

Izoptikusok (Az egyformaság látszata)

Kurusa Árpád

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem
<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>



Egyetemi Tavasz 2018, SZTE TTK Bolyai Intézet
2018 április 14., Bolyai terem, 13.40

Van olyan tárgy, amelyet körbefotózva minden kép egyforma lesz?

Persze!

Például bármely gömböt ugyanolyannak látnunk vele koncentrikus bármely gömbfelület minden pontjából!

Csak a gömb ilyen?

Nem!

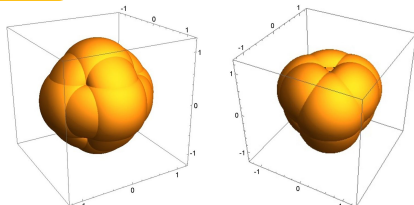
Az ellipszis is ugyanolyannak látszik megfelelő kör minden pontjából!

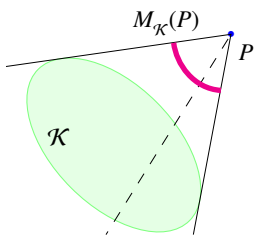
Sőt, akár össze is lehetne téveszteni a körrel!

GeoGebra

Valójában minden alakzatot körbe lehet úgy járni, hogy mindvégig egyformának lássuk!

Az ilyen útvonalat **izoptikusnak** hívjuk





A konvex, zárt, korlátos $\mathcal{K}$ alakzat **pontbeli látószögének** nevezzük a külső P pontból kiinduló, a $\mathcal{K}$ alakzatot érintő két félegyenes által bezárt szöget. Ennek irányítatlan nagyságát $M_{\mathcal{K}}(P)$ jelöli, melyet a $\mathcal{K}$ alakzat P **pontbeli látószögmértékének** vagy (puszta lustaságból) egyszerűen **látószögnek** nevezzük.

A $\mathcal{K}$ tartomány **γ -izoptikusának** nevezzük azon pontok $\mathcal{K}^\gamma := \{P : M_{\mathcal{K}}(P) = \gamma\}$ halmazát, melyekből az alakzat $\gamma \in [0, \pi)$ szög alatt látszik. A $\mathcal{K}^{\pi/2}$ halmazt **ortoptikusnak** hívjuk.

Világos, hogy

- ha $\mathcal{K}^\gamma = \mathcal{K}^\beta$, akkor $\gamma = \beta$,
- a $\mathcal{K}$ minden külső pontja a $\bigcup_{\gamma \in [0, \pi)} \mathcal{K}^\gamma$ halmazban van.

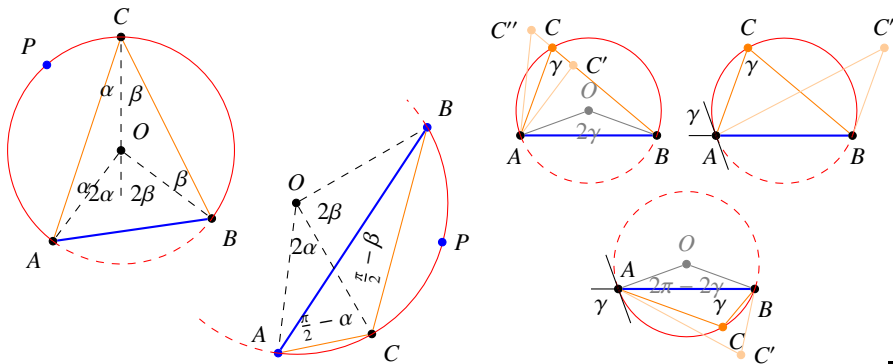
Ezek alapján szokás elfogadni a $\mathcal{K}^\pi := \partial \mathcal{K}$ definíciót.

Kérdések.

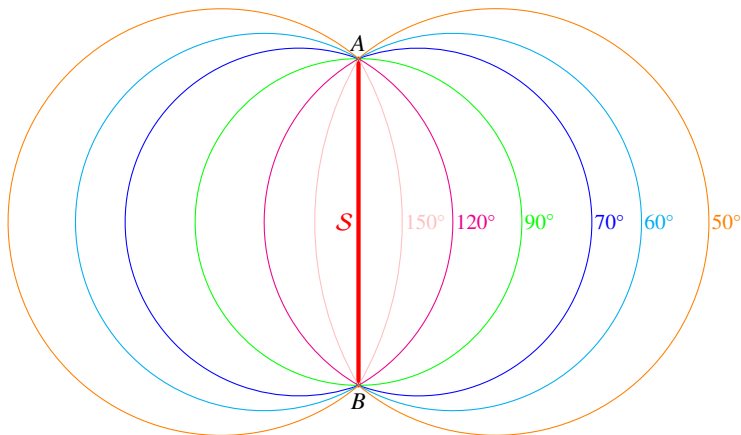
- Milyenek az izoptikusok? Konvexek? Metszhetik saját magukat?
- Milyen megoldásai vannak a $\mathcal{K}^\gamma = \mathcal{L}^\beta$ egyenletnek?
- Van olyan görbe, amely egyetlen tartománynak sem izoptikusa?
- Milyenek azok a tartományok, melyeknek van közös izoptikusa?
- ... és ha két közös izoptikusuk van?
- ... és ha a közös izoptikus egy kör?

Kerületi szögek tétele. Legyen adott egy $\gamma \in (0, \pi)$ szög és egy $\overline{AB}$ szakasz. Ekkor létezik olyan P pont, melyből az $\overline{AB}$ szakasz γ szög alatt látszik. Az $\overline{AB}$ szakasz γ -izoptikusa az A, B és P pontokra illeszkedő körnek az a zárt köríve, valamint annak az AB egyenesre vett tükörképe, amely az AB egyenesnek a P ponttal megegyező oldalán van.

Bizonyítás. A szinusztétel értelmében az $\overline{AB}$ szakasz f felező merőlegesén az a P pont, mely a $T = f \cap \overline{AB}$ ponttól $d(T, B) \operatorname{ctg}(\gamma/2)$ távolságra van, igazolja az első állítást.



A szakasz végpontjaiban mutatkozó értelmezhetetlenség miatt **szokás az izoptikusokat bővíteni a torlódási pontokkal.**

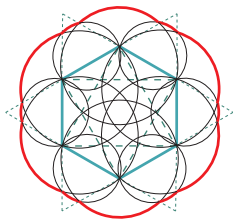


Mivel egy γ szöghöz tartozó látókörív és a szakasz bezárt szöge éppen $\pi - \gamma$, világos, hogy

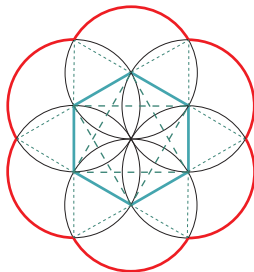
- $\gamma < \pi/2$ esetén a γ -izoptikus “behorpad” az $x = 0$ koordináta közelében,
- az ortoptikus pontosan a Thálesz-kör,
- $\gamma > \pi/2$ esetén pedig a γ -izoptikus konvex.

Vegyük észre, hogy a definíció értelmében A és B minden izoptikusnak pontja.

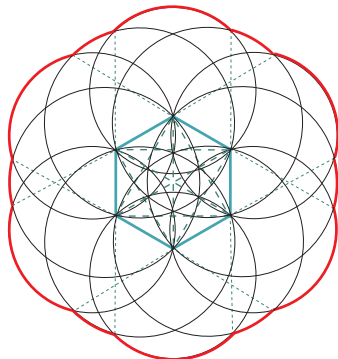
A kerületi szögek tétele értelmében a $\mathcal{P}$ konvex sokszög $\mathcal{P}^\gamma$ izoptikusa körívek uniója.



$$\gamma > \pi/3$$



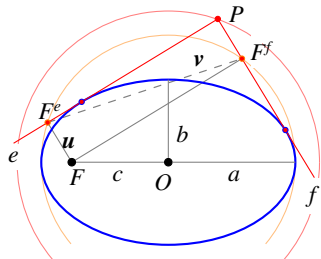
$$\gamma = \pi/3$$



$$\gamma < \pi/3$$

- Egy szabályos k -oldalú $\mathcal{P}$ sokszög $\mathcal{P}^{\pi(n-1)/n}$ izoptikusa éppen a $\mathcal{P}$ köré írt kör, csak a csúcsok hiányoznak belőle.
- A kerületi szögek tétel szerint egy $\mathcal{P}$ konvex n -szög torlódási pontjaival lezárt izoptikusa pontosan akkor kör, ha a sokszög szabályos. Ez a kör éppen $\mathcal{P}^{\pi-\pi/n}$.
- Egy $\mathcal{P}$ konvex n -szög γ -izoptikusa pontosan akkor konvex, ha $\gamma \geq \pi - \pi/n$.
- Egy $\mathcal{P}$ konvex n -szög γ -izoptikusa pontosan akkor sima, ha $\mathcal{P}$ szabályos, és $\gamma = \pi - \pi/n$, vagyis $\mathcal{P}^\gamma$ a $\mathcal{P}$ körülírt köre.

Tétel. Ellipszis ortoptikusa olyan kör, melynek középpontja az ellipszis középpontjába esik.



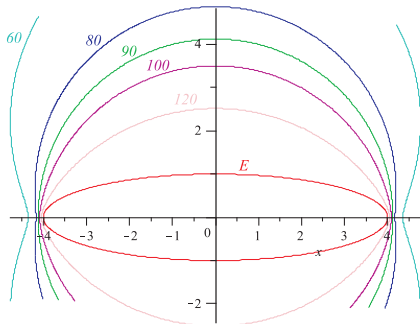
Bizonyítás. Legyen az ellipszis nagy- és kistengelye rendre $2a$ és $2b$ hosszúságú, az F fókusz távolsága az O középponttól pedig c . Ekkor Pitagorasz tétele szerint $c^2 + b^2 = a^2$. Tekintsünk most egy olyan P pontot, melyen keresztül az ellipszishoz húzott e és f érintők merőlegesek egymásra. Jelölje F^e és F^f rendre az F merőleges vetületeit az e és f érintőkre, és legyen $\mathbf{u} = \overrightarrow{FF^e}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{FF^f}$.

Mivel FF^ePF^f egy téglalap, $\overrightarrow{F^fP} = \mathbf{u}$, és $d(F, P) = |\mathbf{v}|$. Ezek szerint¹

$$\begin{aligned} |P_O|^2 + |F_O|^2 &= |P_O - F_O|^2 + 2\langle P_O, F_O \rangle = |F_O^e - F_O^f|^2 + 2\langle P_O, F_O \rangle = |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2 + 2(\langle P_O, F_O \rangle - \langle F_O^e, F_O^f \rangle) \\ &= |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2 + 2(\langle \overrightarrow{OF^f} + \mathbf{u}, \overrightarrow{OF^e} - \mathbf{u} \rangle - \langle \overrightarrow{OF^e}, \overrightarrow{OF^f} \rangle) = |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2 + 2(\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle) \\ &= |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2, \end{aligned}$$

vagyis $d(O, P) = |P_O| = \sqrt{a^2 + a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, hiszen F^e és F^f az ellipszis főkörén van. ■

¹ A formulában a differenciálgeometriában okkal megszokott $A_B = \overrightarrow{BA}$ jelölést használjuk.



Tétel. ([11]) Az $a \geq b$ tengelyekkel bíró

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletű E ellipszis γ - és $(\pi - \gamma)$ -izoptikusa

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = 4(b^2(x^2 - a^2) + a^2y^2) \operatorname{ctg}^2 \gamma.$$

Az izoptikusok szimmetrikusak a tengelyekre. Ha $a = b$, akkor az egyenlet az $x^2 + y^2$ változóra vezet, vagyis az izoptikus — ahogy vártuk — egy kör.

Ha $\gamma = \pi/2$, akkor az ortoptikus kör $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ egyenlete adódik.

Ha $y = 0$ és $x > 0$, akkor a $(\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2(\gamma/2)}, 0)$ ponton megy át a γ -izoptikus.

Az $x = \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2(\gamma/2)}$ egyenest a γ -izoptikus pontosan akkor metszi, ha $y = 0$ vagy $y^2 = 4 \operatorname{ctg}^2 \gamma \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} (a^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - b^2 \operatorname{tg} \gamma)$. Ennek csak $\cos^2 \frac{\gamma}{2} > \frac{a^2/2}{a^2 - b^2}$ esetén van megoldása.

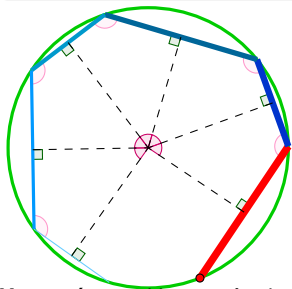
Tehát a γ -izoptikus akkor és csak akkor nem konvex, ha $\cos \frac{\gamma}{2} > \sqrt{\frac{a^2/2}{a^2 - b^2}}$. GeoGebra

Eszerint $b \geq a/\sqrt{2}$ esetén minden izoptikus konvex, $b < a/\sqrt{2}$ esetén a kicsi szögekhez tartozó izoptikusok nem konvexek.

Tétel. ([12]) Ellipszisek közös izoptikusa csakis kör lehet.

Tétel. (Kurusa, 2013; [12]).

Különböző konvex alakzatoknak akkor és csak akkor lehet közös γ -izoptikusa, ha $1 - \gamma/\pi$ racionális szám, és legegyszerűbb alakjában a számláló páratlan.



Ha m páros, akkor n páratlan, így $\pi - \gamma = \frac{n+1}{2}2(\pi - \gamma) - \frac{m}{2}2\pi$ miatt $\pi - \gamma$ is a h periódusa, amiből $(\star)$ alapján következik, hogy h konstans.

Ha m páratlan, akkor elég kicsi $\varepsilon > 0$ esetén $h(\varphi) = \sin(\frac{\gamma}{2} + \varepsilon \sin(n\varphi))$ egy támaszfüggvény, melyhez tartozó $\mathcal{K}$ tartomány γ -izoptikusa C . ■

Tétel. (Green, 1950; [3]).

Ha $1 - \gamma/\pi$ racionális, és a legegyszerűbb alakjában szereplő számláló páratlan, akkor vannak olyan nem kör konvex alakzatok, melyek γ -izoptikusa kör.

Bizonyítási vázlat, ha $\mathcal{K}^\gamma$ az egységkör. Legyen a $\mathcal{K}$ támaszfüggvénye² h . Ekkor

$$(\star) \quad \pi - \gamma = \arccos h(\varphi) + \arccos h(\varphi + \pi - \gamma).$$

Ebből kivonva ugyanezt a $\varphi + \pi - \gamma$, szögre kiderül, hogy h a $2(\pi - \gamma)$ szögre is periodikus. GeoGebra

Ha $1 - \gamma/\pi$ irracionális, akkor a k egész számokra vett $2k(\pi - \gamma) \pmod{2\pi}$ szögek a $(0, 2\pi)$ intervallumban sűrűn helyezkednek el³, így mivel h folytonos is, adódik, hogy h konstans.

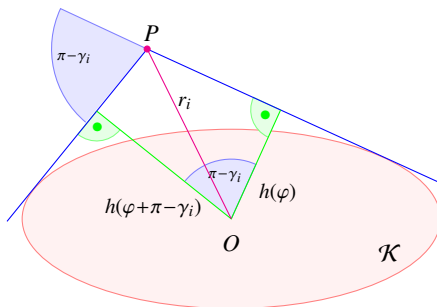
Ha $1 - \gamma/\pi$ racionális és legegyszerűbb alakja m/n .

² A $\mathcal{K}$ támaszfüggvénye az a 2π periodikus pozitív $h_{\mathcal{K}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény, mely a $\mathcal{K}$ azon érintőjének origótól mért $h_{\mathcal{K}}(\varphi)$ távolságát adja, amely merőleges a $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ vektorra és átmegy a $h_{\mathcal{K}}(\varphi)(\cos \varphi, \sin \varphi)$ ponton.

³ Minden irracionális szám $1/2m$ -nél jobban közelíthető m nevezőjű törtekkel.

Tétel. (Nitsche, 1990; [18]).

Ha a $\mathcal{K}$ konvex alakzat valamely két izoptikusa koncentrikus kör, akkor $\mathcal{K}$ egy kör.



Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}$ támaszfüggvénye h , a $\mathcal{K}^{\gamma_1}$ és $\mathcal{K}^{\gamma_2}$ koncentrikus körök sugara pedig r_1 és r_2 .

Előbbi tétel miatt elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $1 - \gamma_i = \pi m_i / n_i$, ahol $m_i, n_i \in \mathbb{N}$ és $\text{Inko}(m_i, n_i) = 1$ ($i = 1, 2$), továbbá m_i páratlan.

Mivel

$$(*) \quad \pi - \gamma_i = \arccos \frac{h(\varphi)}{r_i} + \arccos \frac{h(\varphi + \pi - \gamma_i)}{r_i} \quad (i = 1, 2),$$

a h támaszfüggvény periodikus a $2(\pi - \gamma_i)$ szögre is.

A kínai maradéktétel [19] szerint

- 1 vannak olyan a_i, b_i egészek, hogy $a_i m_i + b_i n_i = 1$ ($i = 1, 2$),
- 2 vannak olyan a, b egészek, hogy $an_1 + bn_2 = \text{Inko}(n_1, n_2) =: c$.

Az 1 miatt $a_i(2\pi - 2\gamma_i) + (b_i - a_i)2\pi = 2\pi/n_i$, amiért $2\pi/n_i$ is a h periódusa.

A 2 miatt $b \frac{2\pi}{n_1} + a \frac{2\pi}{n_2} = \frac{2\pi c}{n_1 n_2 / c}$, amiért $\frac{2\pi}{n_1 n_2 / c}$ is a h periódusa.

Ha n_{3-i}/c páros szám, akkor (*) szerint $r_i \cos \frac{\pi - \gamma_i}{2} = h(\varphi)$, vagyis $\mathcal{K}$ egy kör.

Ha n_1/c és n_2/c is páratlan szám, akkor $(\star)$ koszinuszát véve, majd átrendezés után négyzetre emelve

$$(*) \quad r_i^2 \sin^2 \gamma_i = h^2(\varphi) + h^2\left(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c}\right) + 2 \cos \gamma_i h(\varphi) h\left(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c}\right) \quad (i = 1, 2)$$

adódik. E két egyenlet különbsége mutatja, hogy $h(\varphi)h(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c})$ konstans. Ebből $(*)$ szerint következik, hogy $h^2(\varphi) + h^2(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c})$ is konstans. Összességében tehát $h(\varphi)$ és $h(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c})$ is konstans, vagyis $\mathcal{K}$ egy kör. ■

Figyeljük meg, hogy mivel konstansok, nyilván $h(\varphi) \equiv h(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c})$, vagyis mindkettő ugyanazon, mondjuk, ϱ konstans. Ebből $(*)$ szerint

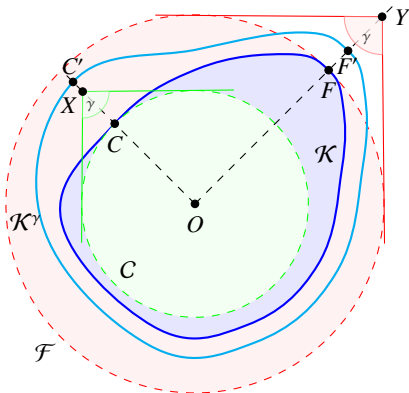
$$2\varrho^2 = \frac{r_i^2 \sin^2 \gamma_i}{1 + \cos \gamma_i} = 2r_i^2 \sin^2 \frac{\gamma_i}{2}$$

következik, vagyis $\varrho = r_i \sin \frac{\gamma_i}{2}$ a $\mathcal{K}$ kör sugara ($i = 1, 2$). Nitsche tétele pontosítható:

Tétel. Akkor és csak akkor létezik az r_1 és r_2 sugarú koncentrikus $r_1 C$ és $r_2 C$ körökhöz olyan $\mathcal{K}$ konvex alakzat, melyre $\mathcal{K}^{\gamma_1} = r_1 C$ és $\mathcal{K}^{\gamma_2} = r_2 C$, ha $r_1 \sin \frac{\gamma_1}{2} = r_2 \sin \frac{\gamma_2}{2}$. Ekkor $\mathcal{K} = r_1 \sin \frac{\gamma_1}{2} C$.

Tétel. (M. G.-Jiménez, E. G.-Arreola & J. J.-Castro, 2015; [15]).

Ha egy konvex alakzat homotetikus⁴ valamely izoptikusához, akkor kör.



Bizonyítás. Legyen a kicsinyítés középpontja az O origó, aránya $\chi > 0$, és $\chi\mathcal{K}^\gamma = \mathcal{K}$.

Legyen C' és F' rendre a $\mathcal{K}^\gamma$ origóhoz legközelebbi, illetve legtávolabbi pontja. Legyen $C = \chi C'$ és $F = \chi F'$.

Legyen C és F az origó középpontú kör rendre a C és F ponton át. Nyilván $C \subseteq \mathcal{K} \subseteq F$. Eszerint az $X = C^\gamma \cap \overline{OC}$ és $Y = F^\gamma \cap \overline{OF}$ pontokra $X \in \overline{OC'}$ és $F' \in \overline{OY}$. Ebből

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{d(O,C)}{d(O,X)} \geq \frac{d(O,C)}{d(O,C')} = \chi = \frac{d(O,F)}{d(O,F')} \geq \frac{d(O,F)}{d(O,Y)} = \sin \frac{\gamma}{2}$$

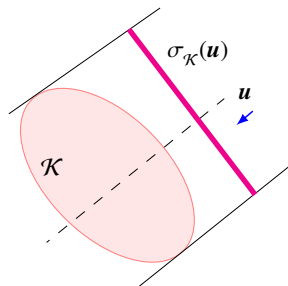
következik, amiért $t(\mathcal{K}^\gamma) \sin^2 \frac{\gamma}{2} = t(\mathcal{K})$.

A következő (nehéz) tétel igazolja az állítást. ■

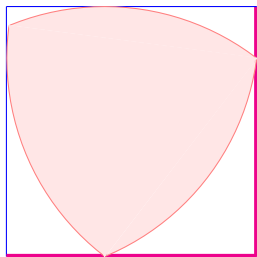
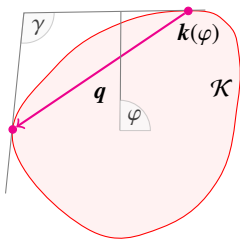
Tétel. (M. G.-Jiménez, E. G.-Arreola & J. J.-Castro, 2015; [15]).

Minden konvex $\mathcal{K}$ alakzatra $t(\mathcal{K}^\gamma) \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq t(\mathcal{K})$. Egyenlőség pontosan a körökre teljesül.

⁴Egyetlen pontból kicsinyített (nagyított).



A konvex, zárt, korlátos K alakzat *irány szerinti szélességének* nevezzük az u iránnyal párhuzamos, a K alakzatot érintő két félegyenes $\sigma_K(u)$ távolságát. A konvex, zárt, korlátos K alakzat *γ -szélességének* nevezzük a γ szöget bezáró érintők $k(\varphi)$ és $k(\varphi + \pi - \gamma)$ érintési pontjaiból kifejezett $\frac{|q(\varphi)| - (q(\varphi), q(\varphi), m)}{|q(\varphi)|^3}$ értéket, ahol $q(\varphi) = k(\varphi) - k(\varphi + \pi - \gamma)$ és m a sík normálisa.



Tétel. ([17, Theorem 2.1]).

Egy konvex tartomány akkor és csak akkor konstans szélességű, ha állandó 0-szélességű.

Egy konvex tartomány γ -izoptikusának $\sin \gamma$ -szoros kicsinyítettjét *normált γ -izoptikusnak* nevezzük. Ezen normált γ -izoptikusok $\gamma \rightarrow 0$ szerinti határértékét normált 0-izoptikusnak nevezzük.

Tétel. Egy konvex tartomány akkor és csak akkor konstans γ -szélességű, ha normált γ -izoptikusa kör. GeoGebra

A bizonyításhoz ki kell számolni a γ -izoptikus görbületét. Lásd [1, (5.7)].

A *látókúp* alakja (nem a helyzete!) és a *látópont* körüli egységgömbbel vett metszetének mértéke a síkon meghatározza egymást, de a térben ez már nem teljesül.

Tétel. (Matsuura [16]).

Ha a térben egy konvex test minden pontból gömbnek látszik⁵, akkor az gömb.

Tétel. (M. G.-Jiménez, E. G.-Arreola & J. J.-Castro, 2015; [15] (Térkitöltés!)).

Konvex test akkor és csak akkor homotetikus valamely izoptikusával, ha gömb.

Nitsche tétel általánosítása. (Kurusa & Ódor, 2015; [13] (Térfogatbecslés!)).

Ha egy konvex testnek egy gömbbel az $\mathbb{R}^n$ -ben ($n \neq 3$) két közös izoptikusa van, akkor gömb.

Alexandrov tétele. ([2, Theorem 3.3.6] (Középpontos szimmetria szükséges!)).

Az $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) térben a középpontosan szimmetrikus konvex testeket meghatározza párhuzamos vetületének irány szerinti területfüggvénye.

Kérdések.

- Van a térben olyan nem gömb konvex test, melynek gömb az izoptikusa?
- Melyik térbeli $\mathcal{K}$ testre lesz $V(\mathcal{K}^r)/V(\mathcal{K})$ minimális?

⁵ Ez azt jelenti, hogy a látókúp metszete a látópont körüli bármely gömbfelülettel egy kör.



Köszönöm a figyelmet!

Hivatkozások szerzők szerint rendezve I

- [1] W. Cieřlak, A. Miernowski and W. Mozgawa
Isoptics of a closed strictly convex curve,
Global differential geometry and global analysis, Proc.
Conf. Berlin/Germany 1990, Lect. Notes Math. **1481**,
1991, 28-?35.
- [2] R. J. Gardner
Geometric tomography, Encyclopedia of
Math. and its Appl. **58**, Cambridge University
Press, Cambridge, 2006.
- [3] J. W. Green
Sets subtending a constant angle on a circle,
Duke Math. J., **17** (1950), 263–267.
- [4] J. Kincses and Á. Kurusa
Can you recognize the shape of a figure by
its shadows?, *Beitr. Alg. Geom.*, **36** (1995), 25–
35.
- [5] Á. Kurusa
You can recognize the shape of a figure by
its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 113–
125; DOI: [10.1007/BF00155723](https://doi.org/10.1007/BF00155723).
- [6] Á. Kurusa
The shadow picture problem for noninter-
secting curves, *Geom. Dedicata*, **59** (1996),
103–112; DOI: [10.1007/BF00181528](https://doi.org/10.1007/BF00181528).
- [7] Á. Kurusa
The shadow picture problem for parallel
straight lines, *J. Geom.*, **103:3** (2012), 515–518;
DOI: [10.1007/s00022-012-0137-z](https://doi.org/10.1007/s00022-012-0137-z).
- [8] Á. Kurusa
Visual distinguishability of polygons, *Beitr.*
Alg. Geom., **54** (2013), 659–667; DOI:
[10.1007/s13366-012-0121-7](https://doi.org/10.1007/s13366-012-0121-7).

Hivatkozások szerzők szerint rendezve II

- [9] Á. Kurusa
Szakaszok ekvioptikusai: Apollóniosz tételének általánosítása, *Polygon*, **21:2** (2013), 43–57.
- [10] Á. Kurusa
Visual distinguishability of segments, *Int. Electron. J. Geom.*, **6:1** (2013), 56–67; [PDF](#).
- [11] Á. Kurusa
Kúpszeletek izoptikusai, *Polygon*, **19:2** (2011), 27–46.
- [12] Á. Kurusa
Is a convex plane body determined by an isoptic?, *Beitr. Alg. Geom.*, **53** (2012), 281–294; DOI: [10.1007/s13366-011-0074-2](https://doi.org/10.1007/s13366-011-0074-2).
- [13] Á. Kurusa and T. Ódor
Isoptic characterization of spheres, *J. Geom.*, **106** (2015), 63–73; DOI: [10.1007/s00022-014-0232-4](https://doi.org/10.1007/s00022-014-0232-4).
- [14] Á. Kurusa
The masking function of multicurves, *kézirat*, (2015), benyújtva.
- [15] M. García-Jiménez, E. González-Arreola & J. Jerónimo-Castro
A characterization of the Euclidean sphere with respect to an isoptic surface, *kézirat*, (2015), benyújtva.
- [16] S. Matsuura
A problem in solid geometry, *J. Math. Osaka City Univ.*, **A 12** (1961), 89–95.
- [17] W. Mozgawa
Mellish theorem for generalized constant width curves, *Aequat. Math.*, **89** (2015), 1095–1105.
- [18] J. C. C. Nitsche
Isoptic characterization of a circle, (Proof of a conjecture of M.S. Klamkin), *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 45–47.
- [19] Wikipedia
Kínai maradéktétel.

Az előadás kivonata

Van olyan tárgy, amelyet körbefotózva minden kép egyforma lesz? Persze! Ilyen például a térben a gömb, de valójában minden tárgy ilyen, csak megfelelően kell körbefotózni!

Azon pontok halmazát, ahonnan egy tárgy egyazon képet mutat, a tárgy izoptikusának nevezzük.

A síkban egy izoptikus mindig valamely $\gamma \in (0, \pi)$ szöghöz tartozik. Egy konvex $\mathcal{K}$ tartomány γ nagyságú szöghöz tartozó izoptikusát $\mathcal{K}^\gamma$ jelöli, amelyet γ -izoptikusnak hívunk.

A látószög-tétel értelmében egy szakasz minden izoptikusa két körív uniója, és ez magyarázza a görög színházak és az amfiteátrumok köríves alakját is.

Thálész tétele azt mutatja, (Tehát egy S szakasz esetén $S^{\pi/2}$ egy kör. A $\pi/2$ szöghöz tartozó izoptikusokat *ortoptikusoknak* is nevezzük.)

Pár kérdés, amelyekről szó lesz:

- Milyen egy konvex sokszöget adott szög alatt látó pontok halmaza?
- Milyen egy ellipszist konstans szög alatt látó pontok halmaza?
- Mi a helyzet általában egy konvex tartományt konstans szög alatt látó pontokkal?
- Van olyan görbe, amely egyetlen tartománynak sem izoptikusa?
- Milyenek azok a tartományok, melyeknek van közös izoptikusa? ... és ha két közös izoptikusuk van? ... és ha a közös izoptikus egy kör?

Az előadás felépítése

1 Konvex alakzatok izoptikusai

- Bevezetés
- Szakasz izoptikusai
- Konvex sokszög izoptikusai
- Ellipszis izoptikusai

2 Izoptikus-egyenletek és egyenlőtlenségek

- $\mathcal{K}^\gamma = \mathcal{L}^\gamma$
- $\mathcal{K}^{\gamma_1} = C = \chi \mathcal{K}^{\gamma_2}$
- $\chi \mathcal{K}^\gamma = \mathcal{K}$ és $t(\mathcal{K}^\gamma)/t(\mathcal{K})$ becslése

3 Általánosítások

- γ -szélesség
- Magasabb dimenziók