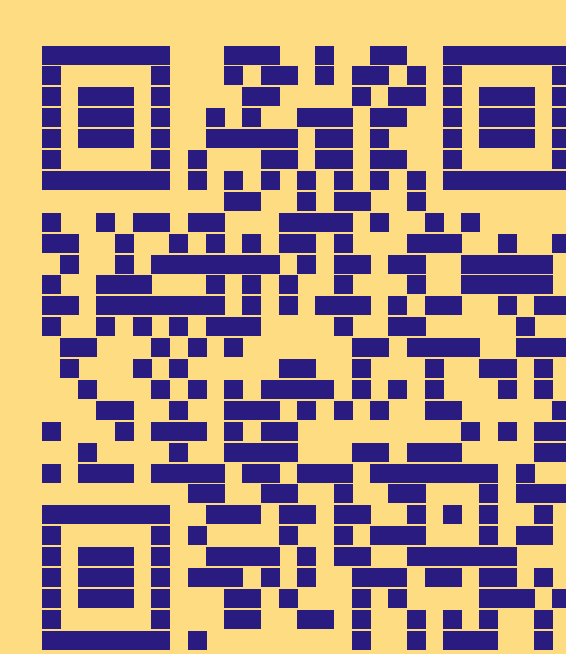




Kvadratikus projektív metrikák

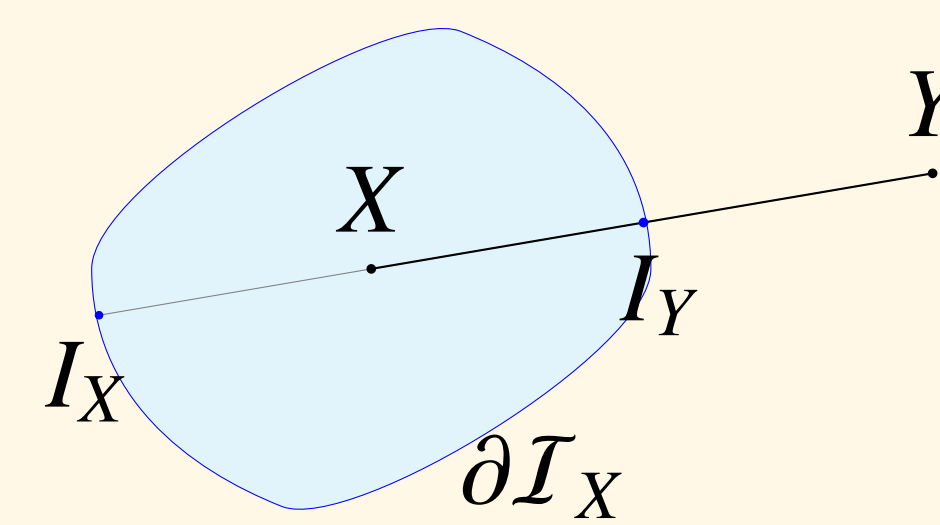
Kurusa Árpád

Korábbi ismert metrikák

A hiperbolikus távolság általánosítása a $d_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ Hilbert-metrika. Definíciója

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } X = Y, \\ \frac{1}{2} |\ln(X, Y; H_X, H_Y)|, & \text{ha } X \neq Y, \end{cases}$$

ahol $\mathcal{H}$ az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos tartománya, és $\overline{H_X H_Y} = \mathcal{H} \cap XY$.



Az Euklidészi távolság általánosítása a $d_I: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Minkowski-metrika. Definíciója $d_I(X, Y) = (Y, I_Y; X)$, ahol $\mathcal{I}$, az *indikátrix*, az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos, centrálisimmetrikus tartománya, és $\overline{I_X I_Y} = \mathcal{I}_X \cap XY$.

A gömbi távolság általánosítása a $d: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$ elliptikus metrika. Definíciója $d(X, Y) = \arccos |\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle|$, ahol $\mathbb{P}^n$ pontjai az S^n átellenes pontpárjai, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pedig $\mathbb{R}^{n+1}$ egy euklidészi metrikája.

Hilbert IV. problémája

A matematikusok 1900-ban tartott világtalálkozóján Hilbert 24 olyan problémát vetett fel amelyeket a matematika következő évtizedének tekintetében a legfontosabbnak vélt [9]. Az általa már ismert metrikák általánosításaként fogalmazta meg a IV. problémát, ami mai fogalmazásban a következő két feladat:

- Határozzuk meg az összes olyan (a szokásos topológiára nézve) folytonos és (Cauchy-értelemben) teljes d metrikát az n -dimenziós $\mathbb{P}^n$ projektív tér megfelelő $\mathcal{D}$ részhalmazain, amely teljesíti a szigorú háromszög-egyenlőtlenséget.
- Tanulmányozzuk az ilyen metrikák által adott geometriákat!

Az első feladat megoldásait *projektív metrikáknak* nevezzük.

Projektív metrikák meghatározása

Hamel, aki Hilbert tanítványa volt, 1903-ban már közölte is az első eredményt [8], mely szerint pontosan három eset lehetséges:

- $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n$ konvex, mely esetben d -t *hiperbolikusnak* mondjuk,
- $\mathcal{D} = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n$, mely esetben d -t *parabolikusnak* mondjuk, és
- $\mathcal{D} = \mathbb{P}^n$, mely esetben d -t *elliptikusnak* mondjuk.

Fontos lépést legközelebb Blaschke tett 1936-ban [2], aki Crofton-formuláját [7] általánosítva mutatta ki, hogy a sík minden projektív metrikájához van olyan mérték az egyenesek halmazán, mellyel teljesül a Crofton-formula, vagyis egy görbe hossza éppen az őt metsző egyenesek halmazának mértéke.

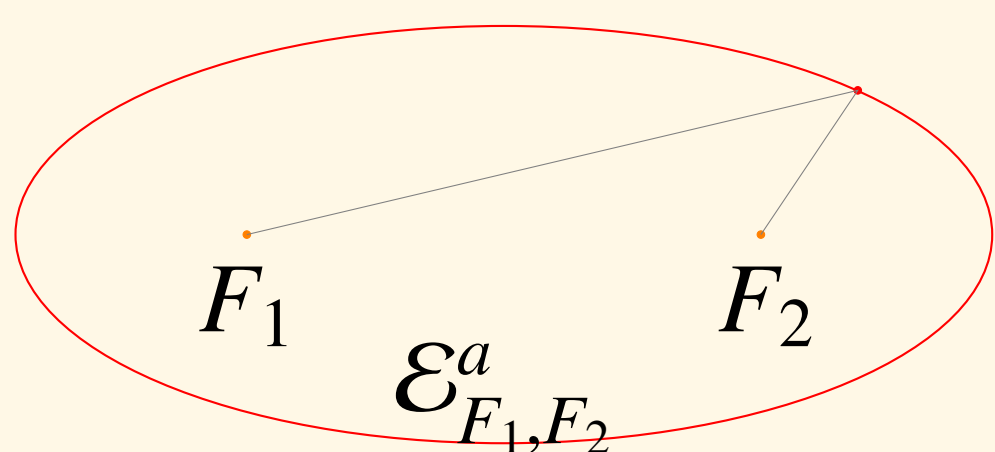
Busemann vetette fel 1961-ben [3], hogy talán minden projektív metrika előáll valamely, a hipersíkok sokaságán adott kvázi pozitív μ „mérték” segítségével úgy, hogy két pont távolságát a köztük lévő szakaszt metsző hipersíkok halmazának μ -mértéke definiálja.

A projektív metrikák Busemann-féle előállításának lehetőségét először 1973-ban egyedi módszerrel Pogorelov bizonyította a sík esetére [12], majd 1986-ban Z.I. Szabó integrálgeometriai eszközökkel adott teljes bizonyítást [13]. Azóta a sík esetére más megoldások is született.

Talán Busemann sem hitte, hogy ilyen sokféle projektív metrika létezik, mert 1976-ban a következőt írta [5]: „... Hilbert [...] nem volt tudatában ezen metrikák hatalmas mennyiségének, így a probléma második része ... elkerülhetetlenül szűkül az érdekes geometriák speciális vagy speciális osztályba tartozó metrikáinak vizsgálatára.”.

Probléma (K.Á. 2015)

A projektív metrikák jellemzője, hogy a lineáris görbék pontjaira a végpontoktól mért távolságok összege éppen a végpontok távolsága. Adódik a kérdés, hogy a kvadratikus görbéket karakterizálja e, hogy pontjainak két fix ponttól mért távolságait összeadva egy állandót kapunk.



Egy $\mathcal{E}_{d;F_1,F_2}^a := \{P : 2a = d(F_1, P) + d(P, F_2)\}$ halmazt *ellipszisnek* nevezünk, ha F_1, F_2 fix pontok, a *fókuszok*, és $a > f := d(F_1, F_2)/2$. A *kör* olyan ellipszis, amelyre $f = 0$.

- *Mely projektív metrikákra teljesül, hogy ellipsziseinek valamely csoportja kvadratikus?*

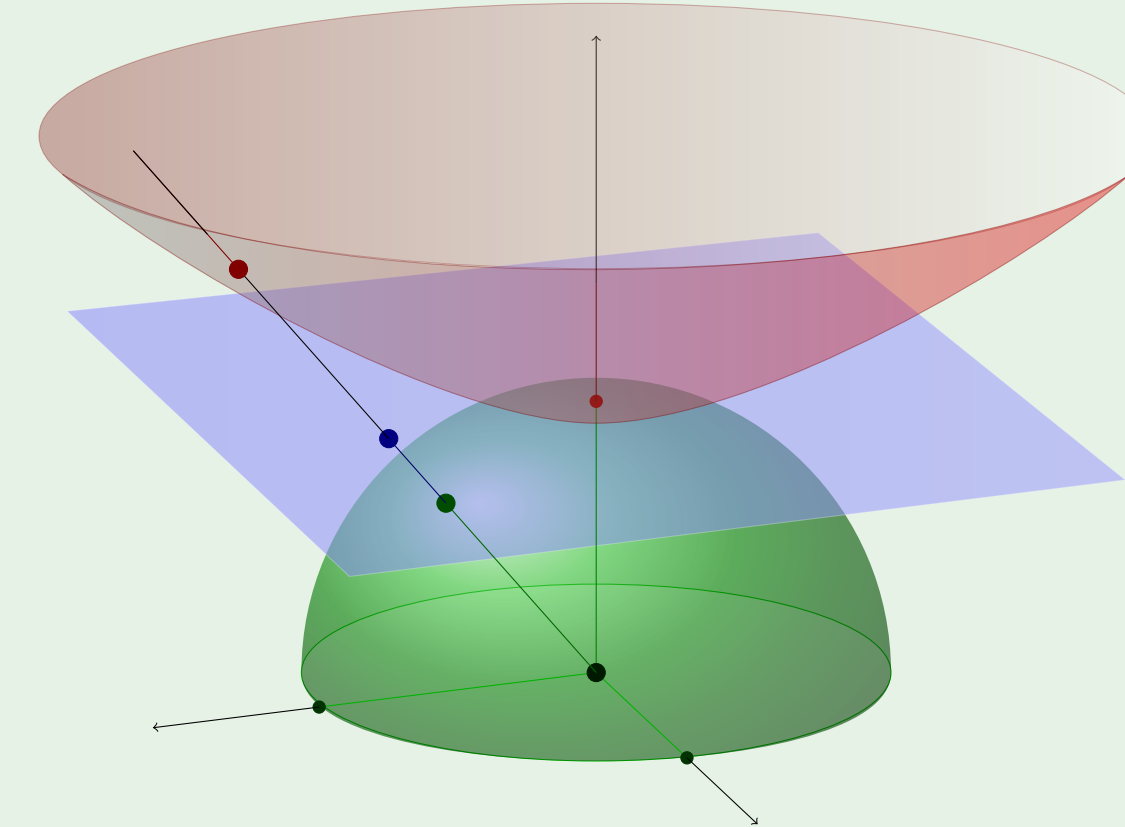
Az ilyen projektív metrikákat *kvadratikusnak* hívjuk.

Sejtés (K.Á., 2017, [10])

Pontosan a konstans görbületű projektív metrikák kvadratikusak.

A sejtést alátámasztó korábbi eredmények

Az eddig egyetlen általános eredmény a következő:



Beltrami 1865-ben igazolta [1], hogy ha egy projektív metrika Riemann-féle, vagyis minden „infinitezimális” gömbfelülete kvadratikus, akkor konstans görbületű. Ennek fordítottja sokkal erőteljesebben teljesül, mert ezen metrikák minden ellipszise kvadratikus.

A projektív metrikák közül a két legfontosabb a Hilbert- és a Minkowski-féle, hiszen Busemann 1970-ben bebizonyította [4], hogy a kompakt gömbbel rendelkező projektív metrikák közül éppen ezekben projektívítás bármely két geodetikus közti izometrikus ráképezés.

Az eddig egyetlen, a sejtést alátámasztó speciális eredményt Busemann igazolta 1953-ban [6, 25.4], mely szerint egy Minkowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha egy gömbfelülete kvadratikus.

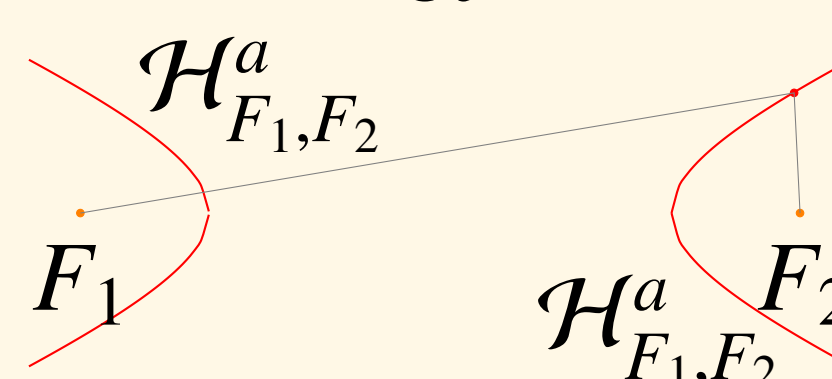
A sejtést alátámasztó eredményeim

Bár az alábbiak síkban értendők, az ellipszoidok síkmetszetekkel való karakterizációi miatt tetszőleges dimenzióra kiterjednek.

- 1 Egy Hilbert-metrika akkor és csak akkor hiperbolikus, ha egy köre kvadratikus [10, Theorem 5.1].
- 2 Egy Minkowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha egy ellipszise kvadratikus [10, Theorem 4.3].
- 3 Egy Hilbert-metrika akkor és csak akkor hiperbolikus, ha két közös fókuszokkal rendelkező, vagy egy $1/\sqrt{3}$ -nál nagyobb numerikus excentricitású ellipszise kvadratikus [10, Theorem 5.5].

Kérdés (K.Á. 2015)

Az ellipszis esete után természetesen vetődik fel, hogy a kvadratikus görbéket talán jellemzi, hogy pontjainak két fix ponttól mért távolságait kivonva egy állandót kapunk.



Egy $\mathcal{H}_{d;F_1,F_2}^a := \{P : 2a = |d(F_1, P) - d(P, F_2)|\}$ halmazt *hyperbolának* hívunk, ha F_1, F_2 fix pontok, a *fókuszok*, és $a \in (0, d(F_1, F_2)/2)$.

- *Mely projektív metrikákra teljesül, hogy hiperboláinak valamely csoportja kvadratikus?*

Válaszok a kérdésre

Bár az alábbiak síkban értendők, az ellipszoidok síkmetszetekkel való karakterizációi miatt tetszőleges dimenzióra kiterjednek.

- 1 Ha egy Minkowski-metrikus sík egy hiperbolája kvadratikus, akkor euklidészi [11, Theorem 4.3].
- 2 Ha egy Hilbert-metrikus sík egy hiperbolája éppen a metszete egy euklidészi hiperbolával, akkor hiperbolikus [11, Theorem 5.6].

Pár szó a bizonyításokról. A kvadratikussága alapján olyan Euklidészi illetve hiperbolikus metrikát keresünk, melyben a görbe ellipszis vagy hiperbola. Ennek megtalálása után a projektív metrikától való eltérését kell becsülni.

Irodalom

- | | |
|--|--|
| [1] E. Beltrami
Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, <i>Opere</i> , I (1865), 262–280. | [7] M. W. Crofton
Probability, <i>Encyclopaedia Britannica</i> , 9th ed., 19 (1885), 768–788. |
| [2] W. Blaschke
Integralgeometrie 11 , <i>Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg</i> , 11 (1936), 359–366. | [8] G. Hamel
Über die Geometrien, in denen die Graden die kürzesten sind, <i>Math. Ann.</i> , 57 (1903), 231–264. |
| [3] H. Busemann
Geometries in which the planes minimize area, <i>Ann. Mat. Pure Appl.</i> , 55:4 (1961), 171–190. | [9] D. Hilbert
Mathematische Probleme, <i>Göttinger Nachrichten</i> , (1900), 253–297. |
| [4] H. Busemann
Recent Synthetic Differential Geometry, <i>Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete</i> , 54 , Springer, New York, 1970. | [10] Á. Kurusa
Projective metrics with quadratic ellipses, <i>manuscript</i> , (2016), submitted. |
| [5] H. Busemann
Problem IV: Desarguesian Spaces, <i>Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math.</i> , 28 (1976), 131–141. | [11] Á. Kurusa and J. Kozma
Projective metrics with quadratic hyperbolas, <i>manuscript</i> , (2017), submitted. |
| [6] H. Busemann and P. J. Kelly
Projective Geometries and Projective Metrics, Academic Press, New York, 1953. | [12] A. V. Pogorelov
A complete solution of Hilbert's fourth problem, <i>Soviet Math. Dokl.</i> , 14 (1979), 46–49. |
| | [13] Z. I. Szabó
Hilbert's fourth problem I., <i>Adv. Math.</i> , 59 (1986), 185–301; doi: 10.1016/0001-8708(86)90056-3 . |

Készült a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap K 116451 támogatásával.