

Projektív metrikák és Beltrami tétele

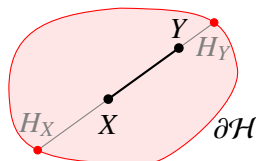
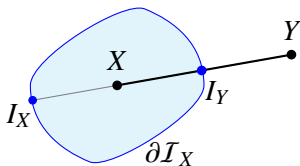
Projective metrics and Beltrami's theorem

Kurusa Árpád

<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

<http://www.math.u-szeged.hu/>



DE Analízis és Geometria Tanszékei közös szemináriuma, Debrecen, 2018 április 20., 11:00

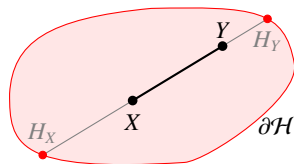
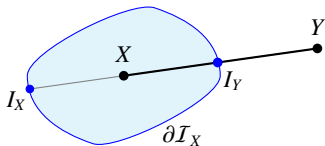
A multimédia-tartalomhoz Adobe PDF Reader szükséges.

A XIX. század végén már ismertek voltak a Bolyai-féle hiperbolikus, az Euklidészi és az elliptikus geometria (ezek az úgynevezett *klasszikus geometriák*) általánosításai.

Hilbert-metrika. $d_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definíciója

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } X = Y, \\ \frac{1}{2} |\ln(X, Y; H_X, H_Y)|, & \text{ha } X \neq Y, \end{cases}$$

ahol $\mathcal{H}$ az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos tartománya, és $\overline{H_X H_Y} = \mathcal{H} \cap XY$.



Minkowski-metrika. $d_I: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definíciója $d_I(X, Y) = (Y, I_Y; X)$, ahol I , az *indikátrix*, az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos, centrálszimmetrikus tartománya, és $\overline{I_X I_Y} = I \cap XY$.

Elliptikus metrika. $d: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definíciója $d(X, Y) = \arccos |\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle|$, ahol $\mathbb{P}^n$ pontjai az S^n átellenes pontpárjai, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pedig $\mathbb{R}^{n+1}$ egy euklidészi szorzása.

Közös vonásuk, hogy mind a *projektív sík egy-egy részhalmaza* és a metrikára teljesül a *szigorú háromszög-egyenlőtlenség*.

Hilbert IV. problémája (Hilbert 1900, [11])

- 1 Határozzuk meg az összes olyan folytonos és teljes d metrikát az n -dimenziós $\mathbb{P}^n$ projektív tér (nem feltétlenül valódi) $\mathcal{D}$ részhalmazain, amelyben *bármely két pont közötti legrövidebb út a szakaszuk!* Ezek a *projektív metrikák*.
- 2 Ezek birtokában tanulmányozzuk a $(\mathcal{D}, d)$ *projektív-metrikus terek geometriáját!*

Hamel igazolta [10], hogy **A** $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$ konvex, vagy **B** $\mathcal{D} = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$, vagy **C** $\mathcal{D} = \mathbb{P}^n$. Egy ilyen $(\mathcal{D}, d)$ párt rendre *hiperbolikus*, *parabolikus*, illetve *elliptikus* típusúnak mondunk. *Blaschke* bizonyította [4], hogy *Crofton* formulája [9] bizonyos projektív-metrikus síkokon is érvényes az egyenesek halmazán megfelelő mértéket választva.

Busemann vetette fel [5], hogy talán minden projektív metrika előáll valamely, a hipersíkok sokaságán adott kvázi pozitív μ "mérték" segítségével úgy, hogy két pont távolságát a köztük lévő szakaszt metsző hipersíkok halmazának $\mu/2$ -mértéke definiálja.

Ezt *Pogorelov* variációs módszerrel igazolta a sík esetére [18], majd egyszerűbb bizonyítások is születtek a síkra [2, 1], végül *Z.I. Szabó* adott teljes bizonyítást [19].

Busemann szerint [7]:

"... Hilbert [...] nem volt tudatában ezen metrikák hatalmas mennyiségének, így *a probléma második része ... elkerülhetetlenül szűkül az érdekes geometriák speciális vagy speciális osztályba tartozó metrikáinak vizsgálatára*".

Azon pontok halmaza, melyek két ponttól mért távolságainak összege éppen a két pont távolsága, az a két pontot összekötő szakasz.

Ez egy **lineáris** görbe.

Természetes várakozás, hogy azon pontok halmaza, melyek két ponttól mért távolságainak összege valamely, a két pont távolságánál nagyobb szám, **kvadratikus** legyen [13].

Az $\mathcal{E}_{d;F_1,F_2}^a := \{P : 2a = d(F_1, P) + d(P, F_2)\}$ halmazt **ellipszoidnak** (**ellipszisnek**) nevezünk, ha F_1, F_2 fix pontok, a **fókuszok**, és $a > f := d(F_1, F_2)/2$. $\mathcal{E}_{d;F_1,F_2}^a$ egy **gömbfelület** (**kör**), ha $f = 0$.

Az $\overline{F_1 F_2}$ szakasz d -metrikus C felezőpontját az $\mathcal{E}_{d;F_1,F_2}^a$ **metrikus centrumának** nevezzük.

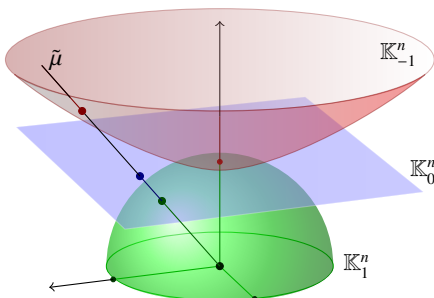
A kvadratikuság egy belső geometriai fogalom, mert az axiomatikus felépítésben a Desargues-tulajdonság a G -terek projektív térbe való természetes beágyazhatóságot vonja maga után [6, II.7.1], viszont két ilyen beágyazás legfeljebb projektivitásban különbözhet.



Mely projektív-metrikus geometriákban vannak kvadratikus ellipszisek?



Klasszikus geometriák kvadratikus modelljeinek vetítése adja a klasszikus projektív metrikákat.



A $\nu_K: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ **méretfüggvény** olyan, hogy $\nu_K(r)\mathcal{S}^{n-1}$ izometrikus az $r > 0$ sugarú $\mathbb{K}_K^n$ metrikus gömbfelülettel. A $\mu_K: [0, \dot{i}_K) \rightarrow \mathbb{R}_+$ **vetítő függvény** hozza létre a $\tilde{\mu}_K: \text{Exp}_O(r\omega) \mapsto \mu_K(r)\omega$ geodetikus kapcsolatot.

$\mathbb{K}_K^n$	κ	ν_K	μ_K	$\dot{i}_K$
$\mathbb{H}^n$	-1	$\sinh r$	$\tanh r$	∞
$\mathbb{R}^n$	0	r	r	∞
$\mathbb{S}^n (\mathbb{P}^n)$	+1	$\sin r$	$\text{tg } r$	$\pi/2$

Itt a természetes módon azonosítottuk a $\mathcal{T}_O \mathbb{K}_K^n$ és $\mathbb{R}^n$ tereket, és $\omega \in \mathcal{S}^{n-1}$ ebben a kettős értelemben szerepel.

Folklór tény. A klasszikus projektív-metrikus terek ellipszisei kvadratikusak.

Bizonyítás. (Csak hiperbolikus metrika ellipszisére. Lásd [13].)

A kvadratikus $\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z \geq 1\}$ modellben a metrika $d(p, q) = \cosh^{-1} \langle p, q \rangle$ és $\kappa = -1$. Legyen $f > 0$ és $a > f$, továbbá $F_{\pm} = (\sinh(\pm f), 0, \cosh f)$. Akkor $C = (0, 0, 1)$.

Bármely $P = (x, y, z) \in \mathcal{E}_{d; F_-, F_+}^a \subset \mathbb{H}^2$ ponthoz van olyan $t \in [0, f]$, hogy

$$a \pm t = d(F_{\pm}, X) = \cosh^{-1}(\pm x \sinh f + z \cosh f),$$

Ennek cosh-a azt adja, hogy

$$\cosh a \cosh t \pm \sinh a \sinh t = \cosh(a \pm t) = z \cosh f \mp x \sinh f,$$

amiért $\cosh t = z \cosh f / \cosh a$ és $\sinh t = -x \sinh f / \sinh a$. Ebből

$$\frac{z^2}{\cosh^2 a / \cosh^2 f} - \frac{x^2}{\sinh^2 a / \sinh^2 f} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

következik, így

$$z^2 - x^2 \frac{\tanh^2 f}{\tanh^2 a} = \frac{\cosh^2 a}{\cosh^2 f} = \frac{1 - \tanh^2 f}{1 - \tanh^2 a}.$$

A P pont C -centrumú (ω, r) polárkoordinátáját használva $P = (\sinh r \cos \omega, \sinh r \sin \omega, \cosh r)$ adódik, amiből

$$\frac{1}{\sinh^2 r(\omega)} = \frac{\cos^2 \omega}{\sinh^2 a} + \frac{\sin^2 \omega}{(\tanh^2 a - \tanh^2 f) \cosh^2 a}.$$

Minden klasszikus geometriában

$$\frac{1}{\nu_K^2(r(\omega))} = \frac{\cos^2 \omega}{\nu_K^2(a)} + \frac{\sin^2 \omega}{(\mu_K^2(a) - \mu_K^2(f))(1 - \kappa \nu_K^2(a))}.$$

Beltrami-tétel [3]. *Ha egy projektív metrika Riemannian-féle, vagyis **minden** “infinitezimális” gömbfelülete kvadratikus, akkor konstans görbületű.*

A korábban megadott konstrukciójuk helyett a projektív-metrikus terek között a Minkowski-geometriákat és az Euklidészi geometriát az alábbi, “**belső geometriai**” **feltételek** definiálják:

A Minkowski-geometria olyan parabolikus típusú projektív-metrikus geometria, melyben a metrikus és az affin szakaszfelező pont minden szakaszra megegyezik. Euklidészinek mondunk egy Minkowski-geometriát, ha minden hipersíkra van tükrözés.

Busemann-tétel [8, 25.4]. *Egy Minkowski-geometria akkor és csak akkor Euklidészi, ha **egy** gömbfelülete kvadratikus.*

Sejtés (K.Á., 2017, [13])

Csak a konstans görbületű projektív-metrikus terekben van kvadratikus ellipszoid.

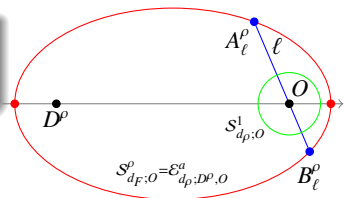
“A matematikacsinálás művészete azoknak a speciális eseteknek a megtalálásában áll, amelyek az általánosság összes csíráját tartalmazzák.” (Hilbert)

Projektív-metrikus “teszt” terek [6, II.8.3]. *A kompakt gömbbel rendelkező nyílt projektív-metrikus terek közül pontosan a **Hilbert- és a Minkowski-féle** az, amelynek bármely két egyenesre közti izometria egy projektivitás¹ megszorítottja.*

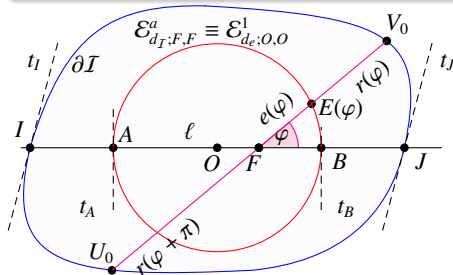
¹ Minkowski-metrika esetén ez egy affinitás.

Tétel (K.Á. [13, Theorem 4.1]). Egy Finsler-féle projektív-metrikus tér akkor és csak akkor klasszikus, ha minden kicsi gömbfelülete (köre) kvadratikus.

Bizonyítási vázlat. Az $S_{d_F;O}^0$ körökhöz mint ellipszisekhez az O pontot fókuszként rendelő d_ρ euklidészi metrikák $S_{d_\rho;O}^0$ egységgömbje, mivel a fókusz *izoreciprokális* pont, "rászorul" az érintő tér indukáltátrixára, ami ezért kvadratikus, így a tér Riemann-féle, amiből a Beltrami-tétel adja a kívánt eredményt. ■



Egy Minkowski-geometria pontosan akkor euklidészi, ha van egy kvadratikus gömbfelülete (köre). Ez Hilbert-geometriára is átvihető:



Tétel (K.Á. [13, Theorem 4.2]). Egy Hilbert-geometria pontosan akkor hiperbolikus, ha van kvadratikus gömbfelülete (köre).

Bizonyítási vázlat. Legyen a d_e euklidészi metrikára $\mathcal{E}_{d_I;F,F}^a = \mathcal{E}_{d_e;O,O}^1$. I, A, B, J az $\ell = OF$ és ∂I valamint $\mathcal{E}_{d_I;F,F}^a$ metszete.

Ekkor $\frac{e^{2a}}{e(\varphi)} - \frac{1}{e(\varphi+\pi)} = \frac{1+e^{2a}}{r(\varphi)}$, amiből $\dot{e}(0) = \dot{e}(\pi) = 0$ miatt $\dot{r}(0) = 0 = \dot{r}(\pi)$, vagyis $t_I \parallel t_J \perp \ell \perp t_A \parallel t_B$ adódik. Van olyan perspektivitás, amely megőrzi az utóbbi relációkat, és utána $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BJ}$. Eszerint $O = F$, és így I minden érintője merőleges az F és az érintési pont egyenesére. Tehát I egy kör. ■

Egy Minkowski-geometria pontosan akkor euklidészi, ha van egy infinitezimális kvadratikus gömbfelülete (köre). Ez Hilbert-geometriára is átvihető lehet, de csak annyi ismert, hogy ha minden infinitezimális gömb (kör) kvadratikusak, akkor a geometria hiperbolikus.

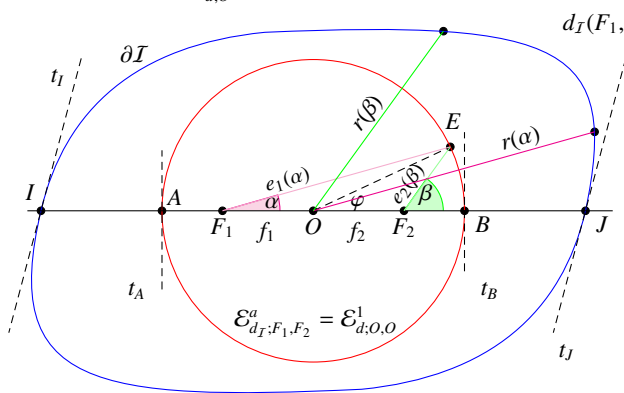
Tétel (K.Á. [17]) Egy Hilbert-metrika hiperbolikus, ha két infinitezimális köre kvadratikus. (sejtés 2016-ból KÁ & ÓT)

Ötlet. Ekvireciprokális pontok. [12, Theorem 6.2.14.]

Tétel. (K.Á. [13, Theorem 5.3]).

Egy Minkowski-geometria euklidészi, ha van kvadratikuss ellipszoidja (ellipszise).

Részletes bizonyítási vázlat. Mivel egy analitikus ellipszissel rendelkező Minkowski-geometria analitikus [13, Lemma 3.4]), innentől $\mathcal{I}$ analitikus. Mondjuk az $\mathcal{E}_{d_I;F_1,F_2}^a$ ($F_1 \neq F_2$) kvadrikának O affin centruma az origó és egyben az $\mathcal{I}$ középpontja. Ekkor $\mathcal{E}_{d_I;F_1,F_2}^a$ egy d Euklidészi metrika $\mathcal{E}_{d;O}^1$ egységköre. Mivel $t_A \perp F_1F_2 \perp t_B$, nyilván $\dot{e}_1(0) = \dot{e}_2(0) = 0$.



$$d_I(F_1, E) = \frac{e_1(\alpha)}{r(\alpha)} \text{ és } d_I(E, F_2) = \frac{e_2(\beta)}{r(\beta)},$$

$$2a = \frac{e_1(\alpha)}{r(\alpha)} + \frac{e_2(\beta)}{r(\beta)}.$$

Ennek 0-ban vett φ szerinti deriváltja és az $\mathcal{I}$ szimmetriájából következő $t_I \parallel t_J$ miatt $t_I \perp F_1F_2 \perp t_J$. Ezek szerint $t_I \parallel t_A \parallel t_B \parallel t_J$, mert a párhuzamosság nem függ a metrikától.

Legyen $\ell \parallel t_A$ és $O \in \ell$, valamint $\{C_1, C_2\} = \ell \cap \mathcal{E}_{d_I; F_1, F_2}^a$. Legyen d_e olyan Euklidészi metrika, hogy $d_e^2(O, C_1) = a^2 - f^2$ és $d_e(O, I) = 1$, amiért $\mathcal{E}_{d_I; F_1, F_2}^a \equiv \mathcal{E}_{d_e; F_1, F_2}^a$, hiszen e kvadráknak négy közös pontja és két közös érintője van. Eszerint és ezen ellipszisek definíciója miatt

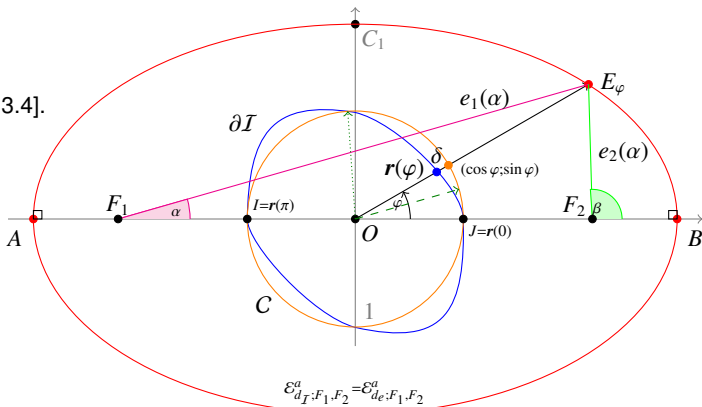
$$e_1(\alpha) + e_2(\beta) = 2a = \frac{e_1(\alpha)}{r(\alpha)} + \frac{e_2(\beta)}{r(\beta)}, \quad \text{vagyis} \quad \delta(\alpha) = -\delta(\beta) \frac{e_2(\alpha)}{e_1(\beta) + 2a\delta(\beta)},$$

ahol $\delta: \varphi \mapsto r(\varphi) - 1$. Utóbbiból $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\delta(\alpha)}{\delta(\beta)} = -\frac{a-f}{a+f} = -(F_2, F_1; B)$ adódik.

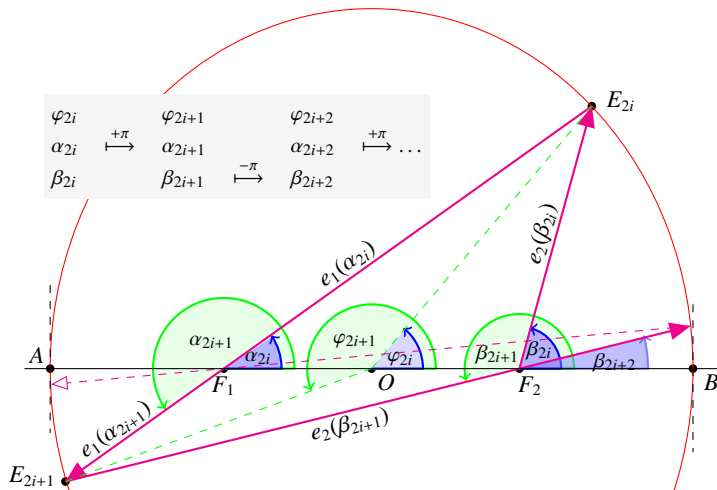
Az analitikusság miatt, ha $\delta(\beta) \neq 0$, akkor $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\delta(\alpha)}{\delta(\beta)} = (F_2, F_1; B)^k$, ahol $k \geq 2$ [13, Lemma 3.4].

Ez ellentmondás, így $\delta(\beta) = 0$ következik elegendően kicsiny β esetre.

Ugyanakkor fentebbi képlet miatt $\delta(\beta) \neq 0$ akkor és csak akkor, ha $\delta(\alpha) \neq 0$.



Nézzük a következő ábrát!

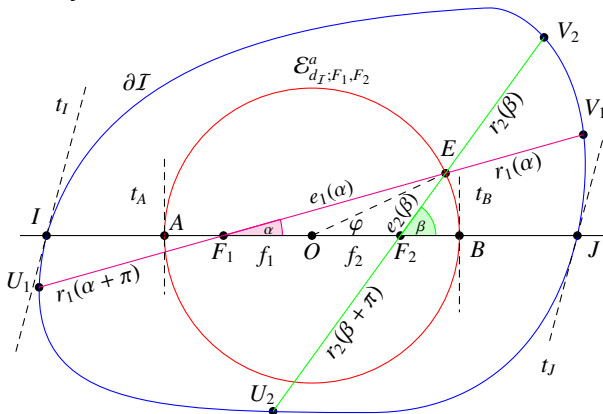


Természetesen $\beta_{2i+2} < \alpha_{2i} < \beta_{2i}$ és $\beta_{2i+1} < \alpha_{2i+1} < \beta_{2i-1}$ és könnyű igazolni, hogy $\beta_{2i} \rightarrow 0$. Eszerint elegendően nagy $i \in \mathbb{N}$ esetén $\delta(\beta_{2i}) = 0$ adódik, amiért $\delta \equiv 0$.

Tétel. (K.Á. [13, Theorem 6.4]).

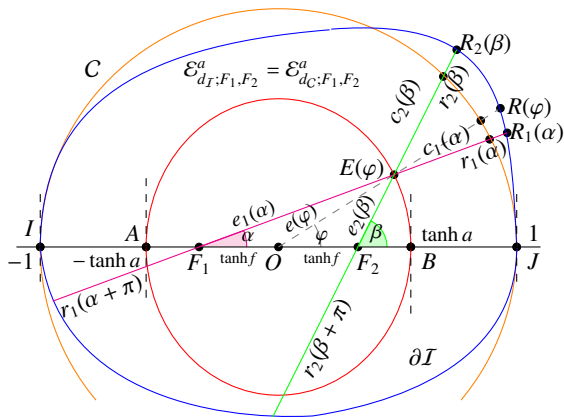
Egy analitikus Hilbert-geometria hiperbolikus, ha van egy $1/\sqrt{3}$ -nál nagyobb numerikus excentricitású, vagy van két konfokális kvadratikus ellipszise.

Bizonyítási vázlat. A Minkowski-esethez hasonló eljárás, de bonyolultabb formulák és néhány további ötlet is kell.



Az $\mathcal{E}_{d_I; F_1, F_2}^a$ egy kvadrika. Az $F_1 = F_2$ eset már kész. Tehát $F_1 \neq F_2$. Messe $\ell := F_1 F_2$ ∂I -t és $\mathcal{E}_{d_I; F_1, F_2}^a$ -t az I, A, B, J pontokban. Az $\mathcal{E}_{d_I; F_1, F_2}^a$ affin centruma legyen O . Ekkor $\frac{e^{2\alpha}}{e(\varphi)} - \frac{1}{e(\varphi + \pi)} = \frac{1 + e^{2\alpha}}{r(\varphi)}$, így $\dot{e}(0) = \dot{e}(\pi) = 0$ miatt $\dot{r}(0) = 0 = \dot{r}(\pi)$, vagyis $t_I \parallel t_J \perp \ell \perp t_A \parallel t_B$ adódik. Van olyan perspektivitás [13, Lemma 3.1], amely megőrzi e relációkat, és utána $\vec{IA} = \vec{BJ}$.

Eszerint O az $\overline{IJ}$, $\overline{AB}$ és $\overline{F_1 F_2}$ szakaszok affin középpontja. Van tehát egy olyan O középpontú, az I, J pontokon átmenő C **kör** a (C, d_C) Bolyai-síkkal $\mathcal{E}_{d_I; F_1, F_2}^a = \mathcal{E}_{d_C; F_1, F_2}^a$.

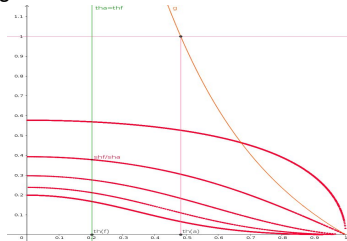


A jobboldali ábra a fenti egyenlet megoldásaira mutatja az $\varepsilon = \sinh f / \sinh a$ numerikus excentricitás értékeit $\tanh f$ függvényében $k = 3, 4, 5, 6, 7$ esetén. Látható, hogy nincs közös megoldás különböző k értékekre és $\varepsilon < 1/\sqrt{3}$ teljesül.

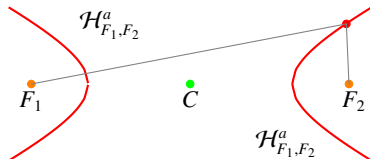
E közös ellipszisszel becsülhető az ∂I és C fókuszokból mért radiális függvényeinek különbsége. Az I és J pontok közelében ezek csak akkor térhetnek el, ha

$$\frac{1 + \tanh a}{1 - \tanh a} = \frac{\left(\frac{\tanh a - \tanh f}{\tanh a + \tanh f}\right)^{k-1} \left(\frac{1 - \tanh f}{1 + \tanh f}\right)^{k-1} + 1}{\left(\frac{\tanh a - \tanh f}{\tanh a + \tanh f}\right)^{k-1} + \left(\frac{1 - \tanh f}{1 + \tanh f}\right)^{k-1}}$$

valamely $k \in \mathbb{N}$ esetében. Ellenkező esetben ∂I és C egybeesik az I, J pontok valamely nyílt környezetében, és ebből a szögek sorozatának vizsgálatával $\partial I \equiv C$ adódik.



Egy $\mathcal{H}_{d;F_1,F_2}^a := \{P : 2a = |d(F_1, P) - d(P, F_2)|\}$ halmazt **hyperbolának** hívunk, ha F_1, F_2 fix pontok, a **fókuszok**, és $0 < a < d(F_1, F_2)/2 = f$. Az $\overline{F_1 F_2}$ szakasz C metrikus középpontját a $\mathcal{H}_{d;F_1,F_2}^a$ **metrikus centrumának** mondjuk.



Tétel. (KÁ & KJ 2017, [16]).

Egy Minkowski-metrika Euklidészi, ha van kvadratikus hiperbolája.

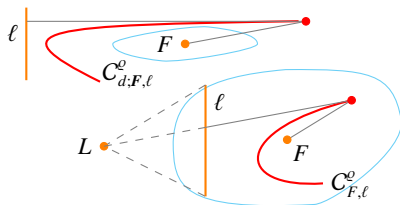
Tétel. (KÁ & KJ 2017, [16]).

Egy analitikus Hilbert-metrika hiperbolikus, ha egy hiperbolája egy affin hiperbola része.

A bizonyításról. A Minkowski-geometria esetében ugyanaz a módszer működik, mint az ellipszis vizsgálatakor.

A Hilbert-geometria esetén is ugyanazt a módszert alkalmazzuk, de vannak nem jelentéktelen különbségek:

- 1 A kvadratikusságból nem sikerült igazolni, hogy a hiperbola egy affin hiperbola része;
- 2 A radiális függvények vizsgálatakor az $\frac{1-\tanh a}{1+\tanh a} = \left| \frac{\left(\frac{\tanh f + \tanh a}{\tanh f - \tanh a}\right)^{k-1} + \left(\frac{\tanh f - 1}{\tanh f + 1}\right)^{-(k-1)}}{\left(\frac{\tanh f - 1}{\tanh f + 1}\right)^{-(k-1)} \left(\frac{\tanh f + \tanh a}{\tanh f - \tanh a}\right)^{k-1} + 1} \right|$ egyenlet adódik, melynek **nincs megoldása**.
- 3 Az I és J egy-egy környezetében való egybeesésből jóval bonyolultabb módon következik az $I \equiv C$ egybeesés, mert a hiperbola nem veszi körbe a fókuszait. ■



Egy $C_{d;F,\ell}^{\varrho} := \{P : \varrho d(\ell, P) = d(\ell, F)d(F, P)\}$ halmazt **kúpszeletnek** nevezünk, ha ℓ egy fix egyenes, a **direktrix**, az $F \notin \ell$ egy fix pont, a **fókusz**, és $\varrho > 0$. Egy kúpszelet **elliptikus**, **parabolikus** vagy **hiperbolikus** aszerint, hogy $\varrho < d(\ell, F)$, $\varrho = d(\ell, F)$ vagy $\varrho > d(\ell, F)$.

Tétel. (KÁ, 2017, [14]).

Egy Mikowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha van kvadrátikus kúpszelete.

Tamássy és Bélteky igazolta [20, 21], hogy egy Finsler-sokaság akkor és csak akkor euklidészi, ha minden ellipszis egybeesik két vele konfokális elliptikus kúpszelettel, és minden elliptikus kúpszelet egybeesik egy vele konfokális ellipszissel.

Mivel a klasszikus geometriákban minden ellipszis kvadrátikus, ez igazolja az alábbi.

Az euklidészi az egyetlen klasszikus geometria, melynek **minden** kúpszelete kvadrátikus.

Várható tétel. (KÁ, 2017, [15]).

Hilbert-geometriában nincs kvadrátikus kúpszelet.

Várható tétel. (K.Á. 2017, [15]).

Hilbert-geometriában nincs ellipszissel vagy hiperbolával egybeeső kúpszelet.



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

Kurusa Árpád
SZTE TTIK Bolyai Intézet

kurusa@math.u-szeged.hu
<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

Bibliográfia szerző szerinti sorban I

- [1] R. Alexander, Planes for which the lines are the shortest paths between points, *Illinois J. Math.*, **22:2** (1978), 177–190.
- [2] R. V. Ambartsumian, A note on pseudo-metrics on the plane, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **37** (1976), 145–155.
- [3] E. Beltrami, Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Opere*, I (1865), 262–280.
- [4] W. Blaschke, Integralgeometrie 11, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11** (1936), 359–366.
- [5] H. Busemann, Geometries in which the planes minimize area, *Ann. Mat. Pure Appl.*, **55:4** (1961), 171–190.
- [6] H. Busemann, *Recent Synthetic Differential Geometry*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, **54**, Springer, New York, 1970.
- [7] H. Busemann, Problem IV: Desarguesian Spaces, *Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math.*, **28** (1976), 131–141.
- [8] H. Busemann and P. J. Kelly, *Projective Geometries and Projective Metrics*, Academic Press, New York, 1953.
- [9] M. W. Crofton, Probability, *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., **19** (1885), 768–788.
- [10] G. Hamel, Über die Geometrien, in denen die Graden die kürzestens sind, *Math. Ann.*, **57** (1903), 231–264.

Bibliográfia szerző szerinti sorban II

- [11] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Göttinger Nachrichten, (1900), 253–297; *Archiv der Math. Physik* (3), **1** (1901), 44–63, 213–237; angolul: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>.
- [12] R. J. Gardner, *Geometric tomography*, Encyclopedia Math. and Appl. 58, Cambridge UP, Cambridge, 2006.
- [13] Á. Kurusa, Projective metrics with quadratic ellipses, *manuscript*, (2017), submitted.
- [14] Á. Kurusa, Minkowski metrics with quadratic conic curves, *manuscript*, (2017), submitted.
- [15] Á. Kurusa, Hilbert metrics with conical ellipses and hyperbolas, *manuscript*, (2017).
- [16] Á. Kurusa and J. Kozma, Projective metrics with quadratic hyperbolas, *manuscript*, (2017), submitted.
- [17] Á. Kurusa and T. Ódor, Beltrami's theorem in Hilbert geometries, *preliminary manuscript*, (2018).
- [18] A. V. Pogorelov, A complete solution of Hilbert's fourth problem, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1979), 46–49.
- [19] Z. I. Szabó, Hilbert's fourth problem I., *Adv. Math.*, **59** (1986), 185–301; doi: [10.1016/0001-8708\(86\)90056-3](https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90056-3).
- [20] L. Tamássy and K. Béteky, On the coincidence of two kinds of ellipses in Minkowskian and Finsler planes, *Publ. Math. Debrecen*, **31:3-4** (1984), 157–161.
- [21] L. Tamássy and K. Béteky, On the coincidence of two kinds of ellipses in Riemannian and in Finsler spaces, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, **46** (1988), 1193–1200.

● **Cím:** *Projektív metrikák és Beltrami tétele*

Kivonat: A projektív metrikák jellemzője, hogy a szakaszok pontjaira a végpontoktól mért távolságok összege éppen a végpontok távolsága. Felvetődik a kérdés, hogy a kvadratikusság (görbék) karakterizálja-e, hogy pontjai két fix ponttól mért távolságainak összege állandó. Ha a fix pontok egybeesnek, akkor ez a probléma a gömbfelületek (körök) kvadratikusságára kérdez. Az első ilyen jellegű eredményt Beltrami bizonyította 1865-ben: ha egy projektív-metrikus térben minden infinitézimális gömbfelület (kör) kvadratikusságú, akkor az a tér a hiperbolikus, az Euklidészi vagy az elliptikus geometria.

A második, és ezidáig utolsó ilyen eredményt Busemann bizonyította 1953-ban (vagy korábban....): egy Minkowski-geometria akkor és csak akkor Euklidészi, ha az indukált metrika kvadratikusságú. Az előadás során ez irányú kutatásaim hátterét és néhány friss eredményét mutatom be. Például Busemann előbb említett eredményét a Hilbert-geometriákra is igazoljuk.

● **Title:** *Projective metrics and Beltrami's theorem*

Abstract: Projective metrics have the property that the sum of the distances of any point of a segment from the endpoints is a constant. The question arises if the quadratical surfaces (curves) Q have the property, that the sum of the distances of any point of Q from two fixed points is also a constant. If the fix points coincide, then this problem asks about the quadracity of the spheres (circles).

The first result in this direction was proved by Beltrami in 1865: if every infinitesimal sphere (circle) of a projective-metric space is quadratical, then the space is either the hiperbolic, the euklidean or the elliptic geometry.

The second, and so far, the last such result was given by Busemann in 1953 (or earlier....): a Minkowski-geometry is euclidean if and only if its indicatrix is quadratical.

During the talk I present the background and some of the freshest results of my research on this subject. For example the above mentioned result of Busemann is to be proved for Hilbert geometries.

Az előadás felépítése

- 1 Projektív-metrikus geometriák
- 2 Projektív metrikák ellipszisei
 - A kvadratikuság problémája
 - A klasszikus geometriák
 - Korábbi eredmények és egy sejtés
- 3 Kvadratikus gömbök (körök)
- 4 Kvadratikus ellipszoidok (ellipszisek)
 - Minkowski-geometriában
 - Hilbert-geometriában
- 5 Kvadratikus hiperbolák
- 6 Kvadratikus kúpszeletek