

Kvadratikus projektív metrikák

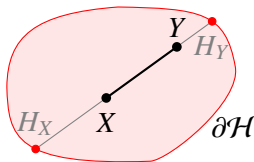
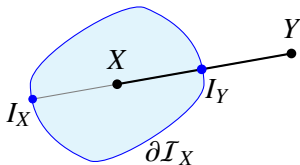
Quadratic projective metrics

Kurusa Árpád

<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

<http://www.math.u-szeged.hu/>

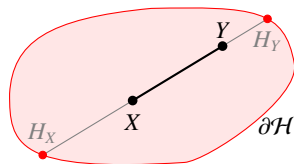
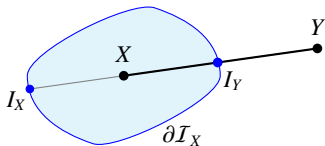


A XIX. század végén már ismertek voltak a Bolyai-féle hiperbolikus, az Euklidészi és a gömbi geometria (ezek az úgynevezett *klasszikus geometriák*) általánosításai.

Hilbert-metrika. $d_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definíciója

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } X = Y, \\ \frac{1}{2} |\ln(X, Y; H_X, H_Y)|, & \text{ha } X \neq Y, \end{cases}$$

ahol $\mathcal{H}$ az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos tartománya, és $\overline{H_X H_Y} = \mathcal{H} \cap XY$.



Minkowski-metrika. $d_I: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definíciója $d_I(X, Y) = (Y, I_Y; X)$, ahol I , az *indikátrix*, az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos, centrálszimmetrikus tartománya, és $\overline{I_X I_Y} = I \cap XY$.

Elliptikus metrika. $d: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definíciója $d(X, Y) = \arccos |\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle|$, ahol $\mathbb{P}^n$ pontjai az S^n átellenes pontpárjai, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pedig $\mathbb{R}^{n+1}$ egy euklidészi metrikája.

Közös vonásuk, hogy mind a *projektív sík egy-egy részhalmaza* és a metrikára teljesül a *szigorú háromszög-egyenlőtlenség*.

Hilbert IV. problémája (Hilbert 1900, [11])

- 1 Határozzuk meg az összes olyan folytonos és teljes d metrikát az n -dimenziós $\mathbb{P}^n$ projektív tér (nem feltétlenül valódi) $\mathcal{D}$ részhalmazain, amelyben *bármely két pont közötti legrövidebb út az egyenesükön vezet!* Ezek a *projektív metrikák*.
- 2 Ezek birtokában tanulmányozzuk a $(\mathcal{D}, d)$ *projektív-metrikus geometriákat!*

Hamel igazolta [10], hogy **A** $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$ konvex, vagy **B** $\mathcal{D} = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$, vagy **C** $\mathcal{D} = \mathbb{P}^n$. A kapott $(\mathcal{D}, d)$ párra rendre azt mondjuk, hogy *hiperbolikus*, *parabolikus*, illetve *elliptikus*.

Blaschke bizonyította [4], hogy *Crofton* formulája [9] bizonyos projektív metrikákra is érvényes az egyenesek halmazán megfelelő mértéket választva.

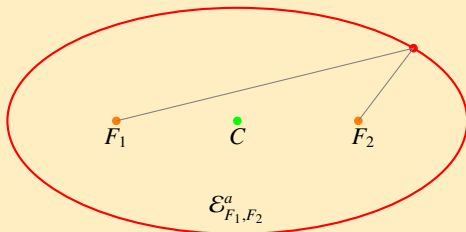
Busemann vetette fel [5], hogy talán minden projektív metrika előáll valamely, a hipersíkok sokaságán adott kvázi pozitív μ "mérték" segítségével úgy, hogy két pont távolságát a köztük lévő szakaszt metsző hipersíkok halmazának $\mu/2$ -mértéke definiálja.

Ezt *Pogorelov* variációs módszerrel igazolta a sík esetére [18], majd egyszerűbb bizonyítások is születtek a síkra [2, 1], végül *Z.I. Szabó* adott teljes bizonyítást [19].

Busemann szerint [7]:

"... Hilbert [...] nem volt tudatában ezen metrikák hatalmas mennyiségének, így a probléma második része ... elkerülhetetlenül szűkül az érdekes geometriák speciális vagy speciális osztályba tartozó metrikáinak vizsgálatára".

A projektív metrikákat az definiálja, hogy *azon pontok halmaza, melyek két ponttól mért távolságainak összege éppen a két pont távolsága, az lineáris görbe* (a két pontot összekötő szakasz). Adódik a kérdés [14], hogy *vajon azon pontok halmaza, melyek két ponttól mért távolságainak összege valamely fix értékkel nagyobb a két pont távolságánál, az kvadratikus görbe?*



Egy $\mathcal{E}_{d;F_1,F_2}^a := \{P : 2a = d(F_1, P) + d(P, F_2)\}$ halmazt **ellipszisnek** nevezünk, ha F_1, F_2 fix pontok, a **fókuszok**, és $a > f := d(F_1, F_2)/2$.

A **kör** olyan ellipszis, amelyre $f = 0$. Az $\overline{F_1 F_2}$ szakasz d -metrikus C felezőpontját az $\mathcal{E}_{d;F_1,F_2}^a$ ellipszis **metrikus centrumának** nevezzük.

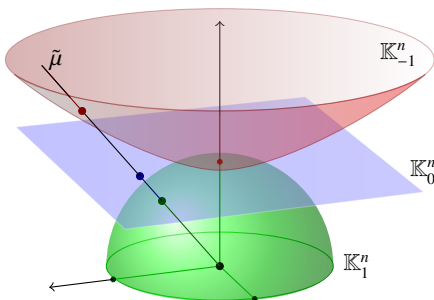


Mely projektív metrikáknak vannak kvadratikus ellipszisei?



Gyengén/erősen kvadratikusnak nevezünk egy projektív metrikát, ha **egy/minden** ellipszise kvadratikus. Ha valamely rögzített $\varepsilon \in [0, 1)$ esetén $\mathcal{E}_{d;F_1,F_2}^a$ kvadratikus **egy/minden** (F_1, F_2) pontpárra és **egy/minden** $a > 0$ esetén, melyre $\varepsilon a = d(F_1, F_2)$, akkor **gyenge/erős** (ε, a) -kvadratikuságról beszélünk.

Klasszikus geometriák kvadratikus modelljeinek vetítése adja a klasszikus projektív metrikákat.



A $\nu_K: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ **méretfüggvény** olyan, hogy $\nu_K(r)\mathcal{S}^{n-1}$ izometrikus az $r > 0$ sugarú $\mathbb{K}_K^n$ metrikus gömbfelülettel. A $\mu_K: [0, i_K) \rightarrow \mathbb{R}_+$ **vetítő függvény** hozza létre a $\tilde{\mu}_K: \text{Exp}_O(r\omega) \mapsto \mu_K(r)\omega$ geodetikus kapcsolatot.

$\mathbb{K}_K^n$	κ	ν_K	μ_K	i_K
$\mathbb{H}^n$	-1	$\sinh r$	$\tanh r$	∞
$\mathbb{R}^n$	0	r	r	∞
$\mathbb{S}^n(\mathbb{P}^n)$	+1	$\sin r$	$\text{tg } r$	$\pi/2$

Itt a természetes módon azonosítottuk a $\mathcal{T}_O\mathbb{K}_K^n$ és $\mathbb{R}^n$ tereket, és $\omega \in \mathcal{S}^{n-1}$ ebben a kettős értelemben szerepel.

Folklór tény. A klasszikus projektív metrikák erősen kvadratikusak.

Bizonyítás. (Csak hiperbolikus metrika ellipszisére. Lásd [14].)

A kvadratikus $\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z \geq 1\}$ modellben a metrika $d(p, q) = \cosh^{-1}\langle p, q \rangle$ és $\kappa = -1$. Legyen $f > 0$ és $a > f$, továbbá $F_{\pm} = (\sinh(\pm f), 0, \cosh f)$. Akkor $C = (0, 0, 1)$.

Bármely $P = (x, y, z) \in \mathcal{E}_{d;F_-,F_+}^a \subset \mathbb{H}^2$ ponthoz van olyan $t \in [0, f]$, hogy

$$a \pm t = d(F_{\pm}, X) = \cosh^{-1}(\pm x \sinh f + z \cosh f),$$

Ennek cosh-a azt adja, hogy

$$\cosh a \cosh t \pm \sinh a \sinh t = \cosh(a \pm t) = z \cosh f \mp x \sinh f,$$

amiért $\cosh t = z \cosh f / \cosh a$ és $\sinh t = -x \sinh f / \sinh a$. Ebből

$$\frac{z^2}{\cosh^2 a / \cosh^2 f} - \frac{x^2}{\sinh^2 a / \sinh^2 f} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

következik, így

$$z^2 - x^2 \frac{\tanh^2 f}{\tanh^2 a} = \frac{\cosh^2 a}{\cosh^2 f} = \frac{1 - \tanh^2 f}{1 - \tanh^2 a}.$$

A P pont C -centrumú (ω, r) polárkoordinátáját használva $P = (\sinh r \cos \omega, \sinh r \sin \omega, \cosh r)$ adódik, amiből

$$\frac{1}{\sinh^2 r(\omega)} = \frac{\cos^2 \omega}{\sinh^2 a} + \frac{\sin^2 \omega}{(\tanh^2 a - \tanh^2 f) \cosh^2 a}.$$

Minden klasszikus geometriában

$$\frac{1}{\nu_K^2(r(\omega))} = \frac{\cos^2 \omega}{\nu_K^2(a)} + \frac{\sin^2 \omega}{(\mu_K^2(a) - \mu_K^2(f))(1 - \kappa \nu_K^2(a))}.$$

Sejtés (K.Á., 2017, [14])

Pontosan a konstans görbületű projektív metrikák kvadratikusak.

Az egyetlen korábbi általános eredmény, amely alátámasztja a Sejtést, az a következő.

Beltrami-tétel [3]. *Ha egy projektív metrika Riemannian-féle, vagyis minden “infinitezimális” gömbfelülete kvadratikus, akkor konstans görbületű.*

Speciális projektív metrikákra is lényegében csak egyetlen korábbi, a ma szokásos felfogásban szinte triviális eredmény [8, 25.4] támasztja alá a Sejtést.

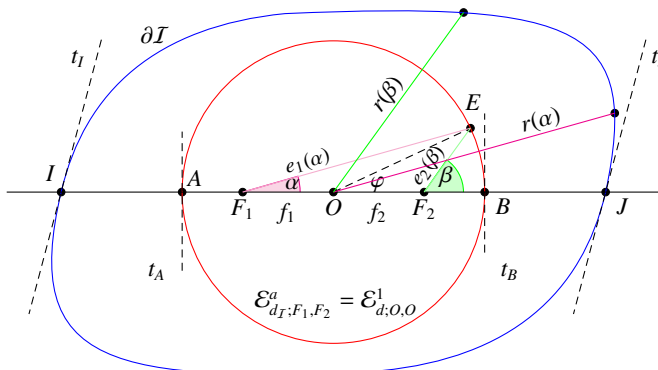
Gyengén $(0, 1)$ -kvadratikus Minkowski-metrika Euklidészi.

A Sejtés más speciális esetekben való tesztelésére “érdemes” metrikákat **Busemann** tétele [6] jelöli ki, mely szerint a kompakt gömbbel rendelkező nyílt projektív-metrikus terek közül pontosan a **Hilbert- és a Minkowski-féle** az, amelynek bármely két egyenese közti izometria egy projektivitás¹ megszorítottja.

¹ Minkowski-metrika esetén ez egy affinitás.

Tétel. (K.Á. 2016, [14, Theorem 4.3]) *Gyengén kvadratikus Minkowski-metrika Euklidészi.*

Részletes bizonyítási vázlat. Mivel egy analitikus ellipszissel rendelkező Minkowski-metrika analitikus [14, Lemma 3.4]), innentől *I analitikus*. Mondjuk $\mathcal{E}_{d_I;F_1,F_2}^a$ egy kvadrika, az O affin centruma pedig az origó és egyben I középpontja. Ekkor $\mathcal{E}_{d_I;F_1,F_2}^a$ egy d Euklidészi metrika $\mathcal{E}_{d;O}^1$ egységköre. Mivel $t_A \perp F_1F_2 \perp t_B$, nyilván $\dot{e}_1(0) = \dot{e}_2(0) = 0$.



Mivel $d_I(F_1, E) = \frac{e_1(\alpha)}{r(\alpha)}$ és $d_I(E, F_2) = \frac{e_2(\beta)}{r(\beta)}$, adódik, hogy

$$2a = \frac{e_1(\alpha)}{r(\alpha)} + \frac{e_2(\beta)}{r(\beta)}.$$

Ennek 0-ban vett φ szerinti deriváltja és az I szimmetriájából következő $t_I \parallel t_J$ miatt $t_I \perp F_1F_2 \perp t_J$. Eszerint $t_I \parallel t_A \parallel t_B \parallel t_J$, mert a párhuzamosság nem függ a metrikától.

Legyen ℓ a t_A egyenessel párhuzamos egyenes az O ponton keresztül. Legyen C_1 és C_2 ennek metszete az $\mathcal{E}_{d_I;F_1,F_2}^a$ ellipszissel.

Válasszunk most olyan d_e Euklidészi metrikát, melyre $d_e^2(O, C_1) = a^2 - f^2$ és $d_e(O, I) = 1$. Ekkor $\mathcal{E}_{d_I; F_1, F_2}^a \equiv \mathcal{E}_{d_e; F_1, F_2}^a$, mivel e kvadrikáknak 4 közös pontja és 2 közös érintője van. Eszerint és ezen ellipszisek definíciója miatt tehát

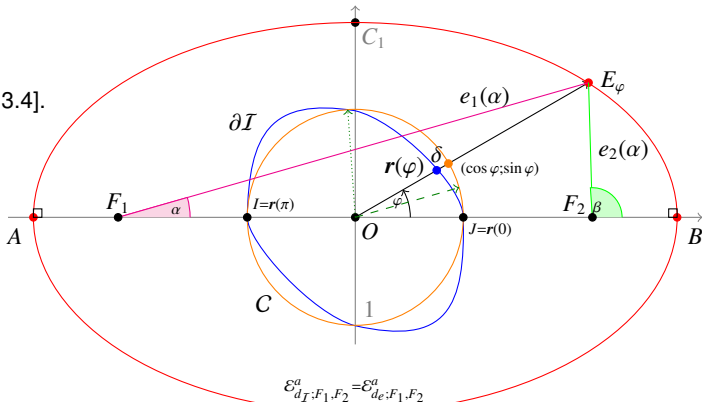
$$e_1(\alpha) + e_2(\beta) = 2a = \frac{e_1(\alpha)}{r(\alpha)} + \frac{e_2(\beta)}{r(\beta)}, \quad \text{vagyis} \quad \delta(\alpha) = -\delta(\beta) \frac{e_2(\alpha)}{e_1(\beta) + 2a\delta(\beta)},$$

ahol $\delta: \varphi \mapsto r(\varphi) - 1$. Utóbbiból $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\delta(\alpha)}{\delta(\beta)} = -\frac{a-f}{a+f} = -(F_2, F_1; B)$ adódik.

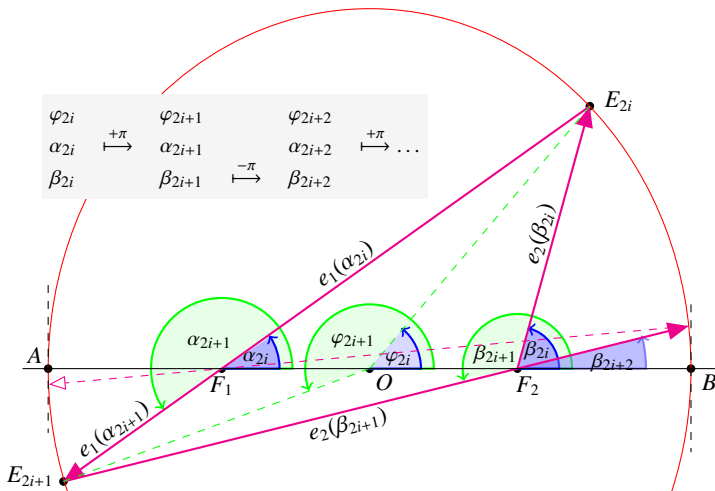
Az analitikusság miatt, ha $\delta(\beta) \neq 0$, akkor $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\delta(\alpha)}{\delta(\beta)} = (F_2, F_1; B)^k$, ahol $k \geq 2$ [14, Lemma 3.4].

Ez ellentmondás, így $\delta(\beta) = 0$ következík elegendően kicsiny β esetére.

Ugyanakkor fentebbi képlet miatt $\delta(\beta) \neq 0$ akkor és csak akkor, ha $\delta(\alpha) \neq 0$.



Nézzük a következő ábrát!

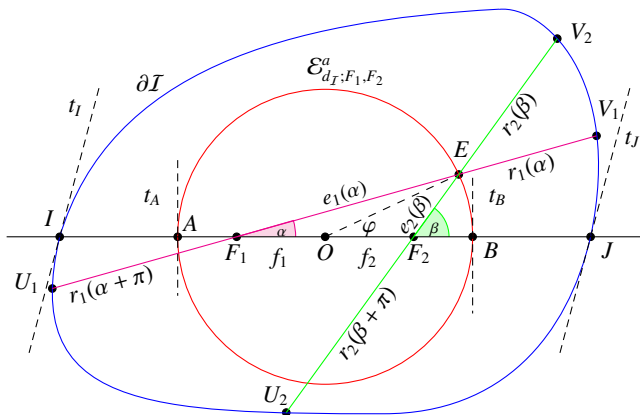


Természetesen $\beta_{2i+2} < \alpha_{2i} < \beta_{2i}$ és $\beta_{2i+1} < \alpha_{2i+1} < \beta_{2i-1}$ és könnyű igazolni, hogy $\beta_{2i} \rightarrow 0$. Eszerint elegendően nagy $i \in \mathbb{N}$ esetén $\delta(\beta_{2i}) = 0$ adódik, amiért $\delta \equiv 0$. ■

Tétel. (K.Á. 2016, [14, Theorem 5.1 és Theorem 5.5]).

Egy Hilbert-metrika Bolyai-féle hiperbolikus, ha **A** gyengén $(0, a)$ -kvadratikus ($a > 0$), vagy **B** gyengén (ε, a) -kvadratikus analitikus ($\varepsilon > 0, a > 1/\sqrt{3}$), vagy **C** van két konfokális kvadratikus ellipszise.

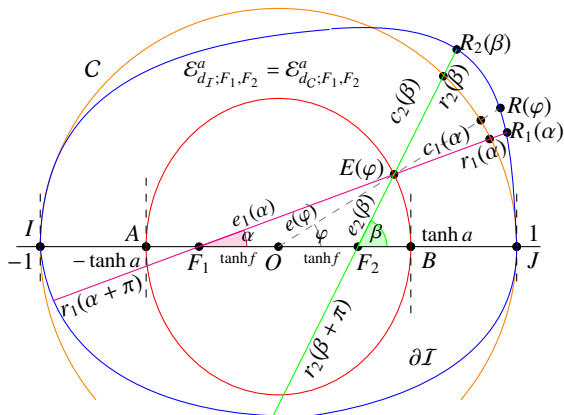
Bizonyítási vázlat. A módszer hasonló a Minkowski-esethez, de bonyolultabb formulák és néhány további ötlet is kell. Mondjuk $\mathcal{E}_{d_I; F_1, F_2}^a$ egy kvadrika és O az affin centruma.



Ha $F_1 \neq F_2$, akkor legyen $\ell = F_1 F_2$, ellenkező esetben $\ell = OF_1$. ℓ metszi ∂I -t és $\mathcal{E}_{d_I; F_1, F_2}^a$ -t az I, A, B, J pontokban. Alkalmos projektivitás után az érintőkre $t_I \parallel t_A \parallel t_B \parallel t_J$.

Ha $F_1 = F_2$, akkor ebből $O = F_1$ következik, ezzel igazolva az állítást a $(0, a)$ -kvadratikusagra.

Ha $F_1 \neq F_2$, akkor egy C **körre** a (C, d_C) Bolyai-síkkal $\mathcal{E}_{d_I; F_1, F_2}^a = \mathcal{E}_{d_C; F_1, F_2}^a$.



E közös ellipszisszel becsülhető az ∂I és C fókuszokból mért radiális függvényeinek különbsége. Az I és J pontok közelében ezek csak akkor térhetnek el, ha

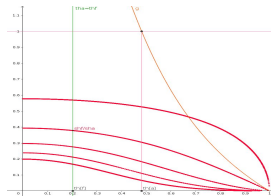
$$\frac{1 + \tanh a}{1 - \tanh a} = \frac{\left(\frac{\tanh a - \tanh f}{\tanh a + \tanh f}\right)^{k-1} \left(\frac{1 - \tanh f}{1 + \tanh f}\right)^{k-1} + 1}{\left(\frac{\tanh a - \tanh f}{\tanh a + \tanh f}\right)^{k-1} + \left(\frac{1 - \tanh f}{1 + \tanh f}\right)^{k-1}}$$

valamely $k \in \mathbb{N}$ esetében. Ellenkező esetben ∂I és C egybeesik az I, J pontok valamely nyílt környezetében, és ebből a szögek sorozatának vizsgálatával $\partial I \equiv C$ adódik.

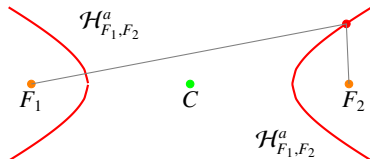
A jobboldali ábra a fenti egyenlet megoldásaira mutatja az $\varepsilon = \sinh f / \sinh a$ numerikus excentricitás értékeit $\tanh f$ függvényében $k = 3, 4, 5, 6, 7$ esetén. Látható, hogy nincs közös megoldás különböző k értékekre és $\varepsilon < 1/\sqrt{3}$.

Sejtés. (KÁ & ÓT 2016). Egy Hilbert-metrika hiperbolikus, ha két infinitezimális köre kvadratikus.

Ötlet. Ekvireciprokális pontok. [12, Theorem 6.2.14.]



Egy $\mathcal{H}_{d;F_1,F_2}^a := \{P : 2a = |d(F_1, P) - d(P, F_2)|\}$ halmazt **hyperbolának** hívunk, ha F_1, F_2 fix pontok, a **fókuszok**, és $0 < a < d(F_1, F_2)/2 = f$. Az $\overline{F_1 F_2}$ szakasz C metrikus középpontját a $\mathcal{H}_{d;F_1,F_2}^a$ **metrikus centrumának** mondjuk.



Tétel. (KÁ & KJ 2017, [17]).

Egy Minkowski-metrika Euklidészi, ha van kvadratikus hiperbolája.

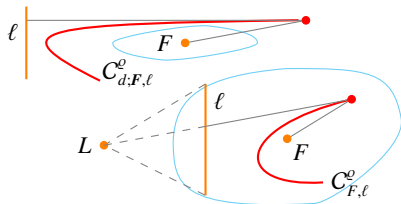
Tétel. (KÁ & KJ 2017, [17]).

Egy analitikus Hilbert-metrika Bolyai-féle, ha egy hiperbolája egy affin hiperbola része.

A bizonyításról. A Minkowski-geometria esetében ugyanaz a módszer működik, mint az ellipszis vizsgálatakor.

A Hilbert-geometria esetén is ugyanazt a módszert alkalmazzuk, de vannak nem jelentéktelen különbségek:

- 1 A kvadratikuságból nem sikerült igazolni, hogy a hiperbola egy affin hiperbola része;
- 2 A radiális függvények vizsgálatakor az $\frac{1-\tanh a}{1+\tanh a} = \left| \frac{\left(\frac{\tanh f + \tanh a}{\tanh f - \tanh a}\right)^{k-1} + \left(\frac{\tanh f - 1}{\tanh f + 1}\right)^{-(k-1)}}{\left(\frac{\tanh f - 1}{\tanh f + 1}\right)^{-(k-1)} \left(\frac{\tanh f + \tanh a}{\tanh f - \tanh a}\right)^{k-1} + 1} \right|$ egyenlet adódik, melynek **nincs megoldása**.
- 3 Az I és J egy-egy környezetében való egybeesésből jóval bonyolultabb módon következik az $I \equiv C$ egybeesés, mert a hiperbola nem veszi körbe a fókuszait. ■



Egy $C_{d;F,l}^{\varrho} := \{P : \varrho d(\ell, P) = d(\ell, F)d(F, P)\}$ halmazt **kúpszeletnek** nevezünk, ha ℓ egy fix egyenes, a **direktrix**, az $F \notin \ell$ egy fix pont, a **fókus**, és $\varrho > 0$. Egy kúpszelet **elliptikus**, **parabolikus** vagy **hiperbolikus** aszerint, hogy $\varrho < d(\ell, F)$, $\varrho = d(\ell, F)$ vagy $\varrho > d(\ell, F)$.

Tétel. (KÁ, 2017, [15]).

Egy Mikowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha van kvadratikus kúpszelete.

Tamássy és Bélteky igazolta [20, 21], hogy egy Finsler-sokaság akkor és csak akkor euklidészi, ha minden ellipszis egybeesik két vele konfokális elliptikus kúpszelettel, és minden elliptikus kúpszelet egybeesik egy vele konfokális ellipszissel.

Ez és a klasszikus geometriák erős kvadratikussága igazolja a következőt.

Az euklidészi az egyetlen klasszikus geometria, melynek **minden** kúpszelete kvadratikus.

Várható tétel. (KÁ, 2017, [16]).

Hilbert-geometriában nincs kvadratikus kúpszelet.

Várható tétel. (K.Á. 2017, [16]).

Hilbert-geometriában nincs ellipszissel vagy hiperbolával egybeeső kúpszelet.



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

Bibligráfia szerző szerinti sorban I

- [1] R. Alexander, Planes for which the lines are the shortest paths between points, *Illinois J. Math.*, **22:2** (1978), 177–190.
- [2] R. V. Ambartzumian, A note on pseudo-metrics on the plane, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **37** (1976), 145–155.
- [3] E. Beltrami, Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Opere*, I (1865), 262–280.
- [4] W. Blaschke, Integralgeometrie 11, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11** (1936), 359–366.
- [5] H. Busemann, Geometries in which the planes minimize area, *Ann. Mat. Pure Appl.*, **55:4** (1961), 171–190.
- [6] H. Busemann, *Recent Synthetic Differential Geometry*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, **54**, Springer, New York, 1970.
- [7] H. Busemann, Problem IV: Desarguesian Spaces, *Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math.*, **28** (1976), 131–141.
- [8] H. Busemann and P. J. Kelly, *Projective Geometries and Projective Metrics*, Academic Press, New York, 1953.
- [9] M. W. Crofton, Probability, *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., **19** (1885), 768–788.
- [10] G. Hamel, Über die Geometrien, in denen die Graden die kürzestens sind, *Math. Ann.*, **57** (1903), 231–264.

Bibligráfia szerző szerinti sorban II

- [11] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, *Göttinger Nachrichten*, (1900), 253–297; *Archiv der Math. Physik* (3), **1** (1901), 44–63, 213–237; angolul: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>.
- [12] R. J. Gardner, *Geometric tomography*, *Encyclopedia Math. and Appl.* 58, Cambridge UP, Cambridge, 2006.
- [13] D. Kay, The ptolemaic inequality in Hilbert geometry, *Pacific J. Math.*, **21** (1967), 293–301.
- [14] Á. Kurusa, Projective metrics with quadratic ellipses, *manuscript*, (2016), submitted.
- [15] Á. Kurusa, Minkowski metrics with quadratic conic curves, *manuscript*, (2017), submitted.
- [16] Á. Kurusa, Hilbert metrics with conical ellipses and hyperbolas, *manuscript*, (2017).
- [17] Á. Kurusa and J. Kozma, Projective metrics with quadratic hyperbolas, *manuscript*, (2017), submitted.
- [18] A. V. Pogorelov, A complete solution of Hilbert's fourth problem, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1979), 46–49.
- [19] Z. I. Szabó, Hilbert's fourth problem I., *Adv. Math.*, **59** (1986), 185–301; doi: [10.1016/0001-8708\(86\)90056-3](https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90056-3).
- [20] L. Tamássy and K. Bélteky, On the coincidence of two kinds of ellipses in Minkowskian and Finsler planes, *Publ. Math. Debrecen*, **31:3-4** (1984), 157–161.
- [21] L. Tamássy and K. Bélteky, On the coincidence of two kinds of ellipses in Riemannian and in Finsler spaces, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, **46** (1988), 1193–1200.

● **Cím:** *Kvadratikus projektív metrikák*

Kivonat: A projektív metrikák jellemzője, hogy a lineáris szakaszok pontjaira a végpontoktól mért távolságok összege éppen a végpontok távolsága.

Felvetődik a kérdés, hogy a kvadratikus görbéket is karakterizálja e, hogy pontjainak két fix ponttól mért távolságait összeadva egy állandót kapunk. Az ilyen projektív metrikákat kvadratikusnak hívjuk, és az a sejtésem, hogy pontosan a konstans görbületű projektív metrikák kvadratikusak. A sejtést korábban csak Beltrami 1865-ös Busemann 1953-as tétele támasztotta alá, melyek azt állítják, hogy ha egy projektív metrika Riemann-féle, vagyis minden infinitezimális gömbfelülete kvadratikus, akkor konstans görbületű, illetve egy Minkowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha egy gömbfelülete kvadratikus.

Az előadás a sejtés hátterét és az azt alátámasztó néhány eredményemet mutatja be röviden szólva a bizonyításokról is.

● **Title:** *Quadratic projective metrics*

Abstract: Projective metrics have the property that the distances of any point of any linear segment from the endpoints sum up to a constant, the distance of the endpoints.

The question arises if the quadratic curves has a similar property, namely, the distances of any point of a quadratic curve from two fixed points sum up to a constant, bigger than the distance of the fixed points. Such projective metrics are called quadratic, and it is my conjecture, that exactly the projective metrics of constant curvature are quadratic.

Previously only Beltrami's theorem from 1865 and Busemann's theorem from 1953 supported the conjecture. These theorems state respectively that if a projective metric is Riemannian, i.e. every infinitesimal sphere is quadratic, than it is of constant curvature, and a sphere of a Minkowski-metric is quadratic if and only if the metric is Euclidean.

The talk describes the background of the conjecture and presents some new supporting results of mine with some words about the proofs.

Az előadás felépítése

1 Projektív-metrikus geometriák

2 Projektív metrikák kvadratikussága

- Klasszikus geometriák
- Sejtés és korábbi eredmények
- Gyengén kvadratikus Minkowski-metrikák
- Gyengén kvadratikus Hilbert-metrikák
- Hiperbolák
- Kúpszeletek