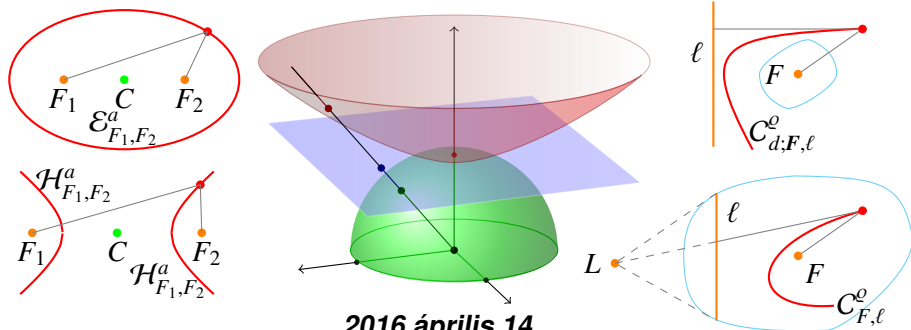


Projektív metrikák ellipszisei (... és hiperbolái, meg kúpszeletei)

Kurusa Árpád

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem
<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>



2016 április 14.

Nagy Péter 70 (Óbudai Egyetem)

Hilbert IV. problémája (Hilbert, 1900, [9])

Adjuk meg és osztályozzuk az n -dimenziós $\mathbb{P}^n$ valós projektív tér valamely $\mathcal{D}$ részhalmazán értelmezett azon metrikákat, melyek teljesítik a szigorú háromszög-egyenlőtlenséget.

Projektív metrikák osztályozása (Hamel, 1903, [10])

Három osztály van:	elliptikus	parabolikus	hiperbolikus
$\mathcal{D}$ kiterjedése:	$\mathcal{D} = \mathbb{P}^n$	$\mathcal{D} = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n$	$\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n$ konvex
főbb metrikák	gömbi	Minkowski-féle	Hilbert-féle

Busemann-konstrukció (Busemann, 1961, [3]); Crofton-formula [6] Blaschke-kiterjesztése [2] alapján

Legyen μ egy kvázi pozitív¹ "mérték" a hipersíkok halmazán

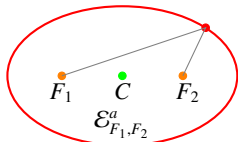
Görbe hossza := őt metsző hipersíkok halmazának μ -mértéke/2.

Tétel. (Sikon Pogorelov, 1973, [15]; általában Szabó, 1986, [16]).

A Busemann-konstrukció minden projektív metrikát előállít.

Busemann [4]: "... It is clear from Hilbert's comments that he was not aware of the immense number of these metrics, so that the second part of the problem ... has inevitably been replaced by the investigation of special, or special classes of, interesting geometries."

¹ Nem feltétlenül mindenütt pozitív, de bármely nem kollineáris ABC ponthármásra az $\overline{AB} \cup \overline{BC}$ halmazt metsző hipersíkok "mértéke" pozitív, a B ponton átmenő hipersíkok "mértéke" pedig nulla.

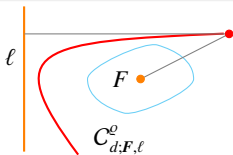
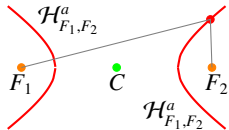


Az $\mathcal{E}^a_{d;F_1,F_2} := \{P : 2a = d(F_1, P) + d(P, F_2)\}$ ponthalmazt, ahol F_1 és F_2 a (fókusz)pontok és $a > d(F_1, F_2)/2$, **metrikus ellipszis-nek**, $F_1 = F_2$ esetén **metrikus körnek** nevezzük.

Az $\overline{F_1 F_2}$ szakasz C metrikus felezőpontja az $\mathcal{E}^a_{d;F_1,F_2}$ **centruma**.

A $\mathcal{H}^a_{d;F_1,F_2} := \{P : 2a = |d(F_1, P) - d(P, F_2)|\}$ ponthalmazt, ahol F_1 és F_2 rögzített (fókusz)pontok és $0 < a < d(F_1, F_2)/2$, **metrikus hiperbolának** nevezzük.

Az $\overline{F_1 F_2}$ szakasz C metrikus felezőpontja a $\mathcal{H}^a_{d;F_1,F_2}$ **centruma**.



A $\mathcal{C}^\varrho_{d;F,\ell} := \{P : \varrho d(\ell, P) = d(\ell, F)d(F, P)\}$ ponthalmazt, ahol F (fókusz)pont, ℓ (vezér)egyenes és $\varrho > 0$, **metrikus kúpszelet-nek**² nevezzük. Ezt aszerint nevezzük **elliptikusnak**, **parabolikusnak** illetve **hiperbolikusnak**, hogy $\varrho < d(\ell, F)$, $\varrho = d(\ell, F)$ vagy $\varrho > d(\ell, F)$.

Kérdés. Milyen projektív metrikákra teljesül, hogy **valamely, sok vagy minden** metrikus **gömbje, ellipszise, hiperbolája** vagy **kúpszelete** kvadratikus?

²Tamássy és Bélteki igazolta [17, 18], hogy egy Finsler-tér akkor és csak akkor euklidészi, ha **metrikus ellipszisei egybeesnek az elliptikus metrikus kúpszeleteivel**, vagy, **metrikus hiperbolái egybeesnek a hiperbolikus metrikus kúpszeleteivel**. Másfelől G. Horváth és Martini bizonyította [8, Proposition 1 és Proposition 2], hogy ha egy Minkowski-sík indikátrixában szakasz van, akkor a metrikus ellipszisek (hiperbolák) és elliptikus (hiperbolikus) metrikus kúpszeletek osztálya nem esik egybe.

Beltrami-tétel³. (Beltrami, 1865, [1]).

Ha geodetikusan kapcsolódó Riemann-terek egyike konstans görbületű, akkor mind az.

Következmény. *Ha egy projektív metrika infinitezimális gömbjei kvadratikusak⁴, akkor az elliptikus, euklidészi, vagy Bolyai-féle.*

Minkowski-metrika

Az a $d_I: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$d_I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\{\lambda > 0 : (\mathbf{y} - \mathbf{x})/\lambda \in I\}$$

ahol I , az **indikátrix**, egy nyílt, szigorúan konvex, középpontosan szimmetrikus, korlátos tartomány az $\mathbb{R}^n$ térben.

Hilbert-metrika

Az a $d_H: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ \frac{1}{2} \left| \ln |(p, q; \mathbf{x}, \mathbf{y})| \right|, & \text{ha } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \end{cases}$$

ahol $\mathcal{H}$ egy nyílt, szigorúan konvex halmaz az $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) térben és $\overline{pq} = \mathcal{H} \cap xy$.

Tétel. (Busemann [5, 25.4]).

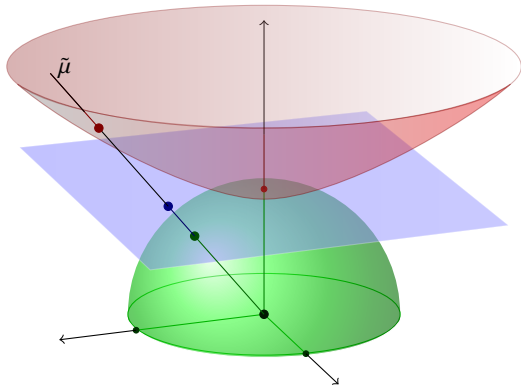
Ha egy Minkowski-metrika valamely metrikus gömbje kvadratikus, akkor a metrika euklidészi.

Tétel. (Kay [11, 296. old.]).

Ha egy Hilbert-metrika minden "elég kicsi" metrikus gömbje kvadratikus, akkor a metrika Bolyai-féle.

³ Ezt a tételt először Nagy Péter említette nekem.

⁴ Ezek a Riemann-féle projektív metrikák, melyek Beltrami tétele szerint konstans görbületűek.



Az n -dimenziós konstans $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$ görbületű $\mathbb{K}_\kappa^n$ terek $\nu_\kappa: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ **méret függvénye** azt adja meg, hogy az $r > 0$ sugarú geodetikus gömbök mekkora sugarú euklideszi gömbbel izometrikusak. A $\mu_\kappa: [0, i_\kappa) \rightarrow \mathbb{R}_+$ **vetítő függvény** pedig a $\tilde{\mu}_\kappa: \text{Exp}_O(r\omega) \mapsto \mu_\kappa(r)\omega$ leképezéssel⁵ geodetikus kapcsolatot hoz létre, vagyis

$\mathbb{K}_\kappa^n$	κ	ν_κ	μ_κ	i_κ
$\mathbb{H}^n$	-1	$\sinh r$	$\tanh r$	∞
$\mathbb{R}^n$	0	r	r	∞
$\mathbb{S}^n$ ($\mathbb{P}^n$)	$+1$	$\sin r$	$\text{tg } r$	$\pi/2$

Klasszikus geometriák ellipszisei kvadratikusak.

Az $\mathcal{E}_{d;F_1,F_2}^a \subset \mathbb{K}_\kappa^2$ metrikus ellipszis egyenlete a centrumában felvett (ω, r) polárkoordinátákkal

$$\frac{1}{\nu_\kappa^2(r(\omega))} = \frac{\cos^2 \omega}{\nu_\kappa^2(a)} + \frac{\sin^2 \omega}{(\mu_\kappa^2(a) - \mu_\kappa^2(f))(1 - \kappa \nu_\kappa^2(a))}, \quad [13].$$

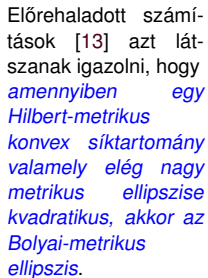
Klasszikus geometriák hiperbolái is kvadratikusak [14], így [17, 18] következtében a klasszikus geometriák kúpszeletei csak az euklideszi esetben lehetnek **mind** kvadratikusak.

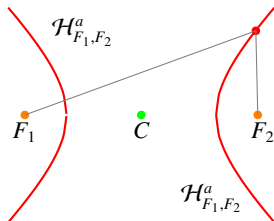
⁵ Itt $\omega \in S^{n-1}$ és a $\mathcal{T}_O \mathbb{K}_\kappa^n$ teret azonosítottuk az $\mathbb{R}^n$ térrel.



Ha egy projektív metrika megfelelő metrikus ellipszise kvadratikus, akkor klasszikus geometria metrikája?

Ha egy Minkowski-metrikus sík valamely metrikus ellipszise kvadratikus, akkor a metrika euklidészi.



**Kérdés (Kurusa, 2015)**

Ha egy projektív metrika megfelelő metrikus hiperbolája kvadratikus, akkor klasszikus geometria metrikája?

Tétel. (Kurusa, 2015, [13]).

Ha egy Minkowski-metrikus sík valamely metrikus hiperbolája kvadratikus, akkor a metrika euklidészi.

A bizonyítás az ellipsziséknél használt módszer adaptációja.

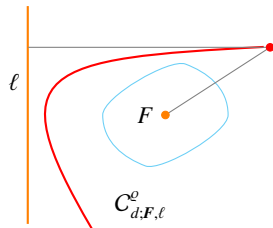
Kérdés (Kurusa, 2015)

Ha egy projektív metrika megfelelő metrikus kúpszelete⁶ kvadratikus, akkor az a metrika euklidészi?

Tétel. (Kurusa, 2016, [12]).

Ha egy Minkowski-metrikus sík valamely metrikus kúpszelete kvadratikus, akkor euklidészi.

A bizonyítás a megfelelő affin egyenlet, majd a koordináták kiszámítása utáni nem teljesen trükkmentes számolás.



⁶Tudjuk, hogy [8, Theorem 1 és Theorem 4], hogy Minkowski-síkon az elliptikus metrikus kúpszelet konvex görbe, a hiperbolikus metrikus kúpszelet két konvex görbe, előbbi pontosan akkor szigorúan konvex ha az indikátrix is szigorúan konvex, utóbbi pedig ha tartalmaz egy szakaszt, akkor az indikátrixban is van szakasz. Továbbá [8, Theorem 5], szerint Minkowski-síkon a parabolikus metrikus kúpszelet konvex görbe, mely pontosan akkor tartalmaz szakaszt, ha az indikátrixban is van szakasz.



Köszönöm a figyelmet!

Hivatkozások szerzők szerint rendezve I

- [1] E. Beltrami
Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Opere*, **I** (1865), 262–280. $\langle 4 \rangle$
- [2] W. Blaschke
Integralgeometrie **11**, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11** (1936), 359–366. $\langle 2 \rangle$
- [3] H. Busemann
Geometries in which the planes minimize area, *Ann. Mat. Pure Appl.*, **55:4** (1961), 171–190. $\langle 2 \rangle$
- [4] H. Busemann
Problem IV: Desarguesian Spaces, *Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math.*, **28** (1976), 131–141. $\langle 2 \rangle$
- [5] H. Busemann and P. J. Kelly
Projective Geometries and Projective Metrics, Academic Press, New York, 1953. $\langle 4 \rangle$
- [6] M. W. Crofton
Probability, *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., **19** (1885), 768–788. $\langle 2 \rangle$
- [7] M. A. Ghandehari
Heron's problem in the Minkowski plane, *Technical Report of Math. Dept. of University of Texas at Arlington*, **306** (1997), 76019.
- [8] Á. G. Horváth and H. Martini
Conics in normed planes, *Extracta Math.*, **26:1** (2011), 29–43; arXiv: [1102.3008](https://arxiv.org/abs/1102.3008). $\langle 3, 7 \rangle$
- [9] D. Hilbert
Mathematische Probleme, *Göttinger Nachrichten*, (1900), 253–297; *Archiv der Math. Physik* (3), **1** (1901), 44–63, 213–237; angolul: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>. $\langle 2 \rangle$

Hivatkozások szerzők szerint rendezve II

- [10] G. Hamel
Über die Geometrien, in denen die Graden die kürzestens sind, *Math. Ann.*, **57** (1903), 231–264. [⟨2⟩](#)
- [11] D. Kay
The ptolemaic inequality in Hilbert geometry, *Pacific J. Math.*, **21** (1967), 293–301. [⟨4⟩](#)
- [12] Á. Kurusa
Projective metrics with quadratic conics, *manuscript*, (2016). [⟨7⟩](#)
- [13] Á. Kurusa
Projective metrics with quadratic ellipses, *manuscript*, (2016). [⟨5, 6, 7⟩](#)
- [14] Á. Kurusa & J. Kozma
Projective metrics with quadratic hyperbolas, *manuscript*, (2016). [⟨5⟩](#)
- [15] A. V. Pogorelov
A complete solution of Hilbert's fourth problem, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1979), 46–49. [⟨2⟩](#)
- [16] Z. I. Szabó
Hilbert's fourth problem I., *Adv. Math.*, **59** (1986), 185–301; doi: [10.1016/0001-8708\(86\)90056-3](#). [⟨2⟩](#)
- [17] L. Tamássy and K. Bélteky
On the coincidence of two kinds of ellipses in Minkowskian and Finsler planes, *Publ. Math. Debrecen*, **31:3-4** (1984), 157–161. [⟨3, 5⟩](#)
- [18] L. Tamássy and K. Bélteky
On the coincidence of two kinds of ellipses in Riemannian and in Finsler spaces, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, **46** (1988), 1193–1200. [⟨3, 5⟩](#)

Az előadás felépítése

- 1 Projektív metrikák
- 2 Metrikus ellipszis, hiperbola és kúpszelet
- 3 Projektív metrikák kvadratikus gömbökkel
- 4 Klasszikus geometriák ellipszisei
- 5 Ellipszises projektív metrikák
- 6 Hiperbolás és kúpszeletes projektív metrikák