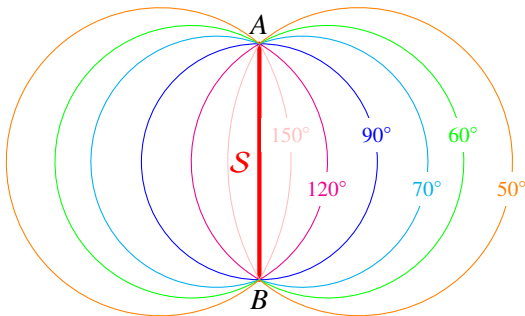
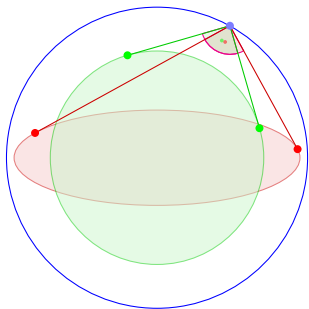


# A látszat néha csal! (Izoptikusok)

**Kurusa Árpád**

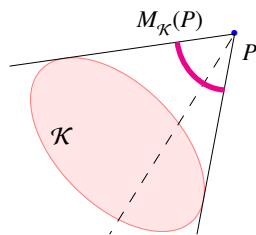
Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem  
<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>



**2015 december 14.**

**Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium**

# Izoptikusok: definíció és kérdések



A konvex, zárt, korlátos  $\mathcal{K}$  alakzat **pontbeli látószögének** nevezzük a külső  $P$  pontból kiinduló, a  $\mathcal{K}$  alakzatot érintő két félegyenes által bezárt szöget. Ennek **irányítatlan nagyságát**  $M_{\mathcal{K}}(P)$  jelöli, melyet a  $\mathcal{K}$  alakzat  $P$  **pontbeli látószögmértékének**<sup>1</sup> vagy (a pusztán lustaságnak engedve) egyszerűen **látószögnek** nevezzük.

A  $\mathcal{K}$  görbe  **$\gamma$ -izoptikusának** nevezzük azon pontok  $\mathcal{K}^\gamma := \{P : M_{\mathcal{K}}(P) = \gamma\}$  halmazát, melyekből az alakzat  $\gamma \in [0, \pi)$  szög alatt látszik. A  $\mathcal{K}^{\pi/2}$  halmazt **ortoptikusnak** hívjuk.

Világos, hogy

- különböző szögekhez tartozó izoptikusoknak nincs közös pontjuk,
- a  $\mathcal{K}$  minden külső pontja a  $\bigcup_{\gamma \in [0, \pi)} \mathcal{K}^\gamma$  halmazban van.

Ezek alapján szokás elfogadni a  $\mathcal{K}^\pi := \partial\mathcal{K}$  definíciót<sup>2</sup>.

## Kérdések.

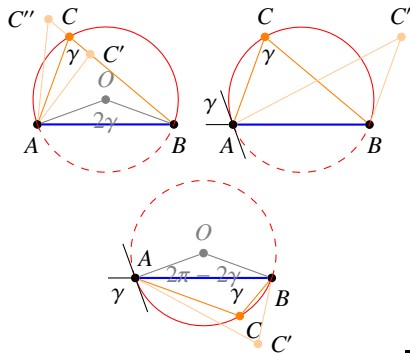
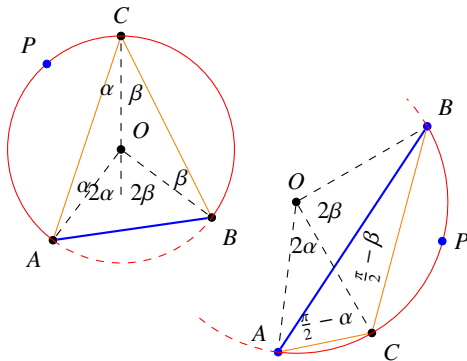
- Milyenek az izoptikusok?
- Milyen megoldásai vannak a  $\mathcal{K}^\gamma = \mathcal{L}^\beta$  egyenletnek?

<sup>1</sup> Eszerint a látószög a  $[0, \pi)$  intervallumba esik.

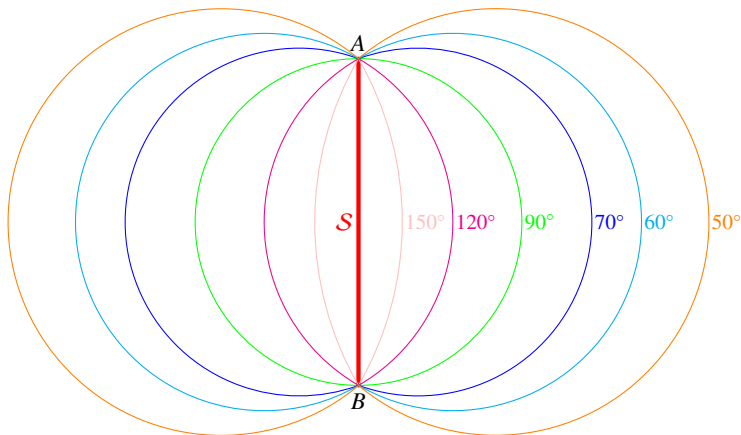
<sup>2</sup> Itt  $\partial\mathcal{K}$  a  $\mathcal{K}$  nem belső pontjainak halmazát jelenti. Egy tartomány esetében ez a határ.

**Kerületi szögek tétele.** Legyen adott egy  $\gamma \in (0, \pi)$  szög és egy  $\overline{AB}$  szakasz. Ekkor létezik olyan  $P$  pont, melyből az  $\overline{AB}$  szakasz  $\gamma$  szög alatt látszik. Az  $\overline{AB}$  szakasz  $\gamma$ -izoptikusa az  $A, B$  és  $P$  pontokra illeszkedő körnek az a zárt köríve, valamint annak az  $AB$  egyenesre vett tükröképe, amely az  $AB$  egyenesnek a  $P$  ponttal megegyező oldalán van.

**Bizonyítás.** A szinusztétel értelmében az  $\overline{AB}$  szakasz  $f$  felező merőlegesén az a  $P$  pont, mely a  $T = f \cap \overline{AB}$  ponttól  $d(T, B) \operatorname{ctg}(\gamma/2)$  távolságra van, igazolja az első állítást.



A szakasz végpontjaiban mutatkozó értelmezhetetlenség miatt **szokás az izoptikusokat bővíteni a torlódási pontokkal.**

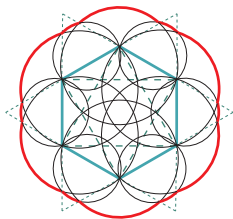


Mivel egy  $\gamma$  szöghöz tartozó látókörív és a szakasz bezárt szöge éppen  $\pi - \gamma$ , világos, hogy

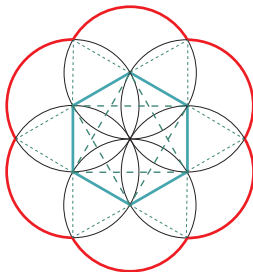
- $\gamma < \pi/2$  esetén a  $\gamma$ -izoptikus “behorpad” az  $x = 0$  koordináta közelében,
- az ortoptikus pontosan a Thálesz-kör,
- $\gamma > \pi/2$  esetén pedig a  $\gamma$ -izoptikus konvex.

Vegyük észre, hogy a definíció értelmében  $A$  és  $B$  minden izoptikusnak pontja.

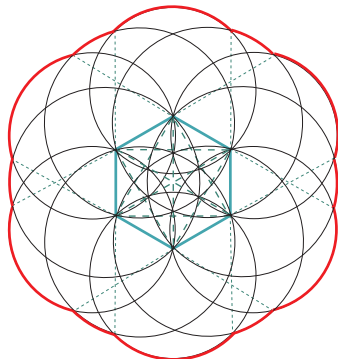
A kerületi szögek tétele értelmében a  $\mathcal{P}$  konvex sokszög  $\mathcal{P}^\gamma$  izoptikusa körívek uniója.



$$\gamma > \pi/3$$



$$\gamma = \pi/3$$

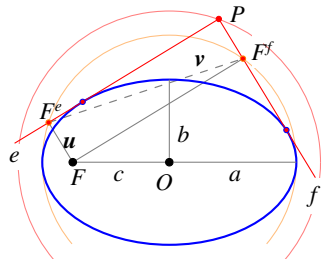


$$\gamma < \pi/3$$

- Egy szabályos  $k$ -oldalú szabályos  $\mathcal{P}$  sokszög  $\mathcal{P}^{\pi(n-1)/n}$  izoptikusa éppen a  $\mathcal{P}$  köré írt kör, csak a csúcsok hiányoznak belőle.
- A kerületi szögek tétel szerint egy konvex sokszög torlódási pontjaival lezárt izoptikusa pontosan akkor kör, ha a sokszög szabályos.

*Egy konvex sokszög izoptikusa sosem lehet sima határu konvex tartomány izoptikusa.*

**Tétel.** Ellipszis ortoptikusa olyan kör, melynek középpontja az ellipszis középpontjába esik.



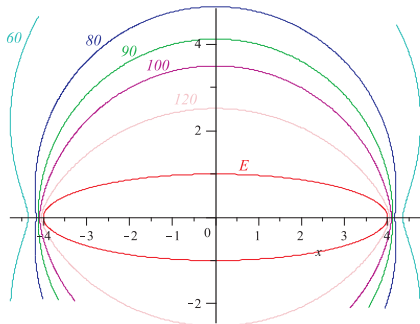
**Bizonyítás.** Legyen az ellipszis nagy- és kistengelye rendre  $2a$  és  $2b$  hosszúságú, az  $F$  fókusz távolsága az  $O$  közép-ponttól pedig  $c$ . Ekkor Pitagorasz tétele szerint  $c^2 + b^2 = a^2$ . Tekintsünk most egy olyan  $P$  pontot, melyen keresztül az ellipszishoz húzott  $e$  és  $f$  érintők merőlegesek egymásra. Jelölje  $F^e$  és  $F^f$  rendre az  $F$  merőleges vetületeit az  $e$  és  $f$  érintőkre, és legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{FF^e}$ ,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{FF^f}$ .

Mivel  $FF^ePF^f$  egy téglalap,  $\overrightarrow{F^fP} = \mathbf{u}$ , és  $d(F, P) = |\mathbf{v}|$ . Ezek szerint<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} |P_O|^2 + |F_O|^2 &= |P_O - F_O|^2 + 2\langle P_O, F_O \rangle = |F_O^e - F_O^f|^2 + 2\langle P_O, F_O \rangle = |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2 + 2(\langle P_O, F_O \rangle - \langle F_O^e, F_O^f \rangle) \\ &= |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2 + 2(\langle \overrightarrow{OF^f} + \mathbf{u}, \overrightarrow{OF^e} - \mathbf{u} \rangle - \langle \overrightarrow{OF^e}, \overrightarrow{OF^f} \rangle) = |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2 + 2(\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle) \\ &= |F_O^e|^2 + |F_O^f|^2, \end{aligned}$$

vagyis  $d(O, P) = |P_O| = \sqrt{a^2 + a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ , hiszen  $F^e$  és  $F^f$  az ellipszis főkörén van. ■

<sup>3</sup> A formulában a differenciálgeometriában okkal megszokott  $A_B = \overrightarrow{BA}$  jelölést használjuk.



**Tétel.** ([11]) Az  $a \geq b$  tengelyekkel bíró

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletű  $E$  ellipszis  $\gamma$ - és  $(\pi - \gamma)$ -izoptikusa

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = 4(b^2(x^2 - a^2) + a^2y^2) \operatorname{ctg}^2 \gamma.$$

Az izoptikusok szimmetrikusak a tengelyekre. Ha  $a = b$ , akkor az egyenlet az  $x^2 + y^2$  változóra vezet, vagyis az izoptikus — ahogy vártuk — egy kör.

Ha  $\gamma = \pi/2$ , akkor az ortoptikus kör  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$  egyenlete adódik.

Ha  $y = 0$  és  $x > 0$ , akkor a  $(\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2(\gamma/2)}, 0)$  ponton megy át a  $\gamma$ -izoptikus.

Az  $x = \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2(\gamma/2)}$  egyenest a  $\gamma$ -izoptikus pontosan akkor metszi, ha  $y = 0$  vagy  $y^2 = 4 \operatorname{ctg}^2 \gamma \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} (a^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - b^2 \operatorname{tg} \gamma)$ . Ennek csak  $\cos^2 \frac{\gamma}{2} > \frac{a^2/2}{a^2 - b^2}$  esetén van megoldása.

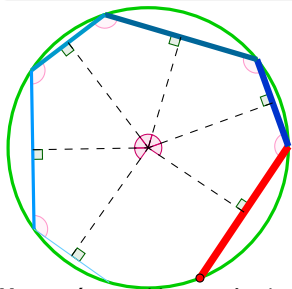
**Tehát a  $\gamma$ -izoptikus akkor és csak akkor nem konvex, ha  $\cos \frac{\gamma}{2} > \sqrt{\frac{a^2/2}{a^2 - b^2}}$ .** GeoGebra

Eszerint  $b \geq a/\sqrt{2}$  esetén minden izoptikus konvex,  $b < a/\sqrt{2}$  esetén a kicsi szögekhez tartozó izoptikusok nem konvexek.

**Tétel.** ([12]) Ellipszisek közös izoptikusa csakis kör lehet.

**Tétel. (Kurusa, 2013; [12]).**

Különböző konvex alakzatoknak akkor és csak akkor lehet közös  $\gamma$ -izoptikusa, ha  $1 - \gamma/\pi$  racionális szám, és legegyszerűbb alakjában a számláló páratlan.



**Ha  $m$  páros**, akkor  $n$  páratlan, így  $\pi - \gamma = \frac{n+1}{2}2(\pi - \gamma) - \frac{m}{2}2\pi$  miatt  $\pi - \gamma$  is a  $h$  periódusa, amiből  $(\star)$  alapján következik, hogy  $h$  konstans.

**Ha  $m$  páratlan**, akkor elég kicsi  $\varepsilon > 0$  esetén  $h(\varphi) = \sin(\frac{\gamma}{2} + \varepsilon \sin(n\varphi))$  egy támaszfüggvény, melyhez tartozó  $\mathcal{K}$  tartomány  $\gamma$ -izoptikusa  $C$ . ■

**Tétel. (Green, 1950; [3]).**

Ha  $1 - \gamma/\pi$  racionális, és a legegyszerűbb alakjában szereplő számláló páratlan, akkor vannak olyan nem kör konvex alakzatok, melyek  $\gamma$ -izoptikusa kör.

**Bizonyítási vázlat, ha  $\mathcal{K}^\gamma$  az egységkör.** Legyen a  $\mathcal{K}$  támaszfüggvénye<sup>4</sup>  $h$ . Ekkor

$$(\star) \quad \pi - \gamma = \arccos h(\varphi) + \arccos h(\varphi + \pi - \gamma).$$

Ebből kivonva ugyanezt a  $\varphi + \pi - \gamma$ , szögre kiderül, hogy  $h$  a  $2(\pi - \gamma)$  szögre is periodikus. GeoGebra

**Ha  $1 - \gamma/\pi$  irracionális**, akkor a  $k$  egész számokra vett  $2k(\pi - \gamma) \pmod{2\pi}$  szögek a  $(0, 2\pi)$  intervallumban sűrűn helyezkednek el<sup>5</sup>, így mivel  $h$  folytonos is, adódik, hogy  $h$  konstans.

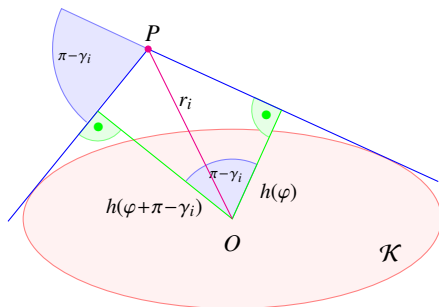
**Ha  $1 - \gamma/\pi$  racionális és legegyszerűbb alakja  $m/n$ .**

<sup>4</sup> A  $\mathcal{K}$  támaszfüggvénye az a  $2\pi$  periodikus pozitív  $h_{\mathcal{K}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  függvény, mely a  $\mathcal{K}$  azon érintőjének origótól mért  $h_{\mathcal{K}}(\varphi)$  távolságát adja, amely merőleges a  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  vektorra és átmegy a  $h_{\mathcal{K}}(\varphi)(\cos \varphi, \sin \varphi)$  ponton.

<sup>5</sup> Minden irracionális szám  $1/2m$ -nél jobban közelíthető  $m$  nevezőjű törtekkel.

**Tétel. (Nitsche, 1990; [18]).**

Ha a  $\mathcal{K}$  konvex alakzat valamely két izoptikusa koncentrikus kör, akkor  $\mathcal{K}$  egy kör.



**Bizonyítás.** Legyen  $\mathcal{K}$  támaszfüggvénye  $h$ , a  $\mathcal{K}^{\gamma_1}$  és  $\mathcal{K}^{\gamma_2}$  koncentrikus körök sugara pedig  $r_1$  és  $r_2$ .

Előbbi tétel miatt elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor  $1 - \gamma_i = \pi m_i / n_i$ , ahol  $m_i, n_i \in \mathbb{N}$  és  $\text{Inko}(m_i, n_i) = 1$  ( $i = 1, 2$ ), továbbá  $m_i$  páratlan.

Mivel

$$(*) \quad \pi - \gamma_i = \arccos \frac{h(\varphi)}{r_i} + \arccos \frac{h(\varphi + \pi - \gamma_i)}{r_i} \quad (i = 1, 2),$$

a  $h$  támaszfüggvény periodikus a  $2(\pi - \gamma_i)$  szögre is.

A kínai maradéktétel [19] szerint

- 1 vannak olyan  $a_i, b_i$  egészek, hogy  $a_i m_i + b_i n_i = 1$  ( $i = 1, 2$ ),
- 2 vannak olyan  $a, b$  egészek, hogy  $an_1 + bn_2 = \text{Inko}(n_1, n_2) =: c$ .

Az 1 miatt  $a_i(2\pi - 2\gamma_i) + (b_i - a_i)2\pi = 2\pi/n_i$ , amiért  $2\pi/n_i$  is a  $h$  periódusa.

A 2 miatt  $b \frac{2\pi}{n_1} + a \frac{2\pi}{n_2} = \frac{2\pi c}{n_1 n_2}$ , amiért  $\frac{2\pi}{n_1 n_2 / c}$  is a  $h$  periódusa.

Ha  $n_{3-i}/c$  páros szám, akkor (\*) szerint  $r_i \cos \frac{\pi - \gamma_i}{2} = h(\varphi)$ , vagyis  $\mathcal{K}$  egy kör.

Ha  $n_1/c$  és  $n_2/c$  is páratlan szám, akkor  $(\star)$  koszinuszát véve, majd átrendezés után négyzetre emelve

$$(*) \quad r_i^2 \sin^2 \gamma_i = h^2(\varphi) + h^2\left(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c}\right) + 2 \cos \gamma_i h(\varphi) h\left(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c}\right) \quad (i = 1, 2)$$

adódik. E két egyenlet különbsége mutatja, hogy  $h(\varphi)h(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c})$  konstans. Ebből  $(*)$  szerint következik, hogy  $h^2(\varphi) + h^2(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c})$  is konstans. Összességében tehát  $h(\varphi)$  és  $h(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c})$  is konstans, vagyis  $\mathcal{K}$  egy kör. ■

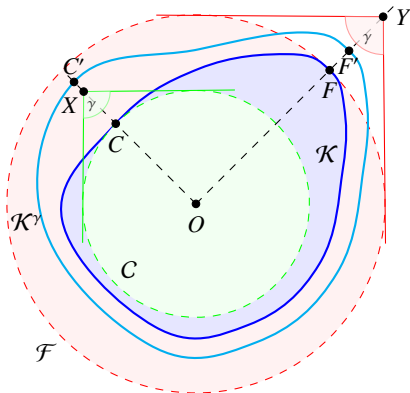
Figyeljük meg, hogy mivel konstansok, nyilván  $h(\varphi) \equiv h(\varphi + \frac{\pi}{n_1 n_2 / c})$ , vagyis mindkettő ugyanazon, mondjuk,  $\varrho$  konstans. Ebből  $(*)$  szerint

$$2\varrho^2 = \frac{r_i^2 \sin^2 \gamma_i}{1 + \cos \gamma_i} = 2r_i^2 \sin^2 \frac{\gamma_i}{2}$$

következik, vagyis  $\varrho = r_i \sin \frac{\gamma_i}{2}$  a  $\mathcal{K}$  kör sugara ( $i = 1, 2$ ). Nitsche tétele pontosítható:

**Tétel.** Akkor és csak akkor létezik az  $r_1$  és  $r_2$  sugarú koncentrikus  $r_1 C$  és  $r_2 C$  körökhöz olyan  $\mathcal{K}$  konvex alakzat, melyre  $\mathcal{K}^{\gamma_1} = r_1 C$  és  $\mathcal{K}^{\gamma_2} = r_2 C$ , ha  $r_1 \sin \frac{\gamma_1}{2} = r_2 \sin \frac{\gamma_2}{2}$ . Ekkor  $\mathcal{K} = r_1 \sin \frac{\gamma_1}{2} C$ .

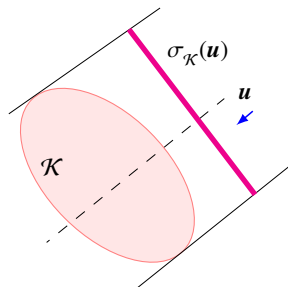
Ha egy konvex alakzat homotetikus<sup>6</sup> valamely izoptikusához, akkor kör.



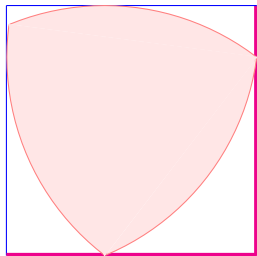
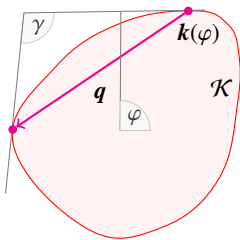
A következő (nehéz) tétel igazolja az állítást.

Minden konvex  $\mathcal{K}$  alakzatra  $t(\mathcal{K}^\gamma) \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq t(\mathcal{K})$ . Egyenlőség pontosan a körökre teljesül.

<sup>6</sup>Egyetlen pontból kicsinyített (nagyított).



A konvex, zárt, korlátos  $\mathcal{K}$  alakzat *irány szerinti szélességének* nevezzük az  $u$  iránnyal párhuzamos, a  $\mathcal{K}$  alakzatot érintő két félegyenes  $\sigma_{\mathcal{K}}(u)$  távolságát. A konvex, zárt, korlátos  $\mathcal{K}$  alakzat  *$\gamma$ -szélességének* nevezzük a  $\gamma$  szöget bezáró érintők  $k(\varphi)$  és  $k(\varphi + \pi - \gamma)$  érintési pontjaiból kifejezett  $\frac{|q(\varphi)| - (q(\varphi), q(\varphi), m)}{|q(\varphi)|^3}$  értéket, ahol  $q(\varphi) = k(\varphi) - k(\varphi + \pi - \gamma)$  és  $m$  a sík normálisa.



**Tétel. ([17, Theorem 2.1]).**

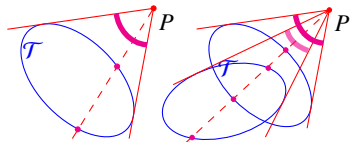
*Egy konvex tartomány akkor és csak akkor konstans szélességű, ha állandó 0-szélességű.*

Egy konvex tartomány  $\gamma$ -izoptikusának  $\sin \gamma$ -szoros kicsinyítettjét *normált  $\gamma$ -izoptikusnak* nevezzük. Ezen normált  $\gamma$ -izoptikusok  $\gamma \rightarrow 0$  szerinti határértékét normált 0-izoptikusnak nevezzük.

**Tétel.** *Egy konvex tartomány akkor és csak akkor konstans  $\gamma$ -szélességű, ha normált  $\gamma$ -izoptikusa kör.* GeoGebra

A bizonyításhoz ki kell számolni a  $\gamma$ -izoptikus görbületét. Lásd [1, (5.7)].

Véges sok konvex alakzat határainak összességét **multigörbének** nevezzük. Egy adott pontban egy **multigörbe látószögén**<sup>7</sup> az egyes alakzatok látószögeinek összegét értjük. Egy **multikör**, illetve **multiszakasz** olyan multigörbe, melynek minden eleme kör, illetve szakasz.



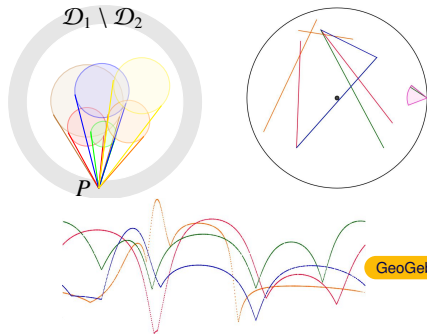
**Tétel. (Kurusa, 2015; [14]).**

*Ha a  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$  koncentrikus körlapok közti  $\mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_1$  gyűrű része a  $\mathcal{G}, \mathcal{X} \subset \mathcal{D}_1$  multigörbék equioptikusának, akkor  $\mathcal{G} \equiv \mathcal{X}$ <sup>8</sup>.*

Ha tehát a gyűrű minden koncentrikus köre a  $\mathcal{G}$  izoptikusa, akkor  $\mathcal{G}$  koncentrikus multikör.

### Kérdések.

- **(Nitsche-tétel?)** Ha egy multigörbének van véges sok egymással koncentrikus kör izoptikusa, akkor koncentrikus körökből áll? És ha multikör?
- **(Apollóniosz-görbe?)** Két multiszakasznak milyen az ekvoptikusa?



GeoGebra

<sup>7</sup> A multigörbe és annak takarási száma általánosabb fogalom, de most elegendő ez a kissé pontatlan értelmezés.

<sup>8</sup> Próbáljuk ezt igazolni, ha mindkét multigörbe egyetlen elemből áll! [4]

A **látókúp** alakja (nem a helyzete!) és a **látópont** körüli egységgömbbel vett metszetének mértéke a síkon meghatározza egymást, de a térben ez már nem teljesül.

### **Tétel. (Matsuura [16]).**

*Ha a térben egy konvex test minden pontból gömbnek látszik<sup>9</sup>, akkor az gömb.*

### **Tétel. (M. G.-Jiménez, E. G.-Arreola & J. J.-Castro, 2015; [15] (Térkitöltés!)).**

*Konvex test akkor és csak akkor homotetikus valamely izoptikusával, ha gömb.*

### **Nitsche tétel általánosítása. (Kurusa & Ódor, 2015; [13] (Térfogatbecslés!)).**

*Ha egy konvex testnek egy gömbbel az  $\mathbb{R}^n$ -ben ( $n \neq 3$ ) két közös izoptikusa van, akkor gömb.*

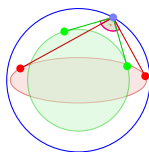
### **Alexandrov tétele. ([2, Theorem 3.3.6] (Középpontos szimmetria szükséges!)).**

*Az  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) térben a középpontosan szimmetrikus konvex testeket meghatározza párhuzamos vetületének irány szerinti területfüggvénye.*

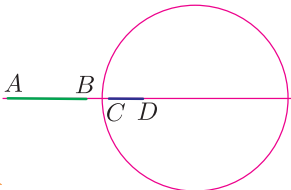
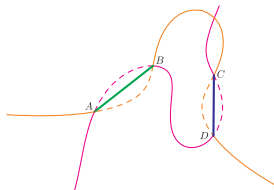
- Kérdések.**
- Van a térben olyan nem gömb konvex test, melynek gömb az izoptikusa?
  - Melyik térbeli  $\mathcal{K}$  testre lesz  $V(\mathcal{K}^\gamma)/V(\mathcal{K})$  minimális?

<sup>9</sup>Ez azt jelenti, hogy a látókúp metszete a látópont körüli bármely gömbfelülettel egy kör.

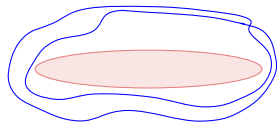
A  $\mathcal{K}$  és  $\mathcal{L}$  konvex korlátos alakzatok **ekviptikusának** nevezzük azon  $P$  pontok  $\{P : M_{\mathcal{K}}(P) = M_{\mathcal{L}}(P)\}$  halmazát, melyeknél az alakzatok  $P$  pontbeli látószögmértékei egyenlőek.



A kör az ellipszis és egy megfelelő sugarú kör ekviptikusának része, de Green tétele

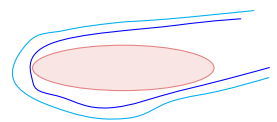


szerint sok-sok konvex alakzat ekviptikusja. **GeoGebra** Két szakasz ekviptikusa egy kubikus algebrai görbe [9, 10]. Ez az **Apollóniosz-görbe** (Lásd Apollóniosz-tétel). **GeoGebra**



**Tétel. (Kurusa, 1993; [5]).**

*Önátmetező görbe nem lehet általa körülfogott különböző konvex alakzatok ekviptikusának része.*



**Tétel. (Kurusa, 1993,2012; [6, 7]).**

*Két konvex tartomány egymást csak az ideális egyenesen metsző határoló görbéinek uniója nem lehet általuk körülfogott különböző konvex alakzatok ekviptikusának része.*

**Kérdés.** Tartalmazhat két konvex alakzat ekviptikusa két koncentrikus kört?

További érdekes problémák és eredmények a **Geometriai Tomográfia** területén a [2] könyvben.



***Köszönöm a figyelmet!***

# Hivatkozások szerzők szerint rendezve I

- [1] W. Cieślak, A. Miernowski and W. Mozgawa  
Isoptics of a closed strictly convex curve,  
*Global differential geometry and global analysis*, Proc.  
Conf. Berlin/Germany 1990, Lect. Notes Math. **1481**,  
1991, 28-?35.
- [2] R. J. Gardner  
*Geometric tomography*, Encyclopedia of  
Math. and its Appl. **58**, Cambridge University  
Press, Cambridge, 2006.
- [3] J. W. Green  
Sets subtending a constant angle on a circle,  
*Duke Math. J.*, **17** (1950), 263–267.
- [4] J. Kincses and Á. Kurusa  
Can you recognize the shape of a figure by  
its shadows?, *Beitr. Alg. Geom.*, **36** (1995), 25–  
35.
- [5] Á. Kurusa  
You can recognize the shape of a figure by  
its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 113–  
125; DOI: [10.1007/BF00155723](https://doi.org/10.1007/BF00155723).
- [6] Á. Kurusa  
The shadow picture problem for noninter-  
secting curves, *Geom. Dedicata*, **59** (1996),  
103–112; DOI: [10.1007/BF00181528](https://doi.org/10.1007/BF00181528).
- [7] Á. Kurusa  
The shadow picture problem for parallel  
straight lines, *J. Geom.*, **103:3** (2012), 515–518;  
DOI: [10.1007/s00022-012-0137-z](https://doi.org/10.1007/s00022-012-0137-z).
- [8] Á. Kurusa  
Visual distinguishability of polygons, *Beitr.*  
*Alg. Geom.*, **54** (2013), 659–667; DOI:  
[10.1007/s13366-012-0121-7](https://doi.org/10.1007/s13366-012-0121-7).

# Hivatkozások szerzők szerint rendezve II

- [9] Á. Kurusa  
Szakaszok ekvoptikusai: Apollóniosz tételének általánosítása, *Polygon*, **21:2** (2013), 43–57.
- [10] Á. Kurusa  
Visual distinguishability of segments, *Int. Electron. J. Geom.*, **6:1** (2013), 56–67; [PDF](#).
- [11] Á. Kurusa  
Kúpszeletek izoptikusai, *Polygon*, **19:2** (2011), 27–46.
- [12] Á. Kurusa  
Is a convex plane body determined by an isoptic?, *Beitr. Alg. Geom.*, **53** (2012), 281–294; DOI: [10.1007/s13366-011-0074-2](https://doi.org/10.1007/s13366-011-0074-2).
- [13] Á. Kurusa and T. Ódor  
Isoptic characterization of spheres, *J. Geom.*, **106** (2015), 63–73; DOI: [10.1007/s00022-014-0232-4](https://doi.org/10.1007/s00022-014-0232-4).
- [14] Á. Kurusa  
The masking function of multicurves, *kézirat*, (2015), benyújtva.
- [15] M. García-Jiménez, E. González-Arreola & J. Jerónimo-Castro  
A characterization of the Euclidean sphere with respect to an isoptic surface, *kézirat*, (2015), benyújtva.
- [16] S. Matsuura  
A problem in solid geometry, *J. Math. Osaka City Univ.*, **A 12** (1961), 89–95.
- [17] W. Mozgawa  
Mellish theorem for generalized constant width curves, *Aequat. Math.*, **89** (2015), 1095–1105.
- [18] J. C. C. Nitsche  
Isoptic characterization of a circle, (Proof of a conjecture of M.S. Klamkin), *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 45–47.
- [19] Wikipedia  
*Kínai maradéktétel*.

## Az előadás kivonata

Egy szakaszt  $\pi/2$  szög alatt látó pontok halmaza Thálész tétele szerint a szakaszt átmérőként tartalmazó kör. Ennek közvetlen általánosítása a kerületi szögek tétele, mely szerint egy szakaszt adott szög alatt látó pontok halmaza a szakasz egyenesére szimmetrikusan elhelyezkedő, a szakasz végpontjait összekötő két körív (a  $\pi/2$  szög esetén ezek egy kör két felét adják).

Mi történik, ha a szakaszt másra cseréljük?

- Milyen egy konvex sokszöget adott szög alatt látó pontok halmaza?
- Milyen egy ellipszist konstans szög alatt látó pontok halmaza?

Mi a helyzet általában egy konvex tartományt konstans szög alatt látó pontokkal? Az ilyen pontok halmazát *izoptikus görbének*, vagy egyszerűen *izoptikusnak* hívjuk. Ha azt is tudjuk, hogy az izoptikus milyen  $\gamma$  szöghöz tartozik valamely konvex  $\mathcal{K}$  tartományra, akkor a  $\mathcal{K}$  tartomány  $\gamma$ -izoptikusáról beszélünk, melyet  $\mathcal{K}^\gamma$  jelöl. (Tehát egy  $S$  szakasz esetén  $S^{\pi/2}$  egy kör. A  $\pi/2$  szöghöz tartozó izoptikusokat *ortoptikusoknak* is nevezzük.)

Thálész tétele azt mutatja, hogy különböző szakaszoknak lehet ugyanaz az ortoptikusa, ugyanakkor ha  $\gamma \neq \pi/2$ , akkor bármely szakasz  $\gamma$ -izoptikusa különbözik bármely más szakasz  $\gamma$ -izoptikusától, habár minden szakasz  $\gamma$ -izoptikusa hasonló a többi szakasz  $\gamma$ -izoptikusához. Felvetődik pár kérdés:

- Meghatároz egy konvex halmazt valamely  $\gamma$ -izoptikusa? És ha az izoptikus kör?
- Egy konvex halmazt hány izoptikusa határoz meg?
- Milyen konvex halmaz hasonló az izoptikusával? Van a  $\chi\mathcal{K}^\gamma = \mathcal{K}$  egyenletnek az  $(\gamma, \chi) = (\pi, 1)$  megoldástól eltérő megoldása?

Az előadás ezekre a kérdésekre igyekszik választ adni, miközben rámutat az izoptikusokkal kapcsolatos kurrens kutatási eredményekre is.

# Az előadás felépítése

## 1 Konvex alakzatok izoptikusai

- Szakasz izoptikusai
- Konvex sokszög izoptikusai
- Ellipszis izoptikusai

## 2 Izoptikus-egyenletek és egyenlőtlenségek

- $\mathcal{K}^\gamma = \mathcal{L}^\gamma$
- $\mathcal{K}^{\gamma_1} = C = \chi \mathcal{K}^{\gamma_2}$
- $\chi \mathcal{K}^\gamma = \mathcal{K}$  és  $t(\mathcal{K}^\gamma)/t(\mathcal{K})$  becslése

## 3 Általánosítások

- $\gamma$ -szélesség
- Multigörbék
- Magasabb dimenziók
- Ekvioptikusok