

Differenciálható görbék

elmélet és valóság

Kurusa Árpád

<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

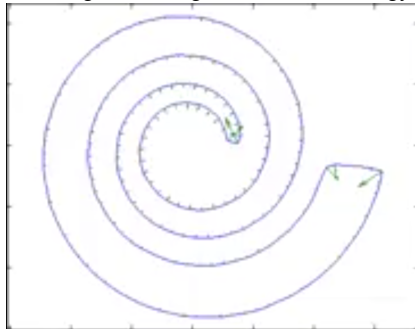
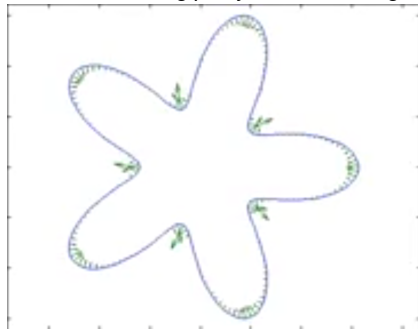
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

<http://www.math.u-szeged.hu/>



Tantárgyi előadás habilitációhoz, Szeged, 2017. február 21. 10⁰⁰

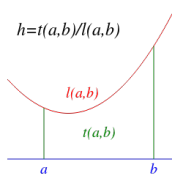
Hogyan alakul egy rugalmas szalag, ha elengedjük? Tegyük mézbe, hogy lelassuljon a változás: a szalag pontjainak sebességvektora mindig az ottani görbületi vektorral egyenlő.



Tétel (Grayson, 1987). Ha egy egyszerű zárt görbe úgy mozog, hogy minden pontjának sebességvektora a görbe ottani görbületi vektorával egyenlő, akkor a mozgás közben a görbe sosem lesz önátmetsző és véges időn belül konvex lesz.

Tétel (Gage & Hamilton, 1986). Ha egy konvex görbe úgy mozog, hogy minden pontjának sebességvektora a görbe ottani görbületi vektorával egyenlő, akkor konvex marad, egy pontra zsugorodik, az alakja pedig egy körhöz konvergál.

A kötél- vagy **láncgörbe** a két végénél fogva felfüggesztett lánc saját súlya alatt felvett alakját írja le.



Ugyanerre jutunk, ha olyan f függvényt keresünk, mely grafikonjának bármely íve alatti terület arányos az ív hosszával, vagyis van olyan $h > 0$ konstans, hogy az f függvény értelmezési tartományának bármely $[a, b]$ intervallumára

$$\int_a^b f(x) dx = t(a, b) = h \cdot l(a, b) = h \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1} dx.$$

Tehát $f^2(x) \equiv h^2((f'(x))^2 + 1)$, ami a lánc egyensúlyi helyzetét leíró egyenlet. Egy megoldás az $f \equiv h$. Egyébként pedig

$$\frac{\pm 1}{h} = \frac{(f(x)/h)'}{\sqrt{(f(x)/h)^2 - 1}} = \left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{f(x)}{h} \right) \right)',$$

vagyis $f(x) = h \cosh \left(\frac{x-c}{h} \right)$, ahol c tetszőleges konstans.

Az egyensúly feltétele az, hogy a ható erők összege minden pontban az érintő irányába mutasson. Ha egy f valós függvény grafikonja írja le a görbét, azt kapjuk, hogy

$$\sigma \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \pm c f''(x),$$

ahol σ a sűrűség, c pedig a függesztési pontok között vízszintes irányban ébredő erő.



Mivel minden láncgörbe hasonló egymáshoz és a kupolák stabilitásának fizikai feltétele ugyanaz, mint a láncok egyensúlyának feltétele, az állva maradt kupolák mind hasonlóak egymáshoz.

← A római Szent Péter Bazilika kupolája.

A sík egy görbéje **logaritmikus spirál**, ha egy rögzített ponton, a **póluson** átmenő minden egyenest β szögben metsz.

Egy spirál centrális nagyítása a pólusból ugyanaz, mint elforgatása a pólus körül, ami az ilyen alakú organizmusok számára lehetővé teszi, hogy alakváltozás nélkül növekedjenek.



A pólusnál polárkoordinátázásban $\xi \mapsto r(\xi)$ által paraméterezett görbére teljesül, hogy

$$\cos \beta = \frac{\langle r'(\xi) \mathbf{u}_\xi + r(\xi) \mathbf{u}_\xi^\perp, r(\xi) \mathbf{u}_\xi \rangle}{|r'(\xi) \mathbf{u}_\xi + r(\xi) \mathbf{u}_\xi^\perp| \cdot r(\xi)},$$

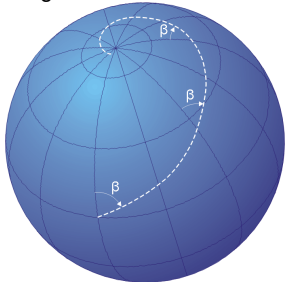
ahol $\mathbf{u}_\xi = (\cos \xi, \sin \xi)$ és $\mathbf{u}_\xi^\perp = \mathbf{u}_{\xi+\pi/2}$. E differenciálegyenlet megoldása

$$r(\xi) = a e^{\xi \operatorname{ctg} \beta} \quad (a \neq 0).$$

A szúnyogok repülési iránya állandó β szöget zár be a fényvel. Emiatt egy pontszerű szúnyog végtelen sokszor megkerül egy lámpát. Repülési ideje a lámpába ϱ távolságból konstans v sebességgel mégis véges $\frac{\varrho}{v \cos \beta}$, mert sebességvektorának nagysága a lámpa felé $v \cos \beta$.

Ha egy szabályos négyszög csúcsaiból induló hangyák úgy üldözik egymást, hogy mindig az órajárás szerinti irányban következő hangya felé másznak, akkor logaritmikus spirálok mentén haladnak.

A ϱ sugarú gömbfelület egy görbéje **loxodroma**, ha egy rögzített ponton, a **póluson** átmenő minden főkört fix β szögben metsz.



Ívhossz szerinti r paraméterezésben a görbe koordinátái

$$r_1(s) = \varrho \cos\left(\frac{s \cos \beta}{\varrho}\right) \cos \lambda(s),$$

$$r_2(s) = \varrho \cos\left(\frac{s \cos \beta}{\varrho}\right) \sin \lambda(s),$$

$$r_3(s) = \varrho \sin\left(\frac{s \cos \beta}{\varrho}\right),$$

amennyiben $r(0) = (1, 0, 0)$ és $\lambda(s) = \operatorname{tg} \beta \ln \operatorname{tg}\left(s \frac{\cos \beta}{2\varrho} + \frac{\pi}{4}\right)$.

A loxodroma hossza $\ell = \frac{\varrho \pi}{\cos \beta}$, mert a pólusokat az $s = \frac{\pm \varrho \pi}{2 \cos \beta}$ ívhosszaknál éri el.

Mivel a gömbfelület sztereografikus vetítése szögtartó, minden loxodroma sztereografikus képe logaritmikus spirál.

Habár **Mercator** még 1569-ben készítette térképét, az általa alkalmazott

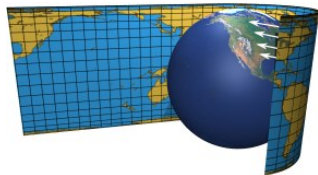
$$(\lambda, \varphi) \mapsto \varrho \left(\lambda, \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

leképezést, ahol λ a hossz-

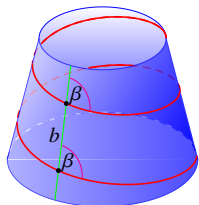
szúsági és φ a szélességi fok, mindmáig használják a tengeri navigációban, mert szögtartó, amiért könnyű meghatározni hová jut az állandó irányba haladó hajó.

A loxodromák egyenesek a Mercator-típusú térképeken.

A párhuzamos egyeneseket konstans szögben metsző görbék éppen az egyenesek, vagyis **az egyenesek az ideális ponthoz tartozó logaritmikus spirálok**.



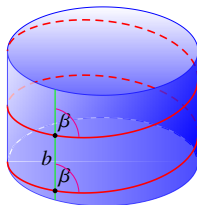
A csavarvonal a logaritmikus spirálból és az egyenesből keletkezik a sík kúpos illetve hengeres „feltekerésével”.



A **kúpos csavarvonal** a 2α nyílásszögű kúp alkotóit β szögben metsző görbe:

$$\mathbf{r}(t) = \varrho e^{ct} (\cos t, \sin t, d),$$

ahol $d = \operatorname{ctg} \alpha$ és $c = \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta$.



A **hengeres csavarvonal** a ϱ sugarú hengerfelület alkotóit β szögben metsző görbe:

$$\mathbf{r}(t) = (\varrho \cos t, \varrho \sin t, ct),$$

ahol $c = \varrho \operatorname{ctg} \beta$ és $b = 2\pi c$ a menetemelkedés.

Kúpos csavarvonal görbülete és torziója arányos.

Példák a valóságban.

A DNS szerkezete →
Rugók és ↓ növények



Hengeres csavarvonal teljesíti a következőket:

(0) Ívhossz szerinti paraméterezésben

$$\mathbf{r}(s) = \left(\varrho \cos \frac{s \sin \beta}{\varrho}, \varrho \sin \frac{s \sin \beta}{\varrho}, s \cos \beta \right).$$

(1) bármely pontját bármely másik pontjába lehet mozgatni úgy, hogy a görbe és irányítása megmarad;

(2) az egyforma hosszú ívekhez tartozó húrok hosszai egyformák;

(3) konstans a görbülete és a torziója:

$$\kappa(s) = \frac{\varrho}{\varrho^2 + c^2} \text{ és } \tau(s) = \frac{c}{\varrho^2 + c^2},$$

ahol $c = b/(2\pi)$.

Tétel. Az (1), (2) és (3) tulajdonságok bármelyikét teljesítő görbe csavargörbe.

(1) $\Rightarrow$ (2). Az a görbét invariánsan hagyó mozgás, amely a két azonos hosszú ív kezdőpont-jait egymásba viszi, az ívek másik végpontjait is egymásba viszi, hiszen nem változtatja a görbeívek hosszát, mert távolságtartó. Eszerint az ívek által feszített húrok végpontjai is egymásba mozognak, így hosszuk megegyezik.

(2) $\Rightarrow$ (3). A feltétel szerint a húrok $\mathbf{p}(s, h) = \mathbf{r}(s + h) - \mathbf{r}(s)$ vektoraihoz létezik egy f függvény, melyre $2f(h) = \langle \mathbf{p}(s, h), \mathbf{p}(s, h) \rangle$. Ennek h szerinti deriváltjai $f' = \langle \mathbf{t}, \mathbf{p} \rangle$, $f'' = \langle \kappa \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle + 1$, $f''' = \langle \kappa \dot{\mathbf{n}} + \kappa(\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}), \mathbf{p} \rangle$, majd $f^{(iv)} = -\kappa^2 + \langle \ddot{\kappa} \mathbf{n} + \dot{\kappa}(\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}) + \kappa \dot{\tau} \mathbf{b} + \kappa \dot{\mathbf{t}} \mathbf{b} - \kappa \tau^2 \mathbf{n} - 2\kappa \dot{\kappa} \mathbf{t} - \kappa^3 \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle$. Ebből a konstans $\kappa(s) = \sqrt{-f^{(iv)}(0)}$ érték jön ki, amiért $f^{(iv)} = -\kappa^2 + \kappa \langle \dot{\tau} \mathbf{b} - (\tau^2 + \kappa^2) \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle$. Ennek deriváltja

$$f^{(v)} = \underbrace{\kappa \langle \dot{\tau} \mathbf{b} - (\tau^2 + \kappa^2) \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{=0} + \kappa \langle \ddot{\tau} \mathbf{b} - 3\tau \dot{\tau} \mathbf{n} + (\tau^2 + \kappa^2)(\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}), \mathbf{p} \rangle.$$

Tovább deriválva a $h = 0$ helyen, azt kapjuk, hogy $f^{(vi)}(0) = \kappa \langle \ddot{\tau} \mathbf{b} - 3\tau \dot{\tau} \mathbf{n} + (\tau^2 + \kappa^2)(\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}), \mathbf{t} \rangle$. A merőlegesség miatt ebből a konstans $\tau(s) = \sqrt{f^{(iv)}(0) - f^{(vi)}(0)/f^{(iv)}(0)}$ érték adódik.

A (3) tulajdonságból következik, hogy csavarvonallal van dolgunk, mert a görbék alaptétele adja, hogy a konstans κ görbülettel és konstans τ torzióval rendelkező egyetlen görbe az a csavargörbe, melyre $\varrho = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}$ és $c = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$, hiszen ennek görbülete és torziója κ és τ .

Nézzük a térgörbék alábbi tulajdonságait:

- 1 Van olyan nem nulla vektor, amellyel a görbe minden **A** érintője, vagy **B** normálisa, vagy **C** binormálisa egyforma szöget zár be;
- 2 A torzió és a görbület arányos;
- 3 A torzió és a görbület valamely konstans együttthathós lineáris kombinációja konstans. (Ezek a Bertrand-görbék.)

Bizonyítsuk, az alábbi tételeket!

Tétel. A (1) tulajdonság mindhárom esete ekvivalens a (2) tulajdonsággal.

Tétel. Ha az ívhossz szerint paraméterezett r_1 és r_2 görbékhez van olyan $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés, melyre $n_2(\sigma(s)) \parallel r_2(\sigma(s)) - r_1(s) \parallel n_1(s)$ minden s paraméterre, akkor (3) mindkét görbére érvényes.

Ezek a Bertrand-párok.

Útmutatások.

Az első tétel bizonyítását az $(A) \Rightarrow (B) \Rightarrow (C) \Rightarrow (2) \Rightarrow (A)$ lépésekre bontjuk. Minden lépésben a Frenet-formulákat használjuk. Például az utolsó lépésben valamely konstans α szögre $\cos \alpha k - \sin \alpha \tau = 0$ így $\cos \alpha kn - \sin \alpha \tau n = 0 \Rightarrow \cos \alpha t + \sin \alpha b = 0 \Rightarrow \cos \alpha t + \sin \alpha b = v$, ahol v egy konstans vektor.

A második tétel bizonyításához legyen λ az a függvény, melyre $r_2(\sigma(s)) - r_2(s) = \lambda(s)n(s)$, és alkalmaz a Frenet-formulákat.



Bónusz probléma.

Mi a csuda ez?





KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

Differentiable curves

theory and reality

Árpád Kurusa

<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

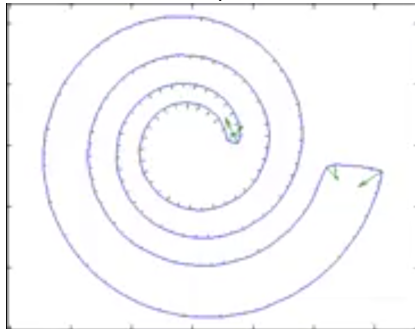
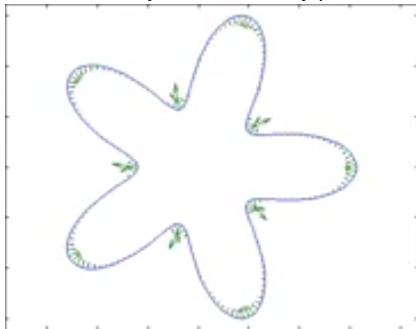
Bolyai Institute, University of Szeged

<http://www.math.u-szeged.hu/>



Faculty lecture for habilitation, Szeged, 10⁰⁰, February 21., 2017

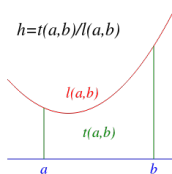
How an elastic band's shape evolves if left alone? Put it in honey to slow down the evolution: the velocity vector of every point is the curvature vector at the point.



Theorem (Grayson, 1987). *If a simple closed curve moves so that the velocity vector of every point equals to the curvature vector at the point, then it will never form self intersections, and it will become convex in finite time.*

Theorem (Gage & Hamilton, 1986). *If a convex curve moves so that the velocity vector of every point equals to the curvature vector at the point, then it remains convex, shrinks to a point, and its shape converges to a circle.*

A **catenary** curve describes the shape that a chain or cable assumes under its own weight when hanged up at its ends.



We get the same by looking for such function f that has the property that the area under any arc of its graph is proportional to the length of the arc, i.e. there is a constant $h > 0$ such that for every interval $[a, b]$ in the domain of f we have

$$\int_a^b f(x) dx = t(a, b) = h \cdot l(a, b) = h \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1} dx.$$

Thus $f^2(x) \equiv h^2((f'(x))^2 + 1)$, which describes the equilibrium of the chain. One solution is $f \equiv h$. Otherwise we have

$$\frac{\pm 1}{h} = \frac{(f(x)/h)'}{\sqrt{(f(x)/h)^2 - 1}} = \left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{f(x)}{h} \right) \right)',$$

i.e. $f(x) = h \cosh \left(\frac{x-c}{h} \right)$, where c is an arbitrary constant.



As the catenaries are all similar to each other and the physical stability condition for a dome is the same as the equilibrium condition for the chains, the cupolas that did not collapse are all similar to each other.

← Dome of the St. Peter's Basilica in Rome.

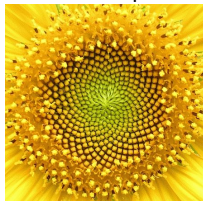
The equilibrium condition is that the sum of forces acting is parallel to the tangent at every point. If the graph of a real function f describes the curve, we obtain that

$$\sigma \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \pm c f''(x),$$

where σ is the density, c is the horizontal force between the mounting points.

A **logarithmic spiral** is a plane curve that intersects every straight line passing through a point, the **pole**, at a fix angle β .

Applying central scaling to a spiral at its pole results the same as rotating it around the pole, that allows organisms of this spiral shape to grow without changing shape.



Parameterized at the pole in polar coordinates by $\xi \mapsto r(\xi)$, the curve satisfies

$$\cos \beta = \frac{\langle r'(\xi) \mathbf{u}_\xi + r(\xi) \mathbf{u}_\xi^\perp, r(\xi) \mathbf{u}_\xi \rangle}{|r'(\xi) \mathbf{u}_\xi + r(\xi) \mathbf{u}_\xi^\perp| \cdot r(\xi)},$$

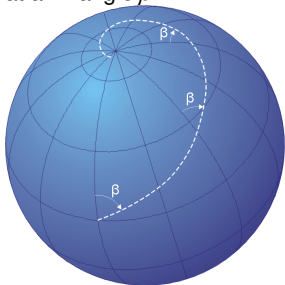
where $\mathbf{u}_\xi = (\cos \xi, \sin \xi)$ and $\mathbf{u}_\xi^\perp = \mathbf{u}_{\xi+\pi/2}$. The solution of this differential equation is

$$r(\xi) = ae^{\xi \cot \beta} \quad (a \neq 0).$$

Mosquitos' flight paths close constant angle β with the light. Because of this, a point-like mosquito rounds a lamp infinitely many times. However its flight time to the lamp from distance ϱ with constant velocity v is finite $\frac{\varrho}{v \cos \beta}$, because the magnitude of its velocity vector toward the lamp is $v \cos \beta$.

If ants in vertices of a regular polygon of order four are chasing each other so that each of them crawls always towards the ants next to itself in the clockwise direction, then they move along logarithmic spirals.

A **rhumb line** is a curve on the sphere of radius ϱ intersecting every great circle passing through a point, the **pole**, at a fix angle β .



Coordinates of the curve in arc length parameterization are

$$r_1(s) = \varrho \cos\left(\frac{s \cos \beta}{\varrho}\right) \cos \lambda(s),$$

$$r_2(s) = \varrho \cos\left(\frac{s \cos \beta}{\varrho}\right) \sin \lambda(s),$$

$$r_3(s) = \varrho \sin\left(\frac{s \cos \beta}{\varrho}\right),$$

provided $r(0) = (1, 0, 0)$ and $\lambda(s) = \tan \beta \ln \tan\left(s \frac{\cos \beta}{2\varrho} + \frac{\pi}{4}\right)$.

The length of a rhumb line is $\ell = \frac{\varrho \pi}{\cos \beta}$, because it reaches the poles at arc lengths $s = \frac{\pm \varrho \pi}{2 \cos \beta}$.

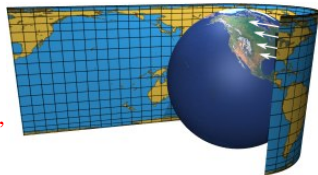
As the stereographic projection of the sphere preserves angles, the stereographic picture of rhumb lines are logarithmic spirals.

Although **Mercator** made his map in 1569, his type of **projection**

$$(\lambda, \varphi) \mapsto \varrho \left(\lambda, \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right),$$

where λ is the longitude

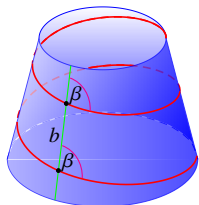
and φ is the altitude, is still in use in maritime navigation, because it preserves angles, hence it makes easy to determine where the boat of permanent direction arrive at.



Rhumb lines are straight lines on maps of Mercator-type.

The curves intersecting parallel straight lines under constant angle are the straight lines, i.e. *the straight lines are the logarithmic spirals belonging to the ideal points.*

Helices are created from logarithmic spirals and straight lines when the plane is „rolled up“ conically or cylindrically, respectively.



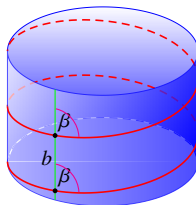
A **conical helix** is a curve on the conic of angle 2α intersecting the sides at a fix angle β :

$\mathbf{r}(t) = \varrho e^{ct}(\cos t, \sin t, d)$,
where $d = \cot \alpha$ and $c = \sin \alpha \cot \beta$.

Conic helix has proportional curvature and torsion.

Examples in reality.

The structure of DNA $\rightarrow$
Coil springs and $\downarrow$ plants



A **(cylindrical) helix** is a curve on the cylinder of radius ϱ intersecting the sides at a fix angle β :

$\mathbf{r}(t) = (\varrho \cos t, \varrho \sin t, ct)$,
where $c = \varrho \cot \beta$ and $b = 2\pi c$ is the pitch.

Cylindrical helix satisfies the following:

(0) In arc length parameterization

$$\mathbf{r}(s) = \left(\varrho \cos \frac{s \sin \beta}{\varrho}, \varrho \sin \frac{s \sin \beta}{\varrho}, s \cos \beta \right).$$

(1) its any point can be transferred to its any other point so that the curve and its orientation remains preserved;

(2) the lengths of the chords belonging to arcs of equal length are equal;

(3) curvature and torsion are constants:

$$\kappa(s) = \frac{\varrho}{\varrho^2 + c^2} \text{ and } \tau(s) = \frac{c}{\varrho^2 + c^2},$$

where $c = b/(2\pi)$.

Theorem. Any one of the properties (1), (2) and (3) implies that the curve is a helix.

(1) $\Rightarrow$ (2). The motion μ that leaves the curve invariant and takes the starting points of two arcs of equal length into each other also moves the corresponding closing points into each other, since, being distance preserving, it keeps the length of the arcs. This ensures that the chords of the arcs have equal length.

(2) $\Rightarrow$ (3). By the condition there is a function f for the vectors $p(s, h) = r(s + h) - r(s)$ of the chords such that $2f(h) = \langle p(s, h), p(s, h) \rangle$. The derivatives of this with respect to h are $f' = \langle t, p \rangle$, $f'' = \langle \kappa n, p \rangle + 1$, $f''' = \langle \dot{\kappa} n + \kappa(\tau b - \kappa t), p \rangle$, and $f^{(iv)} = -\kappa^2 + \langle \ddot{\kappa} n + \dot{\kappa}(\tau b - \kappa t) + \dot{\kappa} \tau b + \kappa \dot{\tau} b - \kappa \tau^2 n - 2\kappa \dot{\kappa} t - \kappa^3 n, p \rangle$. This implies that $\kappa(s) = \sqrt{-f^{(iv)}(0)}$ is a constant, hence $f^{(iv)} = -\kappa^2 + \kappa \langle \dot{\tau} b - (\tau^2 + \kappa^2) n, p \rangle$. Derivative of this is

$$f^{(v)} = \underbrace{\kappa \langle \dot{\tau} b - (\tau^2 + \kappa^2) n, t \rangle}_{=0} + \kappa \langle \ddot{\tau} b - 3\tau \dot{\tau} n + (\tau^2 + \kappa^2)(\kappa t - \tau b), p \rangle.$$

Further differentiation at $h = 0$ gives $f^{(vi)}(0) = \kappa \langle \ddot{\tau} b - 3\tau \dot{\tau} n + (\tau^2 + \kappa^2)(\kappa t - \tau b), t \rangle$. By perpendicularity of vectors this results in the constant $\tau(s) = \sqrt{f^{(iv)}(0) - f^{(vi)}(0)}/f^{(iv)}(0)$.

It follows from property (3) that we have a helix, because the main theorem of curves implies that a curve having constant curvature κ and constant torsion τ is exactly the helix with $\varrho = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}$ and $c = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$, because the curvature and torsion of this helix is κ és τ .

Look at the following properties of curves:

- 1 There is a non vanishing vector with which every one of the curve's **A** tangents, or **B** normals, or **C** binormals closes equal angles;
- 2 The curvature and torsion are proportional;
- 3 A linear combination of the curvature and torsion with constant coefficients is constant. (These are the Bertrand curves.)

Prove the following theorems!

Theorem. *The three cases of property (1) are all equivalent with property (2).*

Theorem. *If the curves r_1 és r_2 are parameterized by arc length and there is a function $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\mathbf{n}_2(\sigma(s)) \parallel \mathbf{r}_2(\sigma(s)) - \mathbf{r}_1(s) \parallel \mathbf{n}_1(s)$ at every parameter s , then (3) holds for both curves.*

These are the Bertrand pairs.

Hints.

Split the proof of the first theorem into steps $(A) \Rightarrow (B) \Rightarrow (C) \Rightarrow (2) \Rightarrow (A)$. Every step can be taken by using Frenet's formulas. For example, in the last step $\cos \alpha \kappa - \sin \alpha \tau = 0$ for a constant angle α , hence $\cos \alpha \kappa \mathbf{n} - \sin \alpha \tau \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \cos \alpha \mathbf{t} + \sin \alpha \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \cos \alpha \mathbf{t} + \sin \alpha \mathbf{b} = \mathbf{v}$, where $\mathbf{v}$ is a constant vector.

In the proof of the second theorem, let λ be the function for which $\mathbf{r}_2(\sigma(s)) - \mathbf{r}_1(s) = \lambda(s)\mathbf{n}_1(s)$ holds, and use Frenet's formulas.



Bonus problem.

What on earth is this? 😊





Thank you for your attention!