

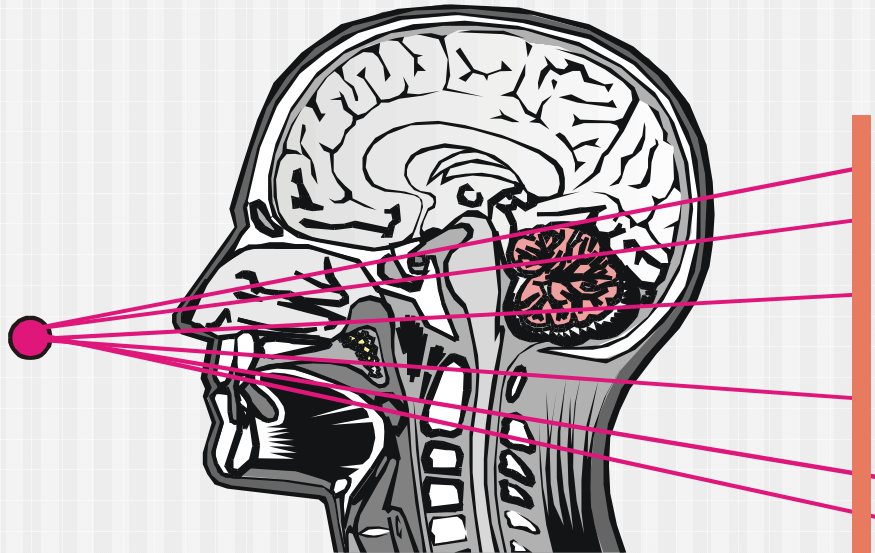
Egyetemi Tavasz a Bolyai Intézetben

A tomográfia matematikája

Alakfelismerés
röntgenképekből

Kurusa Árpád, Szeged, 2005. Április 16.

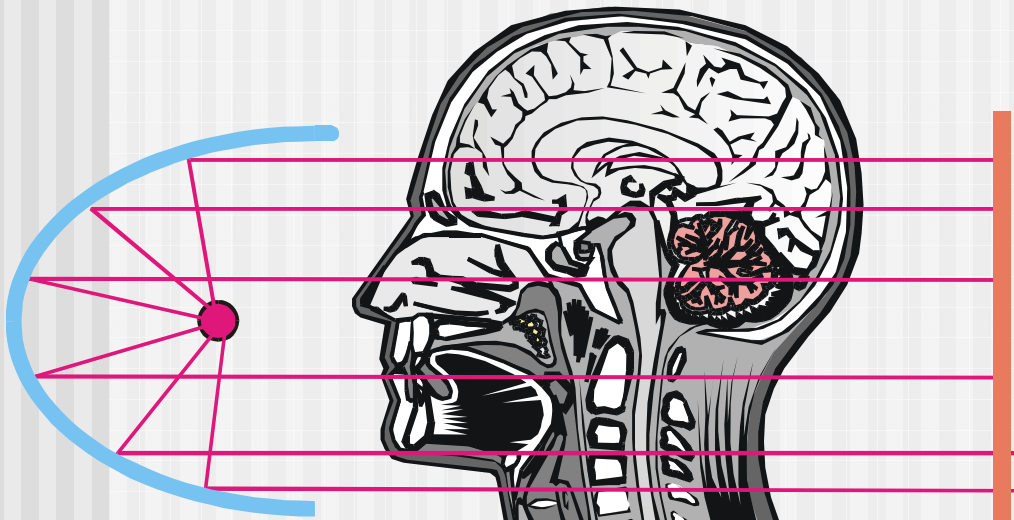
A röntgen készülék elve



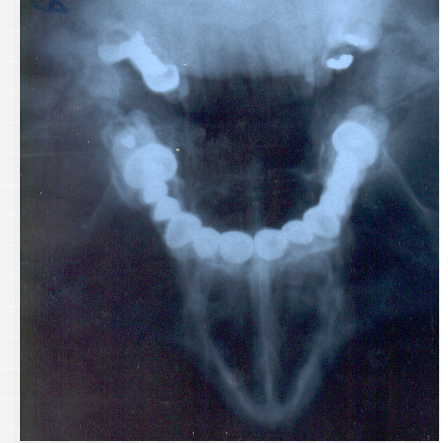
- A röntgen sugárzás áthalad az anyagokon és a filmen nyomot hagy

- A film annál sötétebb, minél intenzívebb sugárzás éri

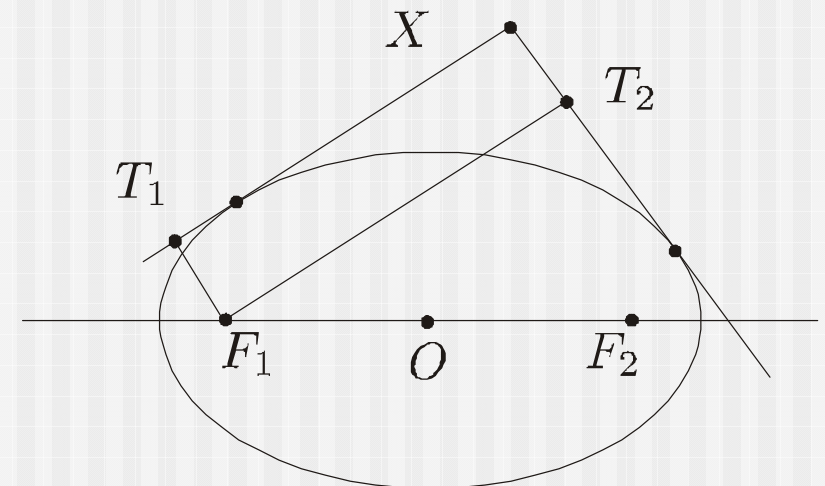
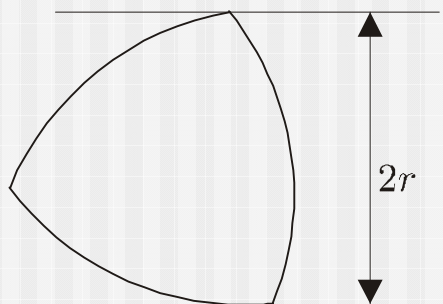
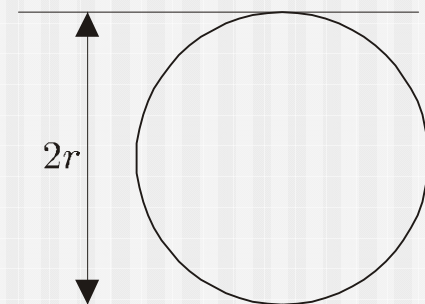
- A röntgen sugarak egy parabola tükörrel párhuzamossá tehetők



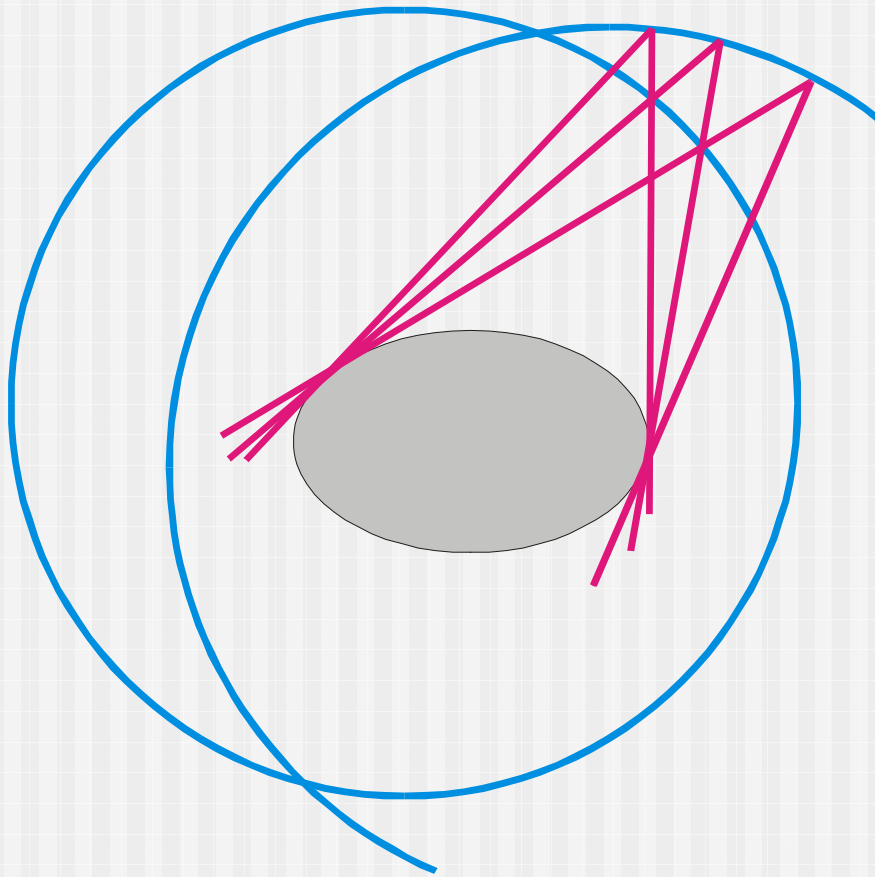
A röntgenkép



- A kép az átvilágított testrészlet egy vetülete.
- A röntgennel nem átvilágítható részek, letakarják a többi részt és csak a „külsőalakjuk” egy vetülete lesz látható.
- A Relaux háromszög és az ellipszis fóköze mutatja, hogy a külsőalak még végtelen sok röntgenképből sem határozható meg.

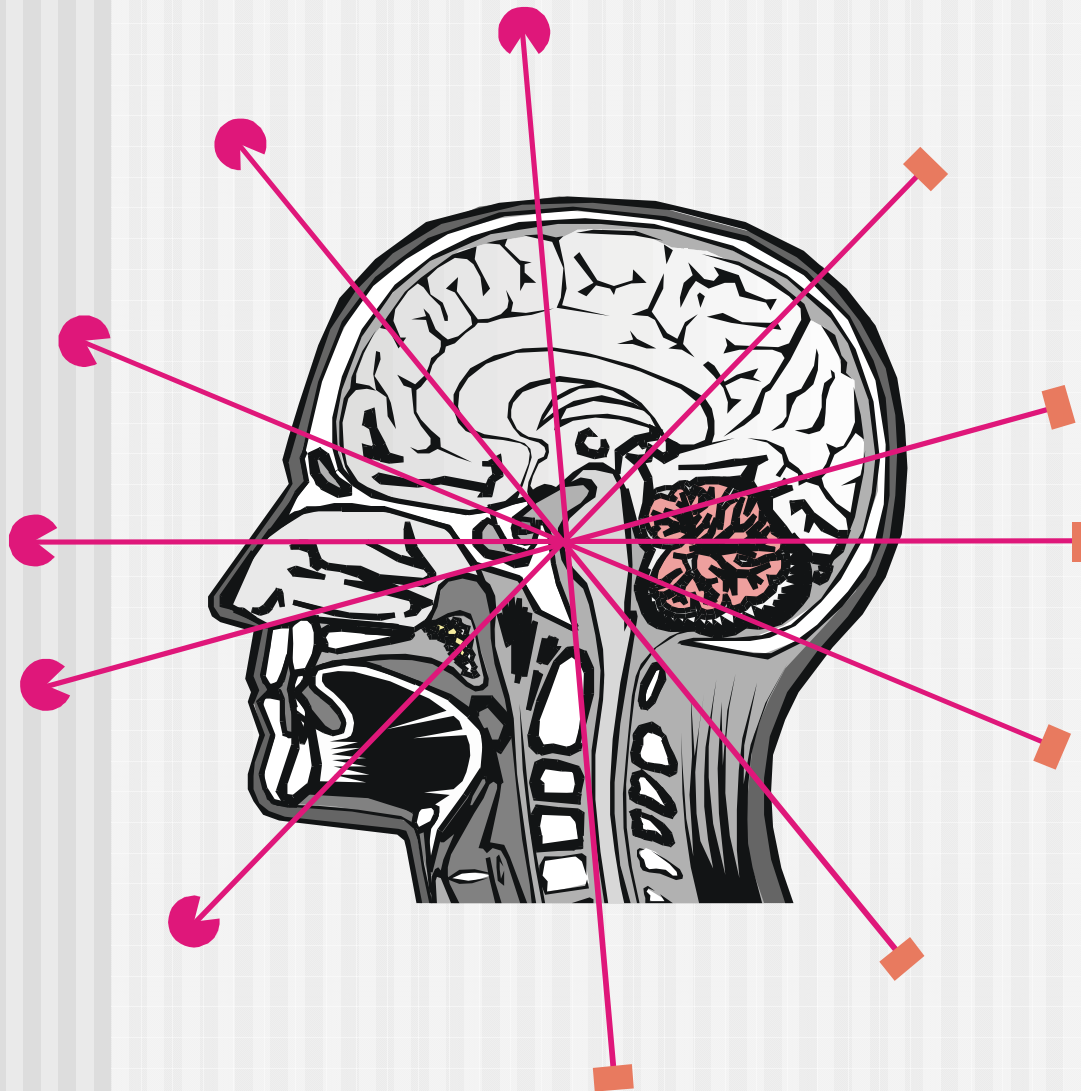


Alakfelismerés több képből



- A divergens röntgenképből „több” készülhet, mint a párhuzamosakból.
- Ha két egymást metsző görbe minden pontjából elkészítjük a röntgenképet, akkor már csak a látószög nagyságából is meg lehet állapítani az alakot.

A tomográfia gyakorlata



- A filmet érzékelőkkel helyettesítjük, és mérjük a beérkező röntgen sugár intenzitását.
- Az érzékelőt és a forrást együtt mozgatva, a lehető legtöbb mérést elvégezzük.
- A mérések eredményeit a számítógépbe tápláljuk.

A tomográfia elve

Ha a besugárzó elég vékony sugár intenzitása I_0 , ami a testrészen való áthaladás után I intenzitásúra csökken, akkor

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \int_{\xi} f(x), dx,$$

ahol ξ az az egyenes, ami mentén a sugár halad, $f(x)$ pedig az anyagi közeg sűrűsége az x pontban.

A számítógépnek tehát nincs más dolga, mint az f függvényt meghatározni annak egyenesek mentén vett integráljaiból.

A tomográfia matematikája

A tomográf tehát egy síkon értelmezett függvényhez egy a sík egyeneseinek halmazán értelmezett függvényt rendel. Ezt hívjuk 1912-es kutatója után Radon transzformációnak.

A Radon transzformáció invertálása - vagyis az eredeti függvénynek az integrálokból való meghatározása - jelenti a tomográf működésében a számítógép feladatát.

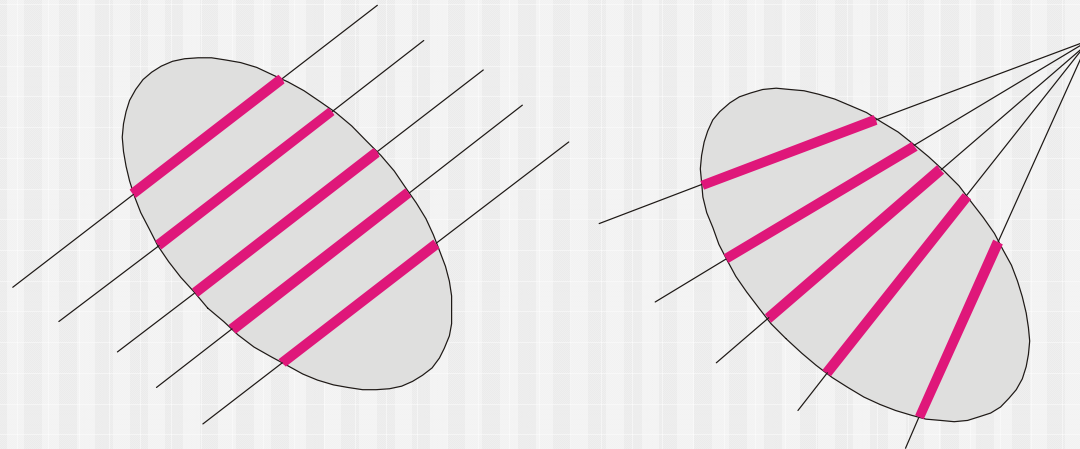
Íme a sík esetében egy(!) invertáló képlet a Polygonban (3/1992) megjelent cikkem alapján, ahol F az f Radon-transzformáltja.

Tétel 3.1. Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, melyre $f(x, y)\sqrt{x^2 + y^2} \sim$ minden k természetes számra korlátos. Ekkor $f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} R^t F(x, y)$, ahol

$$F(\alpha, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t-p| > \varepsilon} \frac{\partial Rf(\alpha, p)}{\partial p} \frac{dp}{t-p}.$$

A tomográfia geometriája

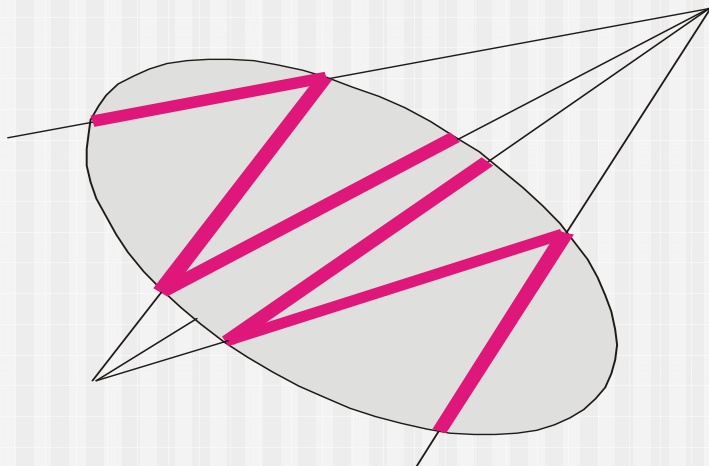
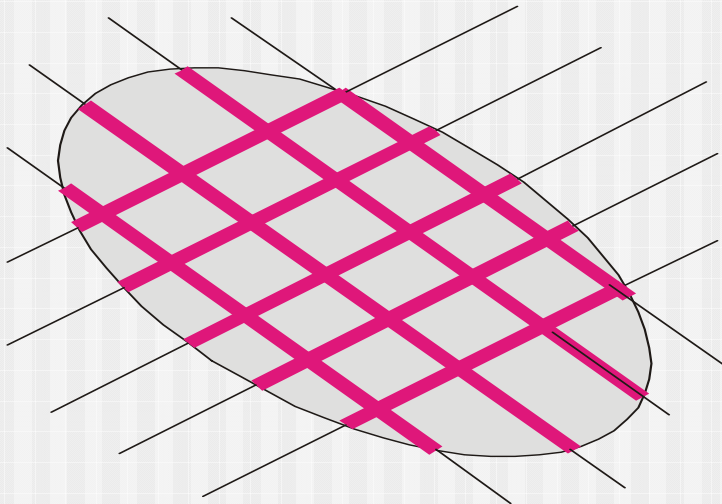
Amikor az átvilágítandó test anyaga homogén, akkor persze a sűrűségének integrálja nem más, mint a testnek az adott egyenessel vett metszetének hossza.



Ilyenkor nem szükséges az invertáláshoz az előbb mutatott invertáló formula, aminek fontos alkalmazási problémája, hogy csak akkor működik „rendesen”, ha *minden* egyenesen adott a függvény integrálja.

Az ilyen problémák gyakran tartoznak a konvex geometriához.

A geometriának elég 2, de legfeljebb 4 kép!



- A párhuzamos sugarakkal képzett képek esetén Gardner és McMullen igazolták, hogy létezik négy olyan irány, hogy ha bármely két alakzatnak ezen négy irányból vett röntgenképe megegyezik, akkor egymás eltoltjai.
- A divergens sugarakkal képzett képek esetében Falconer bizonyította, hogy ha két, az alakzatot metsző egyenesen lévő pontból megegyeznek a röntgenképek, akkor a két alakzat egybeesik.

Irodalom

- R. J. Gardner és P. McMullen, On Hammer's X-ray problem, J. London Math. Soc., 21(1980), 171-175.
- K. J. Falconer, X-ray problems for point sources, Proc. London Math. Soc., 46(1983), 241-262.
- Kincses. J. és Kurusa Á., Felismerhető-e egy alakzat az árnyékképeiből?, Polygon, 2(1991), 69-80.
- Kurusa Á., A tomográfia matematikája, Polygon, 3(1992), 83-96