

# GÖMBÖC: Az igazi Kelj Fel Jancsi

Kurusa Árpád

Szegedi Tudományegyetem  
TTIK, Bolyai Intézet, Geometriai Tanszék  
<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

Szeged, 2012. szeptember 28.



*Kutatók Éjszakája*

# Amiről szó lesz

- 1 **Kelj Fel Jancsi megismerése**
  - Jancsi tulajdonságai és trükkje
  - Hüp-hüp-hüp, Jancsi-trükk!
- 2 **Mono-statikus homogén konvex testek**
  - Mono- és mono-mono-statikusság
  - Síkban nincs mono-statikusság!
  - Térben van mono-mono-statikusság is!
  - Természetben mindkettő előfordul

# Kelj Fel Jancsi tulajdonságai



A Kelj Fel Jancsinak (innenről egyszerűen *Jancsinak*) vízszintes síkon (például asztal lapon)

- *egyetlen stabil egyensúlyi helyzete* van (ahogy a képen),
- *egyetlen instabil egyensúlyi helyzete* van (fordítva, mint a képen),

A *Jancsi* éppen ezek miatt érdekes játék, hiszen egyensúlyi helyzeteiben bármilyen kis mozgási energiát kapva vagy egyensúlytalan helyzeteiben magára hagyva a stabil egyensúlyi helyzetébe mozog, vagyis *mindig felkel*.

A *Jancsi* trükkje az, hogy a stabil helyzetbeli legalsó pontja (a *kék rész*)

- egy *gömbsapka*,
- ami jóval *súlyosabb* mint a többi része.

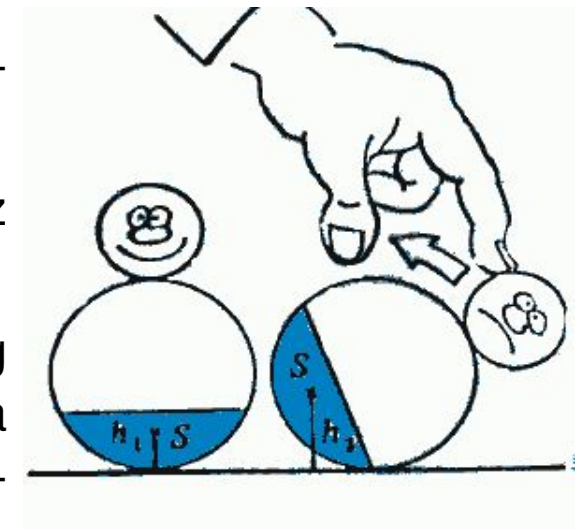
# Amitől a Jancsi felkel

Nyugalomban lévő test *egyensúlyban* van, ha a *tömegközéppontja* az *alátámasztási pontján* átmenő függőleges vonalra esik. Ez a helyzete

- *stabil*, ha bármely irányú csekély kimozdítás hatására *emelkedik a tömegközéppont*, és
- *instabil*, ha valamely irányú kis kimozdítás hatására *nem emelkedik a tömegközéppont*, hiszen kimozdítása miatt *rendre nő* illetve *csökken* a helyzeti energiája.

A *Jancsi* alsó részének súlya jóval nagyobb minden többi része összesített súlyánál, ezért a *tömegközéppontja* a *kék gömbsapka* szimmetria-tengelyén, a sapka gömbölyű részéhez közel esik.

- Egyensúlyi helyzeteinek *alátámasztási pontjai* ezért csak felületeként a szimmetria-tengellyel vett metszetei lehetnek.
- Az a *stabil* egyensúlyi helyzet, amelynél a tömegközéppont az alátámasztási ponthoz közelebb van, míg a másik *instabil*.
- Általában a *Jancsi* helyzeti és mozgási energiája mindaddig egymásba alakulgat, ameddig a *Jancsi* nem kerül nyugalomba a stabil egyensúlyi helyzetében. A *Jancsi* mechanikai energiáját a gördülési súrlódás fogyasztja, így ez be fog következni.



(Elvben a Jancsi kaphatna pont akkora mozgási energiát, amely az instabil helyzetébe lökné ...)

# Jancsi trükkjét hasznosító eszközök



*Mobil telefon*



*Fogkefe*



*Kötéltánc*



*Kínai szobrászat*

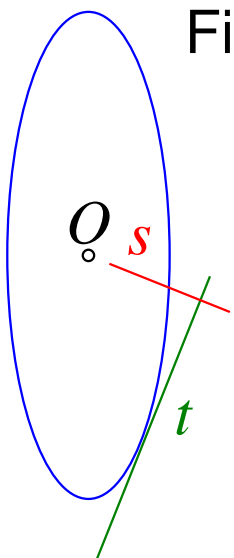


*Játék*



*Vitorlázás*

# Észrevételek és egy tétel



Figyeljük meg, hogy

- ha egy tárgy egy vízszintes lapon van, akkor a lap a tárgy egy érintő síkjában van,
- egy tárgy tömegközéppontja mindig a konvex burkának belsejében van, ezért a tömegközéppontjának a konvex burok minden érintőjétől mért távolsága pozitív,
- a tömegközéppont  $s$  távolsága egy adott irányban lévő és arra merőleges érintőtől az irány folytonos függvénye, és
- mivel az irányok halmaza *kompakt*, és kompakt halmazon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit, az  $s$  függvény felveszi legkisebb és legnagyobb értékét.

**Tétel.** *Ha egy tárgy konvex burka nem gömb, akkor van legalább egy stabil és egy instabil egyensúlyi helyzete.*

**Bizonyítás.** Ha egy tárgy  $s$  függvénye nem konstans, akkor az  $s$  függvénynek van minimum- és maximum-helye. Ha ezeket az irányokat a tárgyhoz rögzítjük és úgy tesszük a tárgyat egy vízszintes síkra, hogy az előbbi vagy utóbbi merőleges legyen a síkra, akkor az előbbi esetben stabil, az utóbbi esetben pedig instabil helyzetbe kerül a tárgy. Elég tehát belátni, hogy az  $s$  függvény akkor és csak akkor konstans, ha a tárgy konvex burka gömb, tömegközéppontja pedig annak középpontja. Indirekt eljárással ez könnyen *igazolható*. ■

# A fogalom és a probléma

**Definíció.** Egy tárgyat *mono-statikusnak* hívunk, ha vízszintes síkon egyetlen stabil egyensúlyi helyzete van. *Mono-mono-statikusnak* nevezzük, instabil egyensúlyi helyzete is csak egy van.

A *Jancsi* tehát egy mono-mono-statikus tárgy, mely igazolja, hogy a tételünkben szereplő becslésben egyenlőség is lehetséges. *Jancsi* konstrukciója és tételünk bizonyítása alapján további mono-mono-statikus tárgyak készíthetők úgy, hogy egy szigorúan konvex testben a tömeget úgy osztjuk el, hogy a tömegközéppontnak az érintőktől vett távolsága pontosan egy-egy érintőnél legyen minimális, illetve maximális.

**Kérdés.** Van olyan egyenletes súlyeloszlású (*homogén*) konvex tárgy, amelynek csak egy stabil és csak egy instabil egyensúlyi helyzete van?

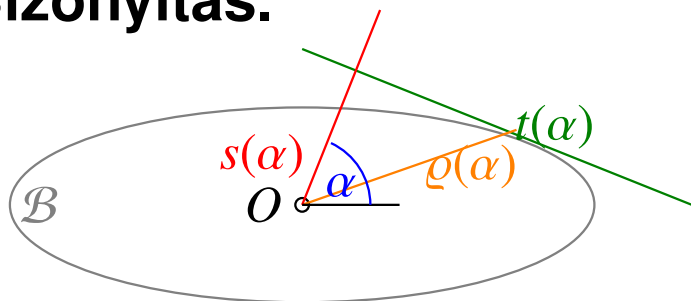
*Jancsi* trükkje erre nem válaszol, de a „szokásos” tárgyak közt sem találunk választ, hiszen a téglának 6 stabil és 8 instabil, a hengernek 2 stabil és  $\infty$  instabil, a kúpoknak legalább 2 instabil egyensúlyi helyzete van, stb. stb. stb..

# Síkbeli konvex tartományok egyensúlyi helyzetei I

**Tétel. (Domokos–Papadopoulos–Ruina, 1994).**

*Minden körlaptól különböző konvex síktartománynak legalább két stabil egyensúlyi helyzete van.*

**Bizonyítás.**

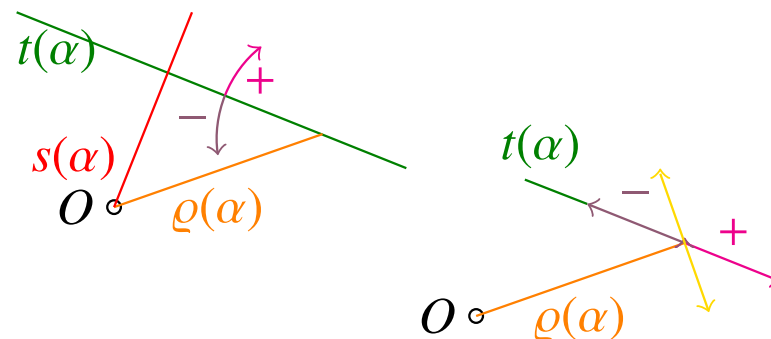


Tekintsük az  $O$  tömegközéppontnak a  $\mathcal{B}$  tartomány érintőtől mért távolságát, mint a  $t(\alpha)$  érintő  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  normálisának  $\alpha \mapsto s(\alpha)$  függvényét. Legyen továbbá  $\varrho(\alpha)$  a normális talppontjához a  $t(\alpha)$  érintőn legközelebbi érintési pont távolsága az  $O$  ponttól.

Ha  $\varrho(\alpha)$  a  $\varrho$  (lokális) szélsőértéke, akkor a  $t(\alpha)$  érintő merőleges az  $O$  pontból az érintési pontba húzott egyenesre, tehát  $s(\alpha) = \varrho(\alpha)$ .

Ha  $s(\alpha)$  az  $s$  (lokális) szélsőértéke, akkor a  $t(\alpha)$  érintő a normális talppontjában érinti a  $\mathcal{B}$  tartományt, tehát  $\varrho(\alpha) = s(\alpha)$ .

Ebből következik, hogy ha  $\alpha$  az  $s$ -nek akkor és csak akkor szélsőérték-helye, ha  $\varrho$ -nak is szélsőérték-helye.



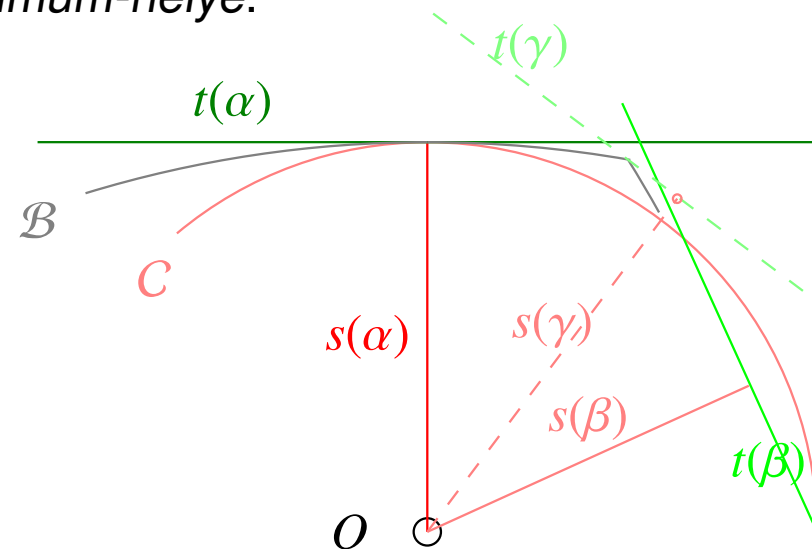
# Síkbeli konvex tartományok egyensúlyi helyzetei II

Sőt, mivel  $s(\alpha) \leq \varrho(\alpha)$  minden  $\alpha$  esetén érvényes, azt kaptuk, hogy

- ha  $\alpha$  a  $\varrho$  maximum-helye, akkor az  $s$ -nek is maximum-helye,
- ha  $\alpha$  az  $s$  minimum-helye, akkor a  $\varrho$ -nak is minimum-helye.

Lehet egy  $\alpha$  az  $s$ -nek maximum-, a  $\varrho$ -nak minimum-helye? Tételezzük fel, hogy ez a helyzet.

- Mivel  $\varrho(\alpha)$  minimális és  $\mathcal{B}$  konvex, a  $t(\alpha)$  érintési pontjának közelében  $\mathcal{B}$  határa a  $t(\alpha)$  és az  $O$  középpontú,  $\varrho(\alpha)$  sugarú  $C$  kör közé esik.
- Mivel  $s(\alpha)$  maximális, az  $\alpha$ -hoz elég közeli minden  $\beta$  esetén a  $t(\beta)$  érintő metszi a  $C$ -t.



Ugyanakkor, ha  $\gamma \in (\beta, \alpha)$ , akkor a  $t(\gamma)$  érintő csak a  $t(\beta)$ ,  $t(\alpha)$  érintők és a  $C$  kör közötti pontjaiban érintheti a  $\mathcal{B}$  tartományt, ami lehetetlenné teszi, hogy  $t(\gamma)$  messe a  $C$  kört. Ez az ellentmondás igazolja, hogy ha  $\alpha$  az  $s$ -nek maximum-helye, akkor a  $\varrho$ -nak is maximum-helye. Korábbi következtetésünk alapján pedig kimondhatjuk, hogy

*a  $\varrho$  ugyanott és ugyanolyan szélsőértékekkel rendelkezik, mint  $s$ .*

# Síkbeli konvex tartományok egyensúlyi helyzetei III

Tegyük fel innentől, hogy

*az  $s$  függvénynek a  $[-\pi, \pi)$  intervallumban egyetlen minimum-helye  $\alpha_{\min}$ .*

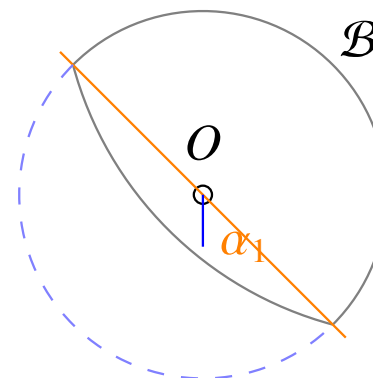
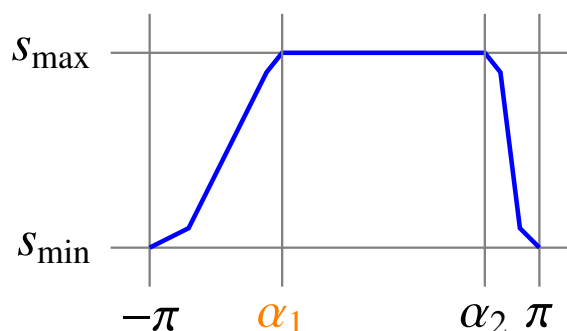
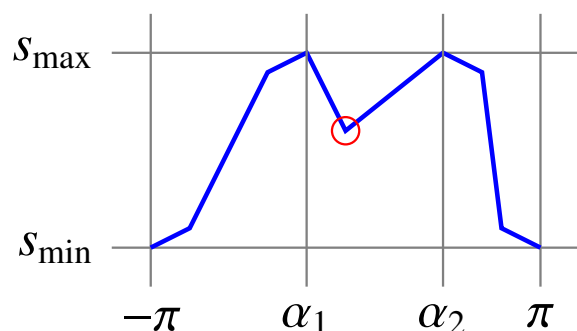
valamint tegyük fel az  $x$ -tengely választása miatt éppen  $\alpha_{\min} = -\pi$ .

Mivel az  $s$  folytonosan függ az  $\alpha$  szögtől és  $2\pi$ -periodikus,  $s$  rendelkezik maximum-hellyel is a  $[-\pi, \pi)$  intervallumban. Legyen  $s_{\max}$  és  $s_{\min}$  az  $s$  legnagyobb és legkisebb értéke.

Tegyük fel, hogy  $s$  a  $[-\pi, \pi)$  intervallum  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  pontjaiban is felveszi az  $s_{\max}$  értéket.

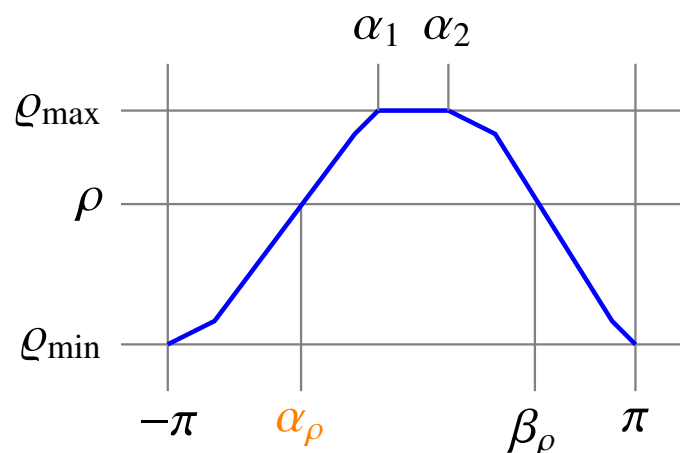
Minthogy az  $s$ -nek csak egy minimum-helye van, az  $[\alpha_1, \alpha_2]$  intervallumon nem lehet újra minimum-hely, ezért  $s$  az  $[\alpha_1, \alpha_2]$  intervallumon konstans  $s_{\max}$  értékű.

Tegyük fel, hogy  $\pi \leq \alpha_2 - \alpha_1$ . Ekkor az  $x$ -tengellyel  $\alpha_1$  szöget bezáró  $\ell$  egyenes felső félsíkjának metszete a  $\mathcal{B}$  tartománnyal egy  $\varrho_{\max} = s_{\max}$  sugarú félkörlap, míg az alsó félsíkjának  $\mathcal{B}$ -vel vett metszete e félkörlap másik fele által lefedett, mert  $\varrho$  azon a részen sem lehet nagyobb, mint  $\varrho_{\max}$ , de a  $\varrho(-\pi) = \varrho(\alpha_{\min}) = s_{\min} = \varrho_{\min}$  érték annál biztosan kisebb.



# Síkbeli konvex tartományok egyensúlyi helyzetei IV

Tehát  $\alpha_2 - \alpha_1 < \pi$ , és így az  $s$  függvény a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon azzal írható le, hogy a  $[-\pi, \alpha_1]$  intervallumon szigorúan monoton növekedő, az  $[\alpha_1, \alpha_2]$  (esetleg egyetlen pontot tartalmazó) intervallumon konstans  $s_{\max}$  értékű, az  $[\alpha_2, \pi]$  intervallumon pedig szigorúan monoton fogyó, valamint  $s(\pm\pi) = s_{\min}$ .

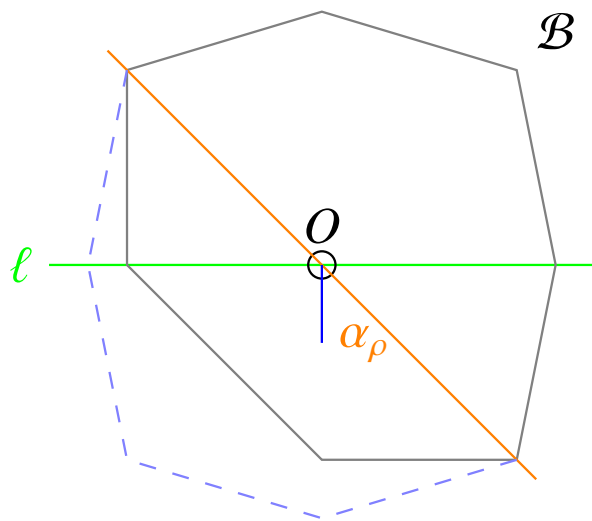


Minthogy  $\varrho$  ugyanott és ugyanolyan szélsőértékekkel rendelkezik, mint  $s$ , a  $\varrho$  függvény ugyanazokkal a jellemzőkkel rendelkezik, mint  $s$ , amiért  $\varrho$  grafikonja az  $\alpha$ -tengellyel párhuzamos minden egyenest pontosan két pontban metsz, melynek a  $\varrho$ -tengellyel vett  $\rho$  metszete az  $(\varrho_{\min}, \varrho_{\max})$  intervallumba esik. Jelölje ezen metszetek abszcisszáját  $\alpha_\rho < \beta_\rho$ .

Tekintsük azt az  $f: [\varrho_{\min}, \varrho_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, melyre  $f(\rho) = \beta_\rho - \alpha_\rho$ . Világos, hogy  $f$  folytonos,  $f(\varrho_{\min}) = 2\pi$  és  $f(\varrho_{\max}) = \alpha_2 - \alpha_1 < \pi$ . Folytonos függvény Darboux-tulajdonságú, ezért létezik olyan  $\rho \in (\varrho_{\min}, \varrho_{\max})$ , melyre  $f(\rho) = \pi$ .

Ez azt jelenti, hogy az  $x$ -tengellyel  $\alpha_\rho$  szöget bezáró  $\ell_0$  egyenes olyan, hogy minden az  $O$  tömegközépponton átmenő  $\ell$  egyenes a  $\mathcal{B}$  tartományt az  $\ell_0$  felső félsíkjában hosszabb szakaszban metszi, mint az  $\ell_0$  alsó félsíkjában.

# Síkbeli konvex tartományok egyensúlyi helyzetei V



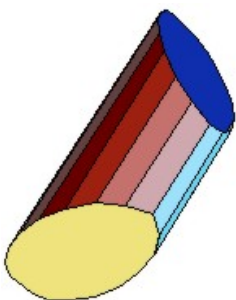
Eszerint a  $\mathcal{B}$  tartomány és az  $\ell_0$  felső félsíkja metszétének az  $O$  tömegközéppontra vett középpontos tükörképe lefedi a  $\mathcal{B}$  tartomány és az  $\ell_0$  alsó félsíkja metszetét, mégpedig úgy, hogy biztosan vannak a tükörképnek olyan pontjai, melyek nem esnek  $\mathcal{B}$ -be, mert

$$\varrho(-\pi) = \varrho(\alpha_{\min}) = s_{\min} = \varrho_{\min} < \varrho_{\max}.$$

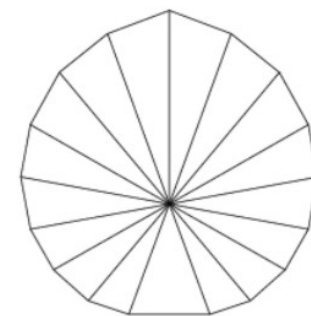
Ez ellentmond annak, hogy  $O$  a tömegközéppont, és az tétel igazolást nyert. ■

# Mono-statikus konvex poliéderek I

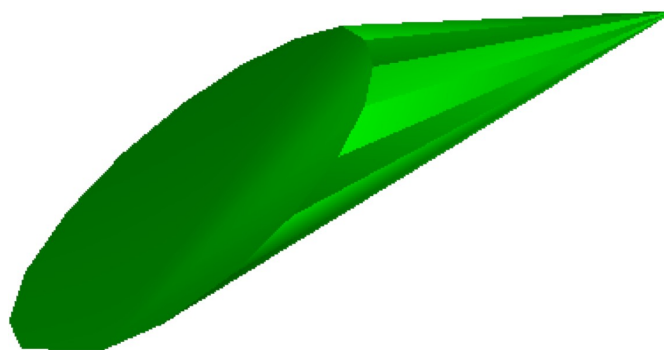
Habár semelyik tetraéder sem mono-statikus (Dawson, 1985), azért léteznek mono-statikus konvex poliéderek.



Először 1969-ben mutatott *Conway és Guy* egy mono-statikus konvex poliédert. Ez egy *19 lapú* levágott végű henger, melynek keresztmetszete kínai legyezőre emlékeztet.



Sokáig az volt az elfogadott vélekedés, hogy nincsen olyan mono-statikus konvex poliéder, amelynek 19-nél kevesebb lapja lenne, de *Bezdek András* 2011-ben előállt egy mindössze *18 lap* által határolt mono-statikus gúlával.



Sokan keresnek kevesebb lapú mono-statikus konvex poliédert számítógép segítségével is, de kiderült, hogy az ismert módszerek nem vezetnek eredményre (Minich, 2012).

# Mono-mono statikus konvex test: a Gömböc I



Homogén mono-mono statikus testet nem nehéz készíteni, amit a baloldalon látható *Barba-papa* is mutat. Konvex mono-mono-statikus test készítése már jóval bonyolultabb. Az első mono-mono-statikus konvex testet *Arnold* biztatására *Várkonyi* Péter és *Domokos* Gábor fedezte fel 2006-ban. Ez a *Gömböc*!

Az egyelőre nem ismert, hogy létezik-e mono-mono-statikus konvex poliéder.

Várkonyi és Domokos azt sejtik, hogy van ilyen, és sok lapja van, mert azt vállalták, hogy *10000/k dollárt* fizetnek a mono-mono-statikus konvex poliéder első felfedezőjének, ahol  $k$  a reménybeli mono-mono-statikus konvex poliéder lapjainak száma.



**A Gömböc**

# Mono-mono-statikusság a természetben



*Ha felborul is, ez a teknős könnyen talpra áll*



*Lapos teknővel könnyebb ásni, de sokkal nehezebb talpra állni...*



**KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!**

# Nem definiált fogalmak listája I

- **kompakt halmaz:** korlátos zárt halmaz;
- **konvex halmaz:** bármely két pontjának szakaszát is tartalmazza a halmaz;
- **konvex görbe:** egy konvex ponthalmaz határoló görbéjének összefüggő része;
- **konvex burok:** a ponthalmazt tartalmazó összes konvex halmaz metszete;
- **gömbsapka:** bármely síkkal kettévágott gömb mindkét darabja;
- **tömegközéppont:** az a pont, melyből a test pontjaiba mutató vektoroknak a végpontjukban lévő tömeggel súlyozott összege nulla;
- **folytonosság:** egy leképezésnek az a tulajdonsága, hogy bármely  $P$  ponthoz tartó bármely pontsorozat pontjainak képei a  $P$  képéhez tartanak;
- **símaság:** egy tartomány határa szakaszonként síma, ha véges kivételtől eltekintve minden pontjában egyetlen érintője van és az folytonosan függ a határponttól;
- **normális** (merőleges): olyan egységnyi vektor, amely merőleges a birtokosára;
- **homogén:** egyforma, azonos; a súlyeloszlás homogén, vagyis egyenletes egy tárgyban, ha a tárgy bármely darabjának súlya arányos e darab térfogatával;
- **periodikus:** egy valós  $f$  függvény periodikus, ha van olyan pozitív  $p$  szám, melyre  $f(x + p) = f(x)$  minden  $x$  esetében;
- **Darboux-tulajdonság:** egy valós  $f$  függvény Darboux-tulajdonságú, ha minden  $x < y$  és  $f_0 \in [f(x), f(y)]$  esetén van olyan  $z \in [x, y]$ , melyre  $f(z) = f_0$ ;

# Nem bizonyított segédtételek I

**Tétel.** *Ha a konvex  $\mathcal{B}$  test egy  $O$  pontja konstans  $s$  távolságra van a test minden érintőjétől, akkor  $\mathcal{B}$  az  $O$  pont körüli  $s$  sugarú gömb.*

**Bizonyítás.** Legyenek a  $\mathcal{B}$  test  $\partial\mathcal{B}$  határának  $\hat{M}$  és  $\check{M}$  olyan pontjai, melyekre  $d(G, \hat{M}) = \max_{P \in \partial\mathcal{B}} d(G, P)$  és  $d(G, \check{M}) = \min_{P \in \partial\mathcal{B}} d(G, P)$  (ilyenek léteznek, mert konvex test határa kompakt). Mivel az  $\hat{M}$  és  $\check{M}$  pontok szélsőérték helyek, a  $\mathcal{B}$  testnek az  $\hat{M}$  és  $\check{M}$  pontokon átmenő érintői rendre merőlegesek a  $G\hat{M}$  és  $G\check{M}$  egyenesekre, amiért  $s = d(O, \check{M}) \leq d(O, \hat{M}) = s$ . Eszerint  $d(G, P) = s$  minden  $P \in \partial\mathcal{B}$  pontra. ■

**Tétel.** *Egy homogén tárgy tömegközéppontján átmenő minden sík felezi a tárgy térfogatát.*

**Bizonyítás.** Mivel súlyozott közepek súlyaik szerinti súlyozott közepe éppen a teljes rendszer súlyozott közepe, a testnek a sík különböző oldalára eső részei tömegközéppontjába a test tömegközéppontjából mutató vektorok összege nulla, vagyis ezen vektorok egymás ellentettjei, ami azt jelenti, hogy súlyaik egyenlők. ■

# Referenciák szerző szerinti sorban I

-  **A. Bezdek**  
On stability of polyhedra, *Oberwolfach Report*, **44** (2011), 2490–2491.
-  **J. H. Conway and R. K. Guy**  
Problem 66-12, Stability of Polyhedra, *SIAM Review*, **11:1** (1969), 78–82.
-  **G. Domokos, J. Papadopoulos and A. Ruina**  
Static equilibria of planar, rigid bodies: is there anything new?, *J. Elasticity*, **36** (1994), 59–66.
-  **G. Domokos and P. L. Várkonyi**  
Geometry and self-righting of turtles, *Proc. R. Soc. B*, **275** (2008), 11–17.
-  **R. J. MacG. Dawson**  
Monostatic simplexes, *Amer. Math. Monthly*, **92** (1985), 541–546.

## Referenciák szerző szerinti sorban II

-  R. J. MacG. Dawson, W. Finbow and P. Mak  
Monostatic simplexes II., *Geom. Dedicata*, **70** (1998), 209–219.
-  R. J. MacG. Dawson and W. Finbow  
Monostatic simplexes III., *Geom. Dedicata*, **84** (2001), 101–113.
-  W. Finbow  
*On stability of polytopes*, Master Thesis, Dalhausie University, Halifax, 1998.
-  gomboc.eu  
*Matematikai háttér (Mathematical background)*, gomboc.eu,  
<http://www.gomboc.eu/hu/site.php?inc=0&menuId=8>.
-  A. Heppes  
A double tipping tetrahedron, *SIAM Review*, **9:3** (1967), 599–600.

## Referenciák szerző szerinti sorban III



C. Minich

Search for small monostatic polyhedra, *WSCG 2012* (2012), D97.



P. L. Várkonyi and G. Domokos

Static Equilibria of Rigid Bodies: Dice, Pebbles, and the Poincaré-Hopf Theorem, *J. Nonlinear Sci.*, **16** (2006), 255–281.



B. Wade

*Phenomenal Three-Dimensional Objects*, Master Thesis, Auburn University, Auburn, 2011.

## További irodalom szerző szerinti sorban I



J. Bryant and C. Sangwin

*How round is your circle?*,

<http://web.mat.bham.ac.uk/C.J.Sangwin/howroundcom/front.html>.



M. Freiberger

The story of the Gömböc, *Plus*, **52** (2009).



J. Rehmeyer

Can't Knock It Down, *ScienceNews*, Web edition id=8383.



P. Ball

How tortoises turn right-side up, *Nature* (2007),

doi: 10.1038/news.2007.170.



R. J. MacG. Dawson

*Monostatic polytopes*, <http://cs.smu.ca/~dawson/images1.html>.