

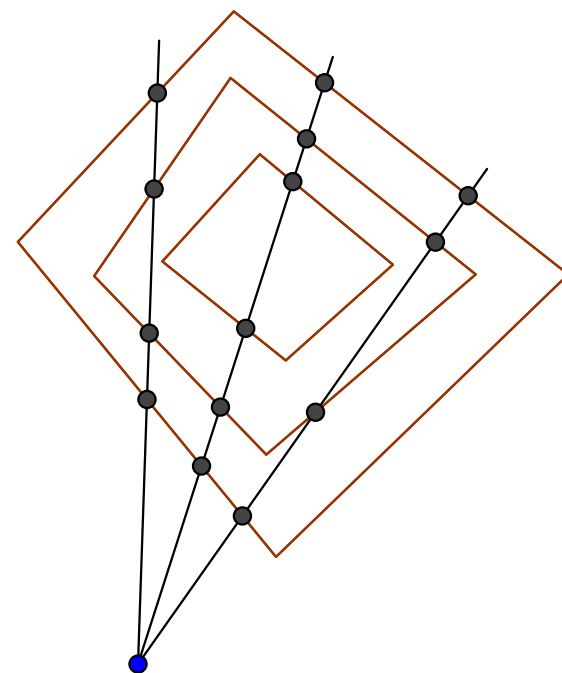
Takarási szám: lássuk a csomagolást!

(Látható a habban minden buborék?)

Kurusa Árpád

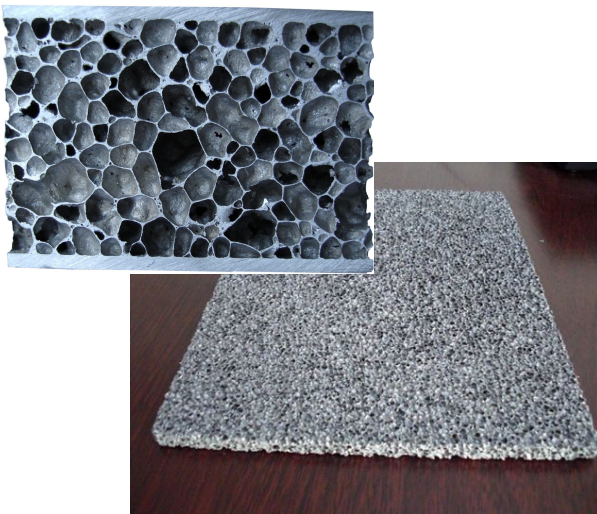
Szegedi Tudományegyetem
TTIK, Bolyai Intézet, Geometria Tanszék
<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

Szeged, 2014. május 22.



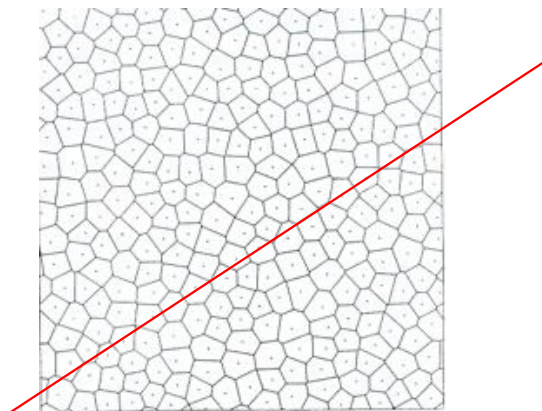
Szegedi Geometria Nap 2014

Röntgenezés működése



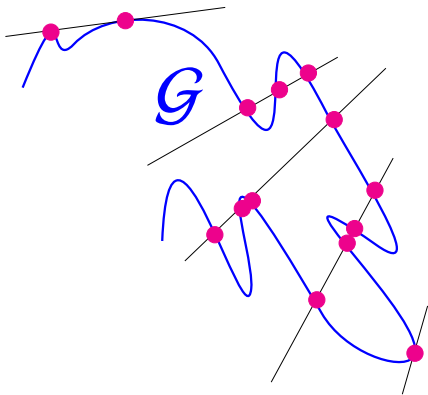
Alumíniumhab-lap

A fémhabok egyenletességének mérése valós alkalmazási példa lehet.



- 1 Az ℓ egyenes mentén terjedő Röntgen-sugár intenzitásának valamely f függvény szerint változó sűrűséggel rendelkező anyagtömegben való áthaladása közbeni csökkenését leíró $\log(I/I_0) = \int_{\ell} f ds$ fizikai képlet azért használható a Radon-transzformáció elméletén alapuló tomográfiai eszközökben, mert a vizsgált objektum anyagsűrűsége jellemzően nagyobb az azt körülvevő (rendszerint levegő) sűrűségénél.
- 2 Mi történik, ha a vizsgált objektum hab (celluláris szerkezetbe csomagolt levegő)? Vajon azonosíthatók a habban a buborékok kívülről?
- 3 Ekkor a gyengülést leíró képletben az f függvény voltaképpen csak a csomagoló anyag (sejtfal, buborékfal) pontjaiban nem nulla. Ha a csomagoló anyag nem vastag vagy alig gyengíti a Röntgen-sugarat, akkor az áthaladáskor a Röntgen-sugár alig gyengül és ez a gyengülés alig függ a Röntgen-sugár irányától.
- 4 Ez lényegében azt jelenti, hogy minden Röntgen-sugáron csak a csomagoláson való áthaladásainak száma mérhető.

Crofton-transzformáció

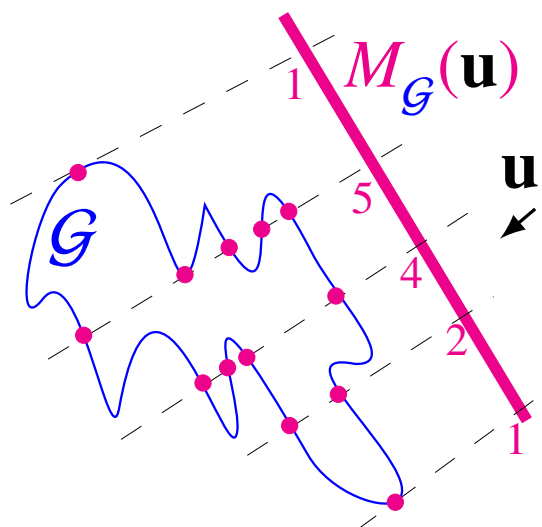


A $\mathcal{G}$ (multi)görbe *Crofton-transzformáltja* az az egyenesek halmazán értelmezett CG függvény, mely minden ℓ egyenesre megadja a $CG(\ell) = \#(\ell \cap \mathcal{G})$ metszésszámot.

- 1 A CG Crofton-transzformált majdnem minden egyenesen véges.
- 2 H. Steinhaus azt sejtette 1954-ben, hogy egy rektifikálható $\mathcal{G}$ görbét meghatároz a CG Crofton-transzformáltja.
- 3 Steinhaus sejtését a maga teljességében először H. Fast bizonyította 1993-ban [10, 1]. Azóta több más (kevésbé általános) megoldás is született.
- 4 Minden (általán) ismert megoldás arra épül, hogy egy adott pontnak a görbéhez tartozása eldönthető a CG függvénynek a pont közelében haladó összes egyenesen való viselkedése alapján.
- 5 A Crofton-transzformált az egyenes elmozdulására nagyon érzékeny, ami nem előnyös esetleges gyakorlati célokhoz.
- 6 A C Crofton-transzformáció képtere nem ismert, de a Crofton-formula szerint egyenesek halmazán vett integrálja éppen a görbe hossza (ez igazolja az 1 megjegyzésünket). [9]

Most és innentől a görbe szó jelentheti a görbét és a nyomát is; mindig a megfelelő módon kell érteni.

Takarási szám

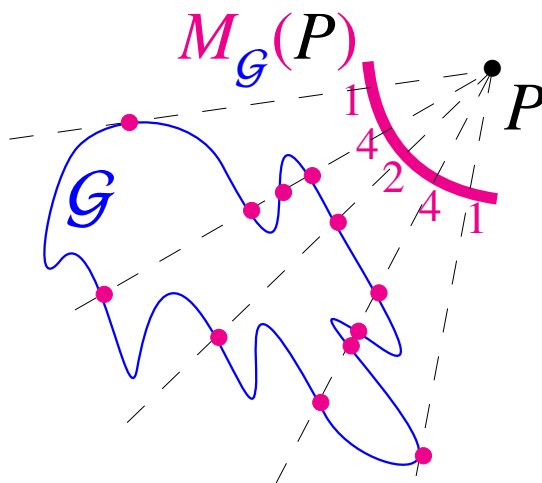


- 1 Egy $\mathcal{G}$ görbe **takarási száma** a Crofton-transzformáltjának integrálja azonos irányú, vagy azonos ponton átmenő egyenesek halmazán:

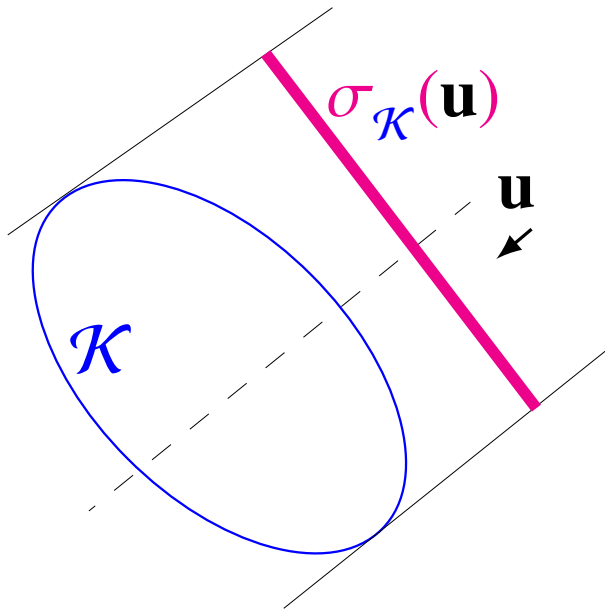
$$M_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}) = \int_{\ell \parallel \mathbf{u}} C\mathcal{G}(\ell) d\ell \quad \text{illetve} \quad M_{\mathcal{G}}(P) = \int_{\ell \ni P} C\mathcal{G}(\ell) d\ell.$$

Előbbit irány, utóbbit pont szerinti takarási számnak nevezzük.

- 2 Véges sok görbe unióját (halmazát) **multigörbének** nevezzük. Ennek takarási számát a görbék takarási számainak összegével értelmezzük.
- 3 Azt a sejtést, hogy *egy gyűrűvel körülvevett (multi)görbe egyértelműen meghatározható, ha a gyűrű minden pontjában ismert a takarási szám*, 1992-ben közöltem (a Steinhaus-sejtésről akkor nem tudtam). [5]
- 4 Az 1992-es sejtés a Steinhaus-sejtés élesítése. A takarási szám bizonyos értelemben a Crofton-transzformált általánosított Radon-transzformáltja, de erre vonatkozólag nincsen (általam) ismert inverziós képlet. Ha lenne, akkor a két sejtés ekvivalens lenne.



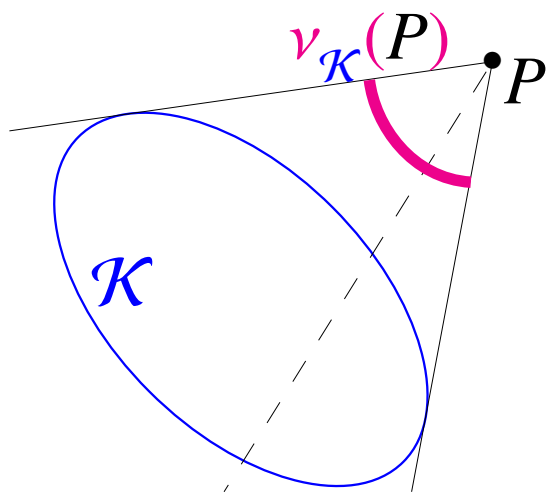
Párhuzamos vetület



Az ábrán a $\mathcal{K}$ konvex test $\mathbf{u}$ irány menti **párhuzamos vetülete** és annak $\sigma_{\mathcal{K}}(\mathbf{u})$ mértéke (hossza) látható.

- 1 A síkban a párhuzamos vetület alakja és hossza ugyanazt az információt hordozza. Magasabb dimenziókban viszont előbbi jóval többet.
- 2 $2\sigma_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}) = M_{\partial\mathcal{K}}(\mathbf{u})$
- 3 Síkban az állandó szélességű konvex tartományok (poligon is van ilyen!) mutatják, hogy az irány szerinti takarási szám nem határozza meg a konvex tartományt.
- 4 Alexandrov tétele szerint a középpontosan szimmetrikus testeket meghatározza párhuzamos vetületeik mértéke. [2, Theorem 3.3.6]
- 5 Egy térbeli nem középpontosan szimmetrikus konvex test és az origóra vett tükörképe minden irány mentén ugyanakkora területű vetülettel rendelkeznek, de nem esnek egyben [2].

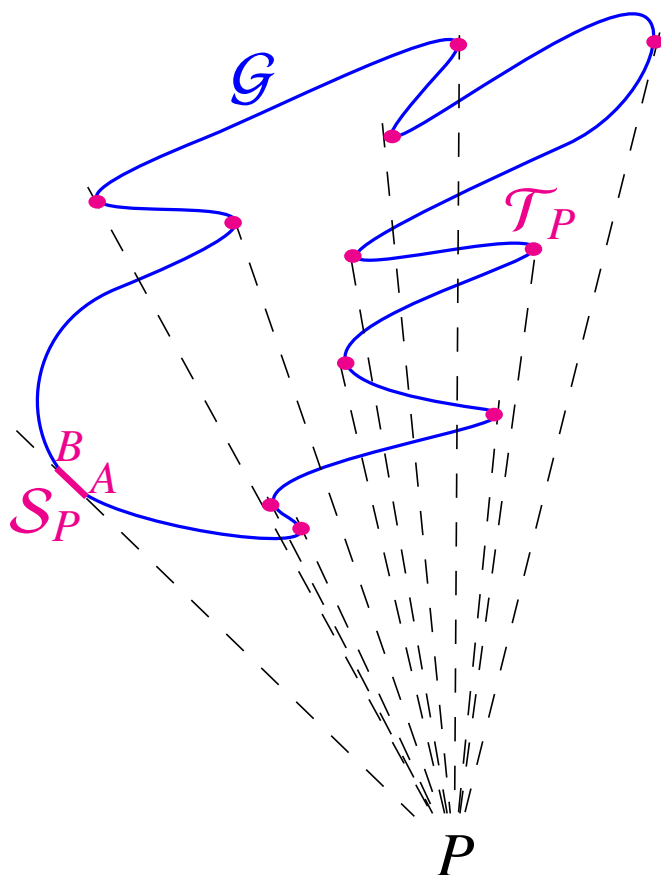
Pontvetület



Az ábrán a $\mathcal{K}$ konvex test P középpontú (egység) körön megjelenő **pontvetülete** és annak $\nu_{\mathcal{K}}(P)$ szögmértéke látható. A $\mathcal{K}$ test **α -izoptikusa** a $\{P : \nu_{\mathcal{K}}(P) = \alpha\}$ halmaz ($\alpha \in [0, \pi]$).

- 1 A síkban a pontvetület alakja és hossza ugyanazt az információt hordozza. Magasabb dimenziókban viszont előbbi jóval többet.
- 2 $2\nu_{\mathcal{K}}(P) = M_{\partial\mathcal{K}}(P)$
- 3 Sokkal több pontvetület van, mint párhuzamos.
- 4 Síkban pontosan akkor van olyan nem kör konvex tartomány melynek ν -izoptikusa kör, ha $\nu/\pi \in \mathbb{Q}$ legkisebb nevezője páros [3]. Csak a körnek van két kör izoptikusa [8].
- 5 Ha a síkban egy nem feltétlen korlátos konvex $\mathcal{T}$ tartományban lévő két konvex sokszög egyforma szög alatt látszik $\partial\mathcal{T}$ minden pontjában, vagyis $\partial\mathcal{T}$ az **ekvioptikusuk**, akkor egybeesnek. [4]
- 6 Ha a síkban a nem feltétlen korlátos konvex $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ tartományok metszetében lévő konvex kompakt $\mathcal{K}$ tartomány ismert $\nu_{\mathcal{K}}(P)$ szög alatt látszik a $\partial\mathcal{T}_1$ és $\partial\mathcal{T}_2$ minden P pontjában, és $\partial\mathcal{T}_1$ nem nulla szögben metszi a $\partial\mathcal{T}_2$ -t vagy aszimptotikusok a végtelenben, akkor $\mathcal{K}$ rekonstruálható [5].
- 7 Magasabb dimenzióban alig ismert valami. Friss eredmény, hogy két izoptikus gömbje csak gömbnek lehet [7].

Multigörbék



Az P pontból nézve a $\mathcal{G}$ multigörbe érintői és ezek érintési pontjainak $\mathcal{T}_P$ valamint maximális szakaszainak $\mathcal{S}_P$ halmaza.

Ha egy P pontban a takarási függvény nem C^2 , akkor

$$(2.1) \quad \int_{\mathbb{S}^1} \partial_{\mathbf{w}} M_{\mathcal{G}}(P) d\mathbf{w} = 4 \sum_{\overline{AB} \in \mathcal{S}_P} \left| \frac{1}{|P-A|} - \frac{1}{|P-B|} \right|.$$

Ha egy P pontban a takarási függvény C^2 , akkor

$$(2.2) \quad \Delta M_{\mathcal{G}}(P) = \sum_{T \in \mathcal{T}_P} \frac{\varrho(T)}{|P-T|^3},$$

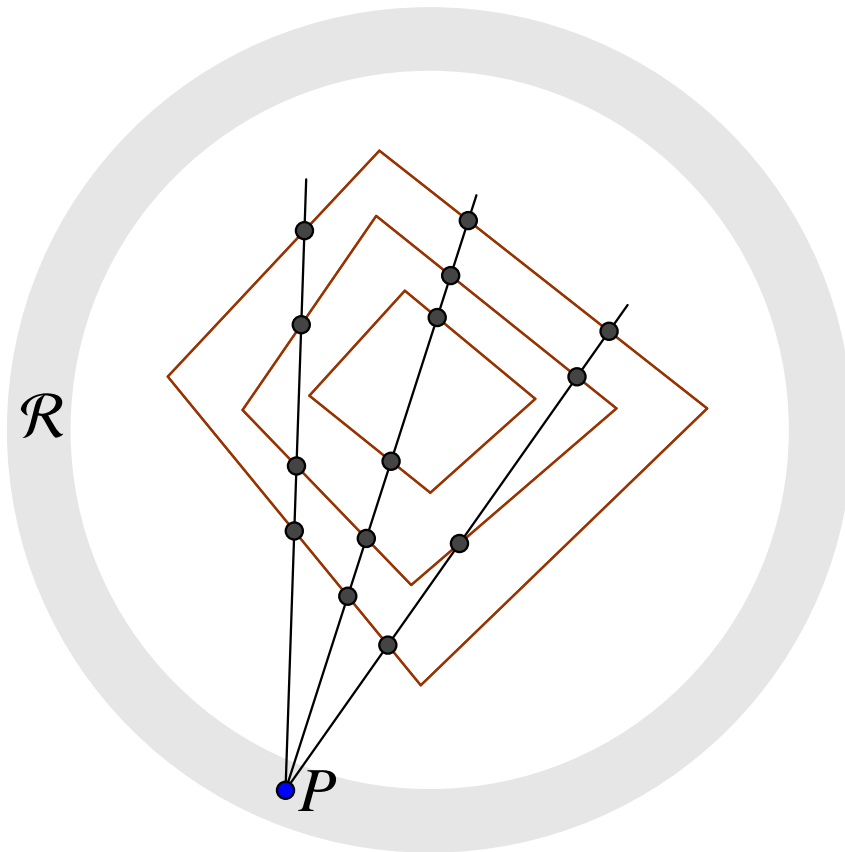
ahol ϱ az adott pontbeli simulókör sugara.

Tétel 2.1 ([6])

Legyen $\mathcal{R}$ egy gyűrű, ami körbeveszi a $\mathcal{G}$ analitikus multigörbét, melynek görbülete a szakaszait kivéve nem nulla. Ha $M_{\mathcal{G}}$ ismert az $\mathcal{R}$ gyűrűn, akkor $\mathcal{G}$ rekonstruálható.

A bizonyításban előbb (2.1) alapján a multigörbe szakaszait kalkuláljuk, majd (2.2) analitikus kiterjesztésén keresztül a sehol sem nulla görbületű analitikus multigörbét.

Multiszakasz



A $\mathcal{G}$ multigörbe (a csomagolás!) a barna sokszögek (dobozok!) összessége. Ha ezek konvexek, akkor $M_{\mathcal{G}}(P)$ ezek látószögeinek összege.

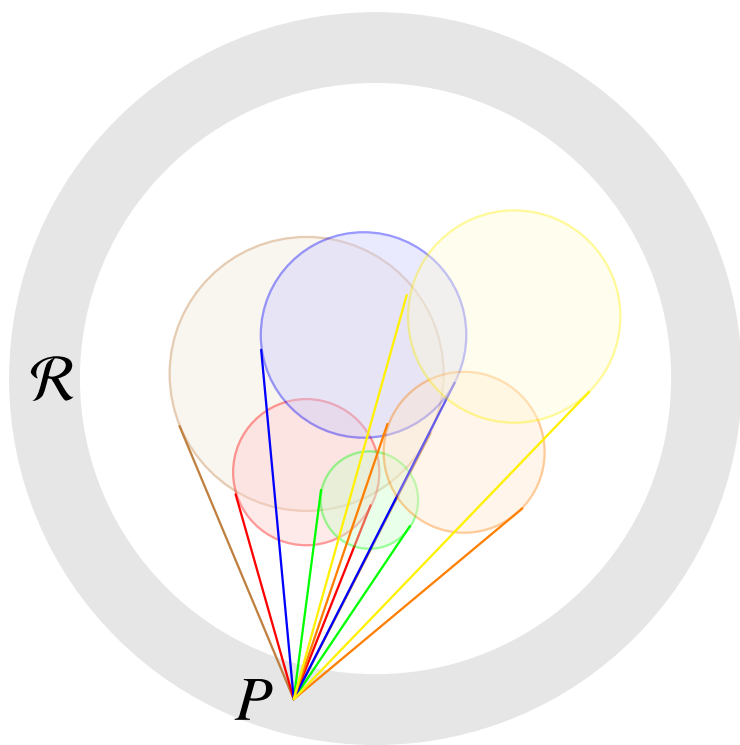
Tétel 2.2 ([6])

Legyen $\mathcal{R}$ egy gyűrű, ami körbeveszi a $\mathcal{G}$ multigörbét. Az $M_{\mathcal{G}}$ takarási függvény akkor és csak akkor harmonikus az $\mathcal{R}$ gyűrűn legfeljebb véges sok egyenes kivételével, ha $\mathcal{G}$ egy multiszakasz.

Tétel 2.3 ([6])

Legyen $\mathcal{R}$ egy gyűrű, ami körbeveszi a $\mathcal{G}$ multiszakaszt. Ha ismert az $M_{\mathcal{G}}$ takarási függvény az $\mathcal{R}$ gyűrűn, akkor a $\mathcal{G}$ multiszakasz rekonstruálható.

Multikör



A $\mathcal{G}$ multigörbe (a hab!) a színes körök összessége. Az $M_{\mathcal{G}}$ takarási szám a P pontban ezen körlapok (buborékok) látószögeinek összege.

Az O_j középpontú r_j sugarú körök ($j = 1, \dots, m$) által alkotott C multikörre (2.2) azt adja, hogy

$$\Delta M_C(P) = 2 \sum_{j=1}^m \frac{r_j}{(|P - O_j|^2 - r_j^2)^{3/2}}.$$

Ez felveti a következőt:

Sejtés 2.4 ([6])

Ha $f(m)$ koncentrikus kör veszi körül a $\mathcal{G}$ multigörbét, és van olyan legfeljebb m kört tartalmazó C multikör, melyre $M_{\mathcal{G}} = M_C$ ezeken a körökön, akkor $\mathcal{G} = C$.

Nitsche [8] szerint $f(1) = 2$, ha C koncentrikus.

Tétel 2.5 ([6])

Legyen $\mathcal{R}$ egy körgyűrű, ami körbeveszi a $\mathcal{G}$ multigörbét. Az $M_{\mathcal{G}}$ takarási függvény akkor és csak akkor forgásinvariáns az $\mathcal{R}$ gyűrűn, ha $\mathcal{G}$ egy koncentrikus körökből álló multikör.



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

TELEMEDICINA FÓKUSZÚ KUTATÁSOK

ORVOSI, MATEMATIKAI ÉS INFORMATIKAI TUDOMÁNYTERÜLETEKEN

TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0073 PROJEKT



A projekt az Európai Unió támogatásával,
az Európai Szociális Alap
társfinanszírozásával valósul meg.



SZÉCHENYI TERV



MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

Referenciák szerző szerinti sorban I



H. Fast

Inversion of the Crofton transform for sets in the plane, *Real Anal. Exchange*, **19** (1993/94), 59–80.



R. J. Gardner

Geometric tomography, Encyclopedia of Math. and its Appl. **58**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.



J. W. Green

Sets subtending a constant angle on a circle, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 263–267.



J. Kincses and Á. Kurusa

Can you recognize the shape of a figure from its shadows?, *Beitr. Algebra Geom.*, **36** (1995), 25–34.

Referenciák szerző szerinti sorban II



Á. Kurusa

You can recognize the shape of a figure by its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 103–112.



Á. Kurusa

The masking function of multicurves, *kézirat*, (2014), benyújtva.



Á. Kurusa and T. Ódor

Isoptic characterization of spheres, *J. Geom.* (2014), to appear.



J. C. C. Nitsche

Isoptic characterization of a circle, (Proof of a conjecture of M.S. Klamkin), *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 45–47.



L. A. Santaló

Integral Geometry and Geometric Probability, Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

Referenciák szerző szerinti sorban III



H. Steinhaus

Length, shape, and area, *Colloq. Math.*, **3** (1954), 1–13.