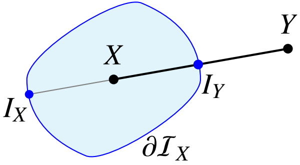
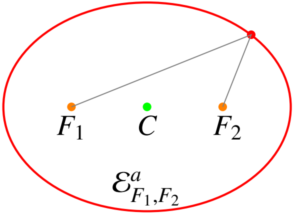
Projektív metrikák

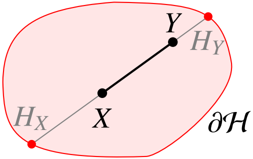
elipszisek, hiperbolák és kúpszeletek

Kurusa Árpád
http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet
http://www.math.u-szeged.hu/







Tudományos előadás habilitációhoz, Szeged, 2017. február 21. $11^{\underline{00}}$

A multimédia-tartalomhoz Adobe PDF Reader szükséges.

Angol

Hilbert IV. problémája (Hilbert 1900, [9])

Határozzuk meg az összes olyan folytonos és teljes d metrikát az n-dimenziós $\mathbb{P}^n$ projektív téren, amely teljesíti a szigorú háromszög-egyenlőtlenséget és minden P pont egy $\{X : d(P,X) < \varrho\}$ környezete nyílt halmaz. Tanulmányozzuk ezeket!

Projektív metrikák osztályozása (Hamel 1903, [8])

Legyen $\mathcal{D}$ egy ilyen projektív metrika tartója. Pontosan három eset lehetséges: hiperbolikus *($\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n$ konvex),* parabolikus *($\mathcal{D} = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n$) és* elliptikus *($\mathcal{D} = \mathbb{P}^n$).*

Konstrukció (Busemann 1961, [3]; a Crofton-formula [7] Blaschke [2] általi kiterjesztése az alapja)

Legyen μ egy kvázi pozitív[1] "mérték" a hipersíkok sokaságán.
Egy görbe hossza legyen a metsző hipersíkok halmazának $\mu/2$ mértéke.

Tétel. (síkon Pogorelov 1973, [16]; minden dimenzióban Szabó 1986, [17]).

Busemann konstrukciója minden projektív metrikát kiad.

Busemann [5]: "... Hilbert [...] nem volt tudatában ezen metrikák hatalmas mennyiségének, így a probléma második része ... elkerülhetetlenül szűkül az érdekes geometriák speciális vagy speciális osztályba tartozó metrikáinak vizsgálatára. ".

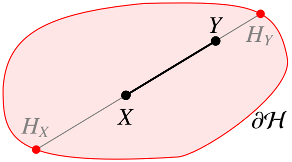
[1] Nem feltétlenül mindenütt pozitív, de bármely nem kollineáris $ABC` ponthármasra az $\overline{AB} \cup \overline{BC}$ kétélet metsző hipersíkok "mértéke" pozitív, és a B ponton átmenő hipersíkok "mértéke" nulla.

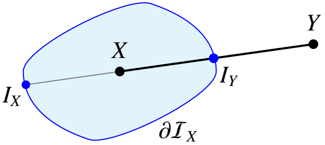
Angol

Hilbert-metrika. $d_{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ definíciója

$$d_{\mathcal{H}}(X,Y)=\begin{cases}0, & \text{ha } X=Y,\\ \frac{1}{2}\left|\ln(X,Y;H_X,H_Y)\right|, & \text{ha } X\neq Y,\end{cases}$$

ahol $\mathcal{H}$ az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos tartománya, és $\overline{H_XH_Y}=\mathcal{H}\cap XY$.





Minkowski-metrika. $d_{\mathcal{I}}\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definíciója $d_{\mathcal{I}}(X,Y)=(Y,I_Y;X)$, ahol $\mathcal{I}$, az *indikátrix*, az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos, centrálszimmetrikus tartománya, és $\overline{I_XI_Y}=\mathcal{I}_X\cap XY$.

Elliptikus metrika. $d\colon \mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n\to\mathbb{R}$ definíciója $d(X,Y)=\arccos|\langle\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\rangle|$, ahol $\mathbb{P}^n$ pontjai az $\mathcal{S}^n$ átellenes pontpárjai, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pedig $\mathbb{R}^{n+1}$ egy euklidészi metrikája.

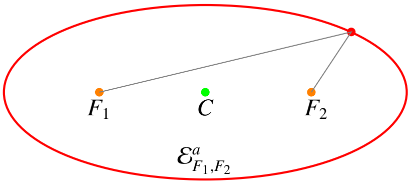
Tétel. (Busemann 1970, [4]).

A kompakt gömbbel rendelkező projektív metrikák közül pontosan a Hilbert- és a Minkowski-metrika az, amelyben bármely két geodetikus közti izometrikus ráképezés projektivitás.[2]

[2] Minkowski-metrika esetén ez egy affinitás.

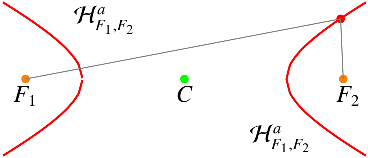
Angol

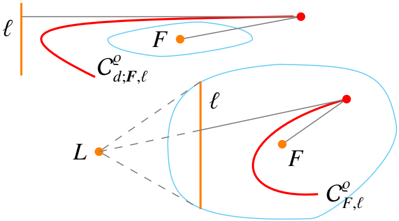
Az ellipszisek, hiperbolák és kúpszeletek *metrikus konstrukciók*.



Egy $\mathcal{E}^a_{d;F_1,F_2} := \{P : 2a = d(F_1,P) + d(P,F_2)\}$ halmazt *ellipszisnek* nevezünk, ha F_1, F_2 fix pontok, a *fókuszok*, és $f := d(F_1,F_2)/2 < a$. A *kör* olyan ellipszis, amelyre $f = 0$. Az $\overline{F_1F_2}$ szakasz C metrikus középpontját az $\mathcal{E}^a_{d;F_1,F_2}$ *metrikus centrumának* mondjuk.

Egy $\mathcal{H}^a_{d;F_1,F_2} := \{P : 2a = |d(F_1,P) - d(P,F_2)|\}$ halmazt *hyperbolának* hívunk, ha F_1, F_2 fix pontok, a *fókuszok*, és $0 < a < d(F_1,F_2)/2 = f$. Az $\overline{F_1F_2}$ szakasz C metrikus középpontját a $\mathcal{H}^a_{d;F_1,F_2}$ *metrikus centrumának* mondjuk.

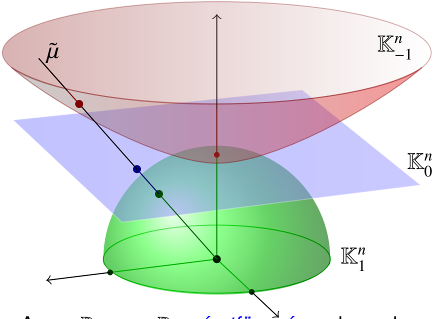




Egy $C^\varrho_{d;\ell,F} := \{P : \varrho d(\ell,P) = d(\ell,F)d(F,P)|\}$ halmazt *kúpszeletnek* nevezünk, ha ℓ egy fix egyenes, a *direktrix*, az $F \notin \ell$ egy fix pont, a *fókusz*, és $\varrho > 0$. Egy kúpszelet *elliptikus*, *parabolikus* vagy *hiperbolikus* aszerint, hogy $\varrho < d(\ell,F)$, $\varrho = d(\ell,F)$ vagy $\varrho > d(\ell,F)$.

Angol

Klasszikus geometriák kvadratikus modelljeinek vetítése adja a klasszikus projektív metrikákat.



A $\nu_\kappa : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *méretfüggvény* olyan, hogy $\nu_\kappa(r)\mathcal{S}^{n-1}$ izometrikus az $r > 0$ sugarú $\mathbb{K}^n_\kappa$ metrikus gömbfelülettel. A $\mu_\kappa : [0, \mathring{\imath}_\kappa) \to \mathbb{R}_+$ *vetítő függvény* hozza létre a $\tilde{\mu}_\kappa : \operatorname{Exp}_O(r\omega) \mapsto \mu_\kappa(r)\omega$ geodetikus kapcsolatot.

$\mathbb{K}^n_\kappa$	κ	ν_κ	μ_κ	$\mathring{\imath}_\kappa$
$\mathbb{H}^n$	-1	$\sinh r$	$\tanh r$	∞
$\mathbb{R}^n$	0	r	r	∞
$\mathbb{S}^n$ $(\mathbb{P}^n)$	$+1$	$\sin r$	$\operatorname{tg} r$	$\pi/2$

Itt a természetes módon azonosítottuk a $\mathcal{T}_O\mathbb{K}^n_\kappa$ és $\mathbb{R}^n$ tereket, és $\omega \in \mathcal{S}^{n-1}$ ebben a kettős értelemben szerepel.

Folklór tény. *A klasszikus projektív metrikák ellipszisei és hiperbolái is kvadrikák.*

Bizonyítás. (Csak hiperbolikus metrika ellipszisére. Lásd [11].)
A kvadratiukus $\mathbb{H}^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ z \geq 1\}$ modellben a metrika $d(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \cosh^{-1}\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\rangle$ és $\kappa = -1$. Legyen $f > 0$ és $a > f$, továbbá $F_\pm = (\sinh(\pm f), 0, \cosh f)$. Akkor $C = (0,0,1)$.
Bármely $P = (x,y,z) \in \mathcal{E}^a_{d;F_-,F_+} \subset \mathbb{H}^2$ ponthoz van olyan $t \in [0,f]$, hogy

$$a \pm t = d(F_\pm, X) = \cosh^{-1}(\pm x \sinh f + z \cosh f),$$

Ennek cosh-a azt adja, hogy

$$\cosh a \cosh t \pm \sinh a \sinh t = \cosh(a \pm t) = z \cosh f \mp x \sinh f,$$

amiért $\cosh t = z \cosh f / \cosh a$ és $\sinh t = -x \sinh f / \sinh a$. Ebből

$$\frac{z^2}{\cosh^2 a / \cosh^2 f} - \frac{x^2}{\sinh^2 a / \sinh^2 f} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

következik, így

$$z^2 - x^2 \frac{\tanh^2 f}{\tanh^2 a} = \frac{\cosh^2 a}{\cosh^2 f} = \frac{1 - \tanh^2 f}{1 - \tanh^2 a}.$$

A P pont C-centrumú (ω, r) polárkoordinátáját használva $P = (\sinh r \cos\omega, \sinh r \sin\omega, \cosh r)$ adódik, amiből

$$\frac{1}{\sinh^2 r(\omega)} = \frac{\cos^2\omega}{\sinh^2 a} + \frac{\sin^2\omega}{(\tanh^2 a - \tanh^2 f)\cosh^2 a}.$$

■

Általában ellipszisre és hiperbolára is

$$\frac{1}{\nu_\kappa^2(r(\omega))} = \frac{\cos^2\omega}{\nu_\kappa^2(a)} + \frac{\sin^2\omega}{(\mu_\kappa^2(a) - \mu_\kappa^2(f))(1 - \kappa\nu_\kappa^2(a))}.$$

Angol

Probléma. (KÁ 2015).

Mely projektív metrikákra teljesül, hogy *egy*, *sok* vagy az *összes* általa meghatározott *kör*, *ellipszis* vagy *hiperbola kvadratikus*?

Hilbert a geodetikusokat rendelte a 1-rendű (lineáris) görbékhez. Ez a probléma az ellipszist és hiperbolát rendelné a 2-rendű (kvadratikus) görbékhez.

Definíció. (KÁ 2015).

Valamely $\varepsilon \in [0,1) \cup (1,\infty)$ számra egy d projektív metrikát *erősen ε-kvadratikusnak* mondunk, ha minden $a > 0$ és olyan F_1, F_2 pontokra, amelyekre $\varepsilon a = d(F_1,F_2)$, az $\mathcal{E}^a_{d;F_1,F_2}$ ellipszis vagy $\mathcal{H}^a_{d;F_1,F_2}$ hiperbola kvadratikus.
Erősen kvadratikusnak nevezzük a metrikát, ha erősen ε-kvadratikus minden $\varepsilon \geq 0$ esetén.
Végül egy metrika *gyengén kvadratikus*, ha van egy kvadratikus ellipszise vagy hiperbolája.

Beltrami's theorem. (1865, [1]).

Ha egy projektív metrika Riemannian-féle, akkor a három klasszikus geometria egyike.

A Riemmann-feltétel szerint minden infinitezimális gömbfelület kvadratikus, vagyis ez az infinitezimálisan erős 0-kvadratikusság.

Tétel. (Busemann 1953, [6, 25.4]).

Egy Minkowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha egy gömbfelület kvadratikus.

Tétel. (KÁ 2016, [11, Theorem 5.1]).

Egy Hilbert-metrika akkor és csak akkor Bolyai hiperbolikus metrikája, ha egy gömbfelület kvadratikus.

Angol

Tétel. (KÁ 2016, [11, Theorem 4.3]).

Egy Minkowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha egy ellipszis kvadratikus.

Tétel. (KÁ 2016, [11, Theorem 5.5]).

Egy analitikus Hilbert-metrika Bolyai hiperbolikus metrikája, ha egy $1/\sqrt{3}$-nál nagyobb excentricitású ellipszis kvadratikus.

Tétel. (KÁ & KJ 2017, [14]).

Egy Minkowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha egy hiperbola kvadratikus.

Várható tétel. (KÁ & KJ 2017, [14]).

Egy analitikus Hilbert-metrika Bolyai hiperbolikus metrikája, ha egy $\sqrt{3}$-nál kisebb excentricitású hiperbola kvadratikus.

Nyitott kérdések.
- Egy gyengén kvadratikus projektív metrika klasszikus?
- Az ε-kvadratikus projektív metrikák klasszikusak?
- Az erősen kvadratikus projektív metrikák klasszikusak?

Sejtés. (KÁ & ÓT 2016, [15]).

Egy Hilbert-metrika akkor és csak akkor Bolyai hiperbolikus metrikája, ha két infinitezimális köre kvadratikus.

Angol

Tétel. (KÁ, 2017, [12]).

Egy Mikowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha van kvadratikus kúpszelete.

Tétel. (KÁ, 2017, [13]).

Egy Mikowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi ha van egy centrálszimmetrikus kúpszelete.

Ha egy Minkowski-metrikának van nem parabolikus kvadratikus kúpszelete, akkor az centrálszimmetrikus, így a bal oldali tétel következik a jobb oldaliból a nem parabolikus esetben. Minkowski-metrikákban a centrálszimmetrikus kúpszeletek ellipszisek!

Tétel. (TL & BK, 1988, [18, 19]).

Egy Finsler-sokaság akkor és csak akkor euklidészi, ha minden ellipszis egybeesik két olyan elliptikus kúpszelettel, amelyek fókuszai az ellipszis két fókuszába esnek, és minden elliptikus kúpszelet egybeesik egy olyan ellipszissel, mellyel közös fókusza van.

Ez és a klasszikus geometriák erős kvadratikussága igazolja, hogy a klasszikus geometriák közül egyedül az euklidészi geometria olyan, hogy *minden* kúpszelete kvadratikus.

Várható tétel. (KÁ, 2017, [12]).

Hilbert-metrikában nincs kvadratikus kúpszelet.

Várható tétel. (KÁ, 2017, [13]).

Hilbert-metrikában nincs olyan kúpszelet, amely ellipszissel vagy hiperbolával esne egybe.

Nyitott kérdések. Mennyire határozzák meg a projektív metrikákat más metrikus konstrukciók? • Mi a helyzet a reguláris poligonokkal? (Korchmáros 2016, Potenza) • A Ptolemaiosz-egyenlőtlenség csak a klasszikus metrikákra teljesül? [10] • stb.

Angol

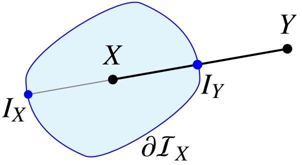
Angol

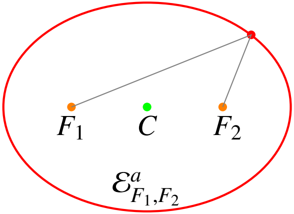
Projective metrics

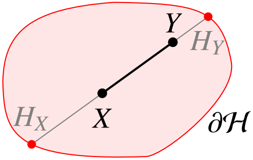
ellipses, hyperbolas and conic curves

Árpád Kurusa
http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa

Bolyai Institute, University of Szeged
http://www.math.u-szeged.hu/







Scientific lecture for habilitation, Szeged, 11$^{\underline{00}}$, February 21., 2017

For the multimedia content Adobe PDF Reader is necessary.

Hungarian

The IV. problem of Hilbert (Hilbert 1900, [9])

Determine every continuous and complete metric on the projective space $\mathbb{P}^n$ of dimension n, that satisfies the strict triangle inequality and has an open neighborhood $\{X : d(P,X) < \varrho\}$ of every point P. Treat them thoroughly.

Classification of projective metrics (Hamel 1903, [8])

Let $\mathcal{D}$ be the support of such a projective metric. Then there are exactly three cases: hyperbolic *($\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n$ convex),* parabolic *($\mathcal{D} = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n$), and* elliptic *($\mathcal{D} = \mathbb{P}^n$).*

Construction (Busemann 1961, [3]; based on Blaschke's extension [2] of the Crofton-formula [7])

Let μ be a quasi pozitive[3] "measure" on the manifold of the hyperplanes.
Let the length of a curve be the measure $\mu/2$ of the set of intersecting hyperplanes.

Theorem. (Pogorelov 1973, [16] on the plane; Szabó 1986, [17] any dimension).

Busemann's construction gives all the projective metrics.

Busemann [5]: "... [Hilbert] was not aware of the immense number of these metrics, so that the second part of the problem ... has inevitably been replaced by the investigation of special, or special classes of, interesting geometries. ".

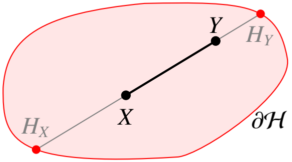
[3] Not necessarily positive everywhere, however for any non-collinear triple ABC of points the "measure" of the hyperplanes intersecting the double egde $\overline{AB} \cup \overline{BC}$ is positive and the "measure" of those hyperplanes passing through B is zero.

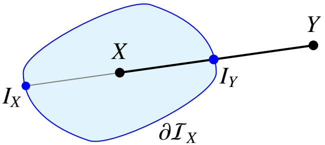
Hungarian

Hilbert metric. $d_{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ is defined by

$$d_{\mathcal{H}}(X,Y)=\begin{cases}0, & \text{if } X=Y,\\ \frac{1}{2}\left|\ln(X,Y;H_X,H_Y)\right|, & \text{if } X\neq Y,\end{cases}$$

where $\mathcal{H}$ is an open, strictly convex, bounded domain in $\mathbb{R}^n$ and $\overline{H_XH_Y}=\mathcal{H}\cap XY$.





Minkowski metric. $d_{\mathcal{I}}\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ is defined by $d_{\mathcal{I}}(X,Y)=(Y,I_Y;X)$, where $\mathcal{I}$, the *indicatrix*, is an open, strictly convex, bounded, centrally symmetric domain in $\mathbb{R}^n$ and $\overline{I_XI_Y}=\mathcal{I}_X\cap XY$.

Elliptic metric. $d\colon \mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n\to\mathbb{R}$ is defined by $d(X,Y)=\arccos|\langle\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\rangle|$, where the points of $\mathbb{P}^n$ are the diagonal point pairs of $\mathcal{S}^n$ and $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is an Euclidean metric of $\mathbb{R}^{n+1}$.

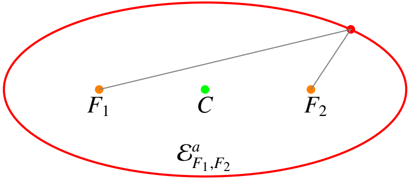
Theorem. (Busemann 1970, [4]).

Among all projective metrics with compact spheres those of Hilbert and of Minkowski are the only ones such that any isometry of one geodesic on another or itself is a projectivity.[4]

4 It is an affinity in case of Minkowski metrics.

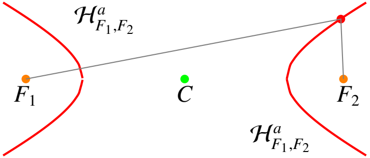
Hungarian

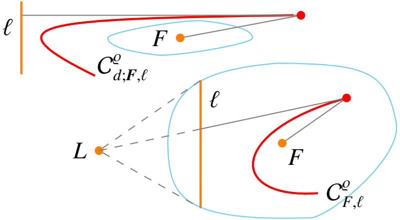
Ellipses, hyperbolas and conic curves are *metric constructions*.



A set $\mathcal{E}^a_{d;F_1,F_2} := \{P : 2a = d(F_1,P) + d(P,F_2)\}$, where F_1, F_2, the *focuses*, are fixed points and $f := d(F_1,F_2)/2 < a$, is called *ellipse*. The ellipse is called *circle* if $f = 0$. The metric midpoint C of the segment $\overline{F_1F_2}$ is called the *metric center* of $\mathcal{E}^a_{d;F_1,F_2}$.

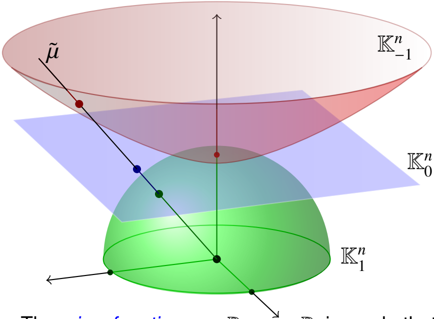
A set $\mathcal{H}^a_{d;F_1,F_2} := \{P : 2a = |d(F_1,P) - d(P,F_2)|\}$, where F_1 and F_2, the *focuses*, are fixed points and $0 < a < d(F_1,F_2)/2 = f$, is called *hyperbola*. The metric midpoint C of the segment $\overline{F_1F_2}$ is called the *center* of $\mathcal{H}^a_{d;F_1,F_2}$.





A set $C^\varrho_{d;\ell,F} := \{P : \varrho d(\ell,P) = d(\ell,F)d(F,P)|\}$, where ℓ, the *directrix*, is a fixed straight line, $F \notin \ell$, the *focus*, is a fixed point, and $\varrho > 0$, is called *conic curve*. A conic curve is *elliptic*, *parabolic*, or *hyperbolic*, according to $\varrho < d(\ell,F)$, $\varrho = d(\ell,F)$ or $\varrho > d(\ell,F)$, respectively.

Projecting the quadratic modells of the classic geometries gives the classic projective metrics.



The *size function* $\nu_\kappa\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is such that $\nu_\kappa(r)\mathcal{S}^{n-1}$ is isometric to a metric sphere of radius $r > 0$ in $\mathbb{K}^n_\kappa$. The *projection function* $\mu_\kappa\colon [0, \mathring{\imath}_\kappa) \to \mathbb{R}_+$ makes geodesic correspondence by $\tilde{\mu}_\kappa\colon\ \mathrm{Exp}_O(r\omega) \mapsto \mu_\kappa(r)\omega$.

$\mathbb{K}^n_\kappa$	κ	ν_κ	μ_κ	$\mathring{\imath}_\kappa$
$\mathbb{H}^n$	-1	$\sinh r$	$\tanh r$	∞
$\mathbb{R}^n$	0	r	r	∞
$\mathbb{S}^n$ $(\mathbb{P}^n)$	$+1$	$\sin r$	$\mathrm{tg}\, r$	$\pi/2$

Here we identified the space $\mathcal{T}_O\mathbb{K}^n_\kappa$ with $\mathbb{R}^n$ by the natural way, and used $\omega \in \mathcal{S}^{n-1}$ in both senses.

Folkloric fact. *Ellipses and hyperbolas of the classic metrics are quadratic curves.*

Proof. (Only for ellipse of hyperbolic metric. See [11].)
In the quadratic model $\mathbb{H}^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ z \geq 1\}$ the metric is $d(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \cosh^{-1}\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\rangle$ and $\kappa = -1$. Fix $f > 0$ and $a > f$, and let $F_\pm = (\sinh(\pm f), 0, \cosh f)$. Then $C = (0,0,1)$.
For any point $P = (x,y,z) \in \mathcal{E}^a_{d;F_-,F_+} \subset \mathbb{H}^2$ there is a $t \in [0,f]$ such that
$$a \pm t = d(F_\pm, X) = \cosh^{-1}(\pm x \sinh f + z\cosh f),$$
Taking cosh gives
$$\cosh a \cosh t \pm \sinh a \sinh t = \cosh(a \pm t) = z\cosh f \mp x \sinh f,$$
hence $\cosh t = z\cosh f/\cosh a$ and $\sinh t = -x\sinh f/\sinh a$. Hence
$$\frac{z^2}{\cosh^2 a/\cosh^2 f} - \frac{x^2}{\sinh^2 a/\sinh^2 f} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$
follows, and so
$$z^2 - x^2\frac{\tanh^2 f}{\tanh^2 a} = \frac{\cosh^2 a}{\cosh^2 f} = \frac{1-\tanh^2 f}{1-\tanh^2 a}.$$
Using the C-based polar coordinates (ω, r) of P, we have $P = (\sinh r\cos\omega, \sinh r\sin\omega, \cosh r)$, which results in
$$\frac{1}{\sinh^2 r(\omega)} = \frac{\cos^2\omega}{\sinh^2 a} + \frac{\sin^2\omega}{(\tanh^2 a - \tanh^2 f)\cosh^2 a}.$$
∎

In general for ellipse and also for hyperbola:
$$\frac{1}{\nu_\kappa^2(r(\omega))} = \frac{\cos^2\omega}{\nu_\kappa^2(a)} + \frac{\sin^2\omega}{(\mu_\kappa^2(a) - \mu_\kappa^2(f))(1-\kappa\nu_\kappa^2(a))}.$$

Hungarian

Problem. (ÁK 2015).

Which projective metrics are such that *one, many* or *all* of its *spheres*, *ellipses*, or *hyperbolas*, are *quadratic*?

Hilbert assigned the geodesics to the 1-st order (linear) curves. This problem would assign the ellipses and hyperbolas to the 2-nd order (quadratic) curves.

Definition. (ÁK 2015).

A projective metric d is called *strongly ε-quadratic* for an $\varepsilon \in [0,1) \cup (1,\infty)$ if for every $a > 0$ and pair of points F_1, F_2, such that $\varepsilon a = d(F_1, F_2)$, the ellipse $\mathcal{E}^a_{d;F_1,F_2}$ or hyperbola $\mathcal{H}^a_{d;F_1,F_2}$ is quadratic.
It is called *strongly quadratic* if it is strongly ε-quadratic for every $\varepsilon \geq 0$.
Finally, we say that it is *weakly quadratic* if it has a quadratic ellipse or hyperbola.

Beltrami's theorem. (1865, [1]).

If a projective metric is Riemannian, then it is one of the three classic geometries.

By the Riemmannian condition every infinitesimal sphere is quadratic, i.e. this is strong 0-quadraticity infinitesimally.

Theorem. (Busemann 1953, [6, 25.4]).

A Minkowski metric is Euclidean if and only if it has a quadratic sphere.

Theorem. (ÁK 2016, [11, Theorem 5.1]).

A Hilbert metric is Bolyai's hyperbolic metric if and only if it has a quadratic sphere.

Hungarian

Theorem. (ÁK 2016, [11, Theorem 4.3]).

A Minkowski metric is Euclidean if and only if it has a quadratic ellipse.

Theorem. (ÁK 2016, [11, Theorem 5.5]).

An analytic Hilbert metric is Bolyai's hyperbolic metric if and only if it has a quadratic ellipse of eccentricity larger than $1/\sqrt{3}$.

Theorem. (ÁK & JK 2017, [14]).

A Minkowski metric is Euclidean if and only if it has a quadratic hyperbola.

Expected theorem. (ÁK & JK 2017, [14]).

An analytic Hilbert metric is Bolyai's hyperbolic metric if and only if it has a quadratic hyperbola of eccentricity smaller than $\sqrt{3}$.

Open questions. • Is a weakly quadratic projective metric classic? • Are the ε-quadratic projective metrics classic? • Are the strongly quadratic projective metrics classic?

Conjecture. (ÁK & TÓ 2016, [15]).

A Hilbert metric is Bolyai's hyperbolic metric if and only if it has two infinitesimal spheres that are quadratic.

Theorem. (ÁK, 2017, [12]).

A Mikowski metric is Euclidean if and only if it has a quadratic conic curve.

Theorem. (ÁK, 2017, [13]).

A Mikowski metric is Euclidean if and only if it has a centrally symmetric conic curve.

If a Minkowski metric has a non-parabolic quadratic conic curve, then it is centrally symmetric, so the theorem on the left follows from the theorem on the right for the non-parabolic case. In Minkowski metrics centrally symmetric conic curves are ellipses!

Theorem. (LT & KB, 1988, [18, 19]).

A Finsler space is Euclidean if and only if every ellipse coincides with two elliptic conic curves such that their focuses are the two focuses of the ellipse, and every elliptic conic curve coincides with an ellipse such that they have a common focus.

This and the strong quadraticity of the classic geometries imply that among classic geometries only the Euclidean geometry is such that *all* conic curves are quadratic.

Expected theorem. (ÁK, 2017, [12]).

A Hilbert metric does not have quadratic conic curve.

Expected theorem. (ÁK, 2017, [13]).

A Hilbert metric has no conic curve that coincides an ellipse or hyperbola.

Open questions. How much a projective metric is determined by other metric contructions?
- How about regular polygons? (Korchmáros 2016, Potenza)
- Ptolemaic inequality holds only in classic metrics? [10]
- etc.

Hungarian

Bibliography ordered by authors I

[1] E. Beltrami, Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Opere*, **I** (1865), 262–280. ⟨6, 15⟩

[2] W. Blaschke, Integralgeometrie 11, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11** (1936), 359–366. ⟨2, 11⟩

[3] H. Busemann, Geometries in which the planes minimize area, *Ann. Mat. Pure Appl.*, **55:4** (1961), 171–190. ⟨2, 11⟩

[4] H. Busemann, *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **54**, Springer, New York, 1970. ⟨3, 12⟩

[5] H. Busemann, Problem IV: Desarguesian Spaces, *Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math.*, **28** (1976), 131–141. ⟨2, 11⟩

[6] H. Busemann and P. J. Kelly, *Projective Geometries and Projective Metrics*, Academic Press, New York, 1953. ⟨6, 15⟩

[7] M. W. Crofton, Probability, *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., **19** (1885), 768–788. ⟨2, 11⟩

[8] G. Hamel, Über die Geometrien, in denen die Graden die kürzestens sind, *Math. Ann.*, **57** (1903), 231–264. ⟨2, 11⟩

[9] D. Hilbert, Mathematische Probleme, *Göttinger Nachrichten*, (1900), 253–297; *Archiv der Math. Physik (3)*, **1** (1901), 44–63, 213–237; angolul: http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/hilbert/problems.html. ⟨2, 11⟩

[10] D. Kay, The ptolemaic inequality in Hilbert geometry, *Pacific J. Math.*, **21** (1967), 293–301. ⟨8, 17⟩

Hungarian

Bibliography ordered by authors II

[11] Á. Kurusa, Projective metrics with quadratic ellipses, *manuscript*, (2016), submitted. ⟨5, 6, 7, 14, 15, 16⟩

[12] Á. Kurusa, Projective metrics with quadratic conic curves, *manuscript*, (2017). ⟨8, 17⟩

[13] Á. Kurusa, Projective metrics with conical ellipses and hyperbolas, *manuscript*, (2017). ⟨8, 17⟩

[14] Á. Kurusa and J. Kozma, Projective metrics with quadratic hyperbolas, *manuscript*, (2017). ⟨7, 16⟩

[15] Á. Kurusa and T. Ódor, Symmetric perpendicularity in projective metrics, *preliminary manuscript*, (2017). ⟨7, 16⟩

[16] A. V. Pogorelov, A complete solution of Hilbert's fourth problem, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1979), 46–49. ⟨2, 11⟩

[17] Z. I. Szabó, Hilbert's fourth problem I., *Adv. Math.*, **59** (1986), 185–301; doi: 10.1016/0001-8708(86)90056-3. ⟨2, 11⟩

[18] L. Tamássy and K. Bélteky, On the coincidence of two kinds of ellipses in Minkowskian and Finsler planes, *Publ. Math. Debrecen*, **31:3-4** (1984), 157–161. ⟨8, 17⟩

[19] L. Tamássy and K. Bélteky, On the coincidence of two kinds of ellipses in Riemannian and in Finsler spaces, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, **46** (1988), 1193–1200. ⟨8, 17⟩

Hungarian