.1640). [\(17\)](#)
- [64] B. RUBIN, *Introduction to Radon Transforms With Elements of Fractional Calculus and Harmonic Analysis*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **120**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015; <http://www.cambridge.org/>. [\(4\)](#)
- [65] R. T. SEELEY, Spherical harmonics, *Amer. Math. Monthly*, **73:4** (1966), 115–121; doi: [10.2307/2313760](https://doi.org/10.2307/2313760). [\(9\)](#)
- [66] L. A. SHEPP and J. B. KRUSKAL, Computerized Tomography: The new medical X-ray technology, *Amer. Math. Monthly*, **85:6** (1978), 420–439; doi: [10.2307/2320062](https://doi.org/10.2307/2320062). [\(13\)](#)
- [67] D. C. SOLMON, Asymptotic formulas for the dual Radon transform and applications, *Math. Z.*, **195** (1987), 321–343; doi: [10.1007/BF01161760](https://doi.org/10.1007/BF01161760). [\(12\)](#)
- [68] H. STEINHAUS, Length, shape, and area, *Colloq. Math.*, **3** (1954), 1–13; <https://eudml.org/doc/210004>. [\(4\)](#)
- [69] Z. I. SZABÓ, Hilbert’s fourth problem I., *Adv. Math.*, **59** (1986), 185–301; doi: [10.1016/0001-8708\(86\)90056-3](https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90056-3). [\(4\)](#)
- [70] D. POMPEIU, Sur certain systèmes d’équations linéaires et sur une propriété intégrale des fonctions de plusieurs variables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **188** (1929), 1138–1139. [\(4\)](#)
- [71] E. T. QUINTO, The invertibility of rotation invariant Radon transforms, *J. Math. Anal. Appl.*, **91** (1983), 510–522; doi: [10.1016/0022-247X\(83\)90165-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(83)90165-8). [\(14\)](#)

- [72] F. TRÈVES, Equations aux dérivées partielles inhomogènes a coefficients constants dépendent de parametres, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **13** (1963), 123–138; doi: [10.1016/0001-8708\(76\)90139-0](https://doi.org/10.1016/0001-8708(76)90139-0). [⟨2⟩](#)
- [73] A. VOLČIČ, A three-point solution to Hammer’s X-ray problem, *J. London Math. Soc. (2)*, **34** (1986), 349–59; doi: [10.1112/jlms/s2-34.2.349](https://doi.org/10.1112/jlms/s2-34.2.349). [⟨3⟩](#)
- [74] O. ZOLL, Ueber Flächen mit scharen von geschlossenen geodätischen Linien, *Math. Ann.*, **57:1** (1903), 108–133; doi: [10.1007/BF01449019](https://doi.org/10.1007/BF01449019). [⟨1⟩](#)

Köszönöm dr Kozma Józsefnek és dr. Vígh Viktornak a kézirat átolvasása után tett jobbító javaslataikat. Ezekkel ez a dolgozat biztosan jobb lett.

*Kurusa Árpád
Szeged, 2016. 08. 03.*