Modell módszer az integrál-geometriában

Kurusa Árpád*

Szinapszis. Rámutatunk a differenciál-geometriai modellek alkalmazásának lehetőségeire a Gelfand–Helgason tipusú integrál-geometria területén.

1. Köszöntés

Mindenekelőtt nagyon köszönöm a meghívást és a lehetőséget, hogy az ország egyik legnevesebb egyetemén az engem mostanában érdeklő matematikáról beszélhetek.

Külön köszönöm Bácsó Sándor és Nagy Péter közreműködését, és remélem, hogy ez az előadás csak az első lépés az intézeteink között Nagy Péter személyében már amúgy is létező kapcsolat együttműködéssé való továbbfejlesztésében.

A következőkben arról fogok beszélni, hogyan jelentek meg a differenciál-geometriai modellek a modern, Gelfand–Helgason tipusú integrál-geometriában.

2. A problémakör áttekintése

A Gelfand-Helgason tipusú integrál-geometriában olyan integrál-transzformációkat vizsgálunk, ahol az integrálás az alapsokaság alacsonyabb dimenziós alsokaságain történik.

A felmerülő problémák legtöbbje leírható az először Gelfand által vizsgált diagrammal (1. ábra), ahol a $Z = \{(x, y) : x \in y\}$ *incidencia-sokaság* az X és az Y sokaságok felett is principális fibrált nyaláb a

$$\pi_X(x, y) = x \qquad \text{és} \qquad \pi_Y(x, y) = y$$

Előadás, Debrecen, 1996. február 15., 17:00-17:50.

AMS Subject Classification (2000): 44A0.

* Az OTKA F/016226-os OTKA pályázat támogatásával a debreceni kollégák felkérésére

projekciókkal. A vizsgált integrál-transzformációk, vagy mai nevükön Radon transzformációk, a fibrumokon értelmezett μ_x és μ_y mértékekkel a

$$
\begin{aligned}
Rf(y) &= \int_{\pi_Y(z)=y} f(\pi_X(z))d\mu_y(\pi_X(z)) \qquad f\colon X \to \mathbb{R} \\
R^*F(y) &= \int_{\pi_X(z)=x} F(\pi_Y(z))d\mu_x(\pi_Y(z)) \qquad F\colon Y \to \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

képletek szerint értelmezettek. Megfigyelhető, hogy R és R^* definíciója teljesen analóg és R^*R az X-en értelmezett függvényeket ugyancsak X-en értelmezett függvényekbe képezi.

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
$$

1. ábra

A diagram legegyszerűbbnek tűnő példája az $\mathbb{R}^n$ n-dimenziós Eukliedeszi téren definiált Radon transzformáció, melyre $X = \mathbb{R}^n$ és $Y = G(k,n)$ a k-dimenziós hipersíkok Grassmann-féle sokasága. A természetes mértékek ekkor a klasszikus Radon transzformációt definiálják, melynek általánosításaiból indult ki a mára elméletté terebélyesedett vizsgálatok legtöbbje.

Természetesen igen sok matematikai konstrukcióban vizsgálható hasonló módon keletkező integrál-transzformáció. Komoly kutatások igyekeztek kvalitatív választ adni arra a legfontosabb kérdésre, hogy milyen mértékek esetén invertálható a klasszikus és más diagramokhoz tartozó Radon transzformáció.

Erre vonatkozóan jelentős eredményeket hozott a mikrolokál-analízis alkalmazása, melyet Guillemin javasolt. Ezen eredmények immár a konvex geometria területére is behatoltak, mivel az invertálhatóságot a mértékekre szabott meglepően gyenge feltételekkel is garantálják.

A szükséges feltételek ilyen gyengesége mutatja, hogy az invertálhatóságban, és így az egész Radon transzformáció viselkedésében a diagramban szereplő terek, különösen az incidencia-sokaság szerkezete igen jelentős.

A kvantitatív eredmények mindezideig alapvetően a diagram specifikumainak megértéséből indultak ki. Minden teret, amelyen inverzformula felírása, vagy a transzformáció részletesebb megértése volt a cél, külön-külön kellett vizsgálat tárgyává tenni. Ezen a területen Helgason neve érdemel feltétlen említést.

Sok különböző tér esetében azonban a kapott formulák nagyon hasonlónak mutatkoztak. Az ezek által sugallt analógia azonban a háttérben maradt, miközben mind nyilvánvalóbbá vált az incidencia-sokaság szerkezetének meghatározó fontossága.

Magam voltam, aki néhány évvel ezelőtt a Bolyai síkon számolgatva a Radon transzformációval felismertem, hogy az igen bonyolult incidencia-sokaság vizsgálata helyett, érdemesebb a terek egymáshoz való viszonyával foglalkozni.

Mára a probléma ilyetén megközelítése az alábbi "filozófiai" tételben foglalható össze:

Két incidencia-sokaság lényegében azonos, és így a definiált Radon transzformációk viselkedése is megegyezik, ha az őket meghatározó alsokaság-rendszerek, mint sokaságok egymásban modellezhetőek.

Nem vitás, hogy a legtöbb fogalom ebben az állításban egyáltalán nem jól definiált. Egy hasonló értelmű de matematikailag korrekt állításhoz tisztázni kellene a használt függvénytereket és az incidencia-sokaságok hasonlóságát is.

Mindazonáltal ez az elgondolás már munkaképes kutatási programokat képes indukálni, amelyekre az alábbiakban fogunk látni példákat.

2. Konstans görbületű Riemann terek

A klasszikus Radon-transzformációt könnyen általánosíthatjuk, ha az integrálokat az egyenesek helyett geodetikusokon vesszük. Ilyen általánosság mellett a gömbi Radon transzformáció az első lépés, a második pedig a negatív konstans görbületű sokaságok vizsgálata. Az eredetivel együtt ezt összeségében úgy mondhatjuk, hogy a (totálisan geodetikus) Radon transzformáció vizsgálata konstans görbületű tereken.

Felismerve, hogy a konstans görbületű terek geodetikusai a projektív modellben egybeesnek, bebizonyítottam, hogy a konstans görbületű tereken vett Radon-transzformációk egymásból számolhatóak, amit a következő tétel ír le.

Tétel. *Legyen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ és $g(\tilde{\mu}^{-1}(x)) = f(x)(1+\kappa|x|^2)^{(d+1)/2}$, ahol $\tilde{\mu}$ a konstans görbületű terek közti geodetikus-tartó vetítés. Ekkor*

$$R_\kappa g(\tilde{\mu}^{-1}(\xi)) = \sqrt{1+\kappa|\xi|^2}\, Rf(\xi),$$

ahol $\xi \in G(d,n)$, és $\kappa = -1, 0, +1$ és R_κ a κ konstans görbületű téren vett totálgeodetikus Radon transzformáció.

E kapcsolat révén bármely téren elért eredmény átvihető bármely másikra, így a messze legtöbbet vizsgált Eukliedeszi eset tudásanyaga a többi térre is ismertté vált. Sajnos Beltrami tétele szerint ilyen geodetikus kapcsolat örökíti a konstans görbületet, így ez az egyszerű megközelítés egyszerre ellőtte teljes munícióját.

Irodalom

[1] L. E. ANDERSSON, On the determination of a function from spherical averages, *SIAM J. Math. Anal.*, **19** (1988), 214–232.

[2] M. F. ATIYAH, *Geometry of Yang-Mills fields*, Scoula Normale Superiore, 1979.

[3] C. A. BERENSTEIN and E. CASADIO TARABUSI, Inversion formulas for the k-dimensional Radon transform in real hyperbolic spaces, *Duke Math. J.*, **62** (1991), 613–631.

[4] C. A. BERENSTEIN and E. CASADIO TARABUSI, Range of the k-dimensional Radon transform in real hyperbolic spaces, *Forum Math.*, **5** (1993), 603–616.

[5] C. A. BERENSTEIN and D. WALNUT, Local inversion of th Radon transform in even dimensions using wavelets, *Proceeding of the Conference 75 years of Radon transform*, International Press (1994), 45–69.

[6] J. BOMAN, An example of non-uniqueness for a generalized Radon transform, *preprint*.

[7] J. BOMAN, Uniqueness theorems for generalized Radon transforms, *Constructive Theory of Func.'84, Sofia* (1984), 173–176.

[8] J. BOMAN, On generalized Radon transforms with unknown measures, *Contemporary Math.*, **113** (1990), 5–15.

[9] J. BOMAN and E.T. QUINTO, Support theorems for real analytic Radon transforms, *Duke Math. J.*, **55** (1987), 943–948.

[10] A. M. CORMACK, Representation of a function by its line integrals with some radiological applications I.;II., *J. Appl. Phys.*, **34;35** (1963), 2722–2727; 2908–2913.

[11] A.M. CORMACK, The Radon transform on a family of curves in the plane I.-II., *Proc. AMS.*, **83;86** (1981;1982), 325–330; 293–298.

[12] A. M. CORMACK and E. T. QUINTO, A Radon transform on spheres through the origin in $\mathbb{R}^n$ and applications to the Darboux equation, *Trans. AMS*, **260** (1980), 575–581.

[13] H.T. CRAFT, K.J. FALCONER and R.K. GUY, *Unsolved problems in geometry*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[14] S. R. DEANS, A unified Radon inversion formula, *J. Math. Phys.*, **19** (1978), 2346–2349.

[15] S. R. DEANS, Gegenbauer transforms via the Radon transform, *SIAM J. Math. Anal.*, **10** (1979), 577–585.

[16] W. F. DONOGHUE, *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, Inc., 1969.

[17] K.J. Falconer, X-ray problems for point sources, *Proc. London Math. Soc.*, **46** (1983), 241–262.

[18] K.J. Falconer, On the equireciprocal problem, *Geom. Dedicata*, **14** (1983), 113-126.

[19] D. V. Finch, Cone beam reconstruction with sources on a curve, *SIAM J. Appl. Math.*, **45** (1985), 665–673.

[20] B. L. Fridman, A uniqueness result for a generalized Radon transform, *preprint.*

[21] P. Funk, Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung, *Math. Ann.*, **77** (1916), 129–135.

[22] R.J. Gardner, Symmetrals and X-rays of planar convex bodies, *Arch. Math. (Basel)*, **41** (1983), 183-189.

[23] R.J. Gardner, Chord functions of convex bodies, *J. London Math. Soc.*, **36** (1987), 314–326.

[24] R.J. Gardner and P. Gritzmann, Successive determination and verification of polytops by their X-rays, *preprint.*

[25] R.J. Gardner and P. McMullen, On Hammer's X-ray problem, *J. London Math. Soc.*, **21** (1980), 171–175.

[26] I.M. Gelfand, M.I. Graev and N.Ya. Vilenkin, *Generalized functions Vol. 5.*, Academic Press, Inc., 1966.

[27] I. M. Gelfand, M. I. Graev and N. Vilenkin, *Integral geometry and representation theory*, Academic Press, Inc., 1966.

[28] I. M. Gelfand, M. I. Graev and , Z. Ya. Shapiro, Integral geometry on k-dimensional hyperplanes, *Func. Anal. Appl.*, **1** (1967), 15–31 (in russian).

[29] I. M. Gelfand and G. E. Shilov, *Generalized functions vol. 1.*, Academic Press, Inc., 1964.

[30] O. Giering, Bestimmung von Eibereichen und Eikörpern durch Steiner-Symmetrisierungen, *Sber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Nat. Kl.*, (1962), 225-253.

[31] E. L. Girenberg, Euclidean Radon transforms: ranges and restrictions, *Contemp. Math. AMS*, **63** (1987), 109–133.

[32] J. Globevnik, Zero integrals on circles and characterizations of harmonic and analytic functions, *Trans. AMS*, **317** (1990), 313–330.

[33] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York, 1980.

[34] J.W. Green, Sets subtending a constant angle on a circle, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 263–267.

[35] E. L. Grinberg, Spherical harmonics and integral geometry on projective spaces, *Trans. AMS*, **279** (1983), 187–203.

[36] V. Guillemin, Radon transform on Zoll surfaces, *Adv. in Math.*, **22** (1976), 85–119.

[37] V. Guillemin, *Groups and geometric analysis: integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions,* Pure and Appl. Math.,**113**, Academic Press, Orlando, 1984.

[38] V. Guillemin, The totally-geodesic Radon transform on constant curvature spaces, *Contemp. Math.*, **113** (1990), 141–149.
[39] P.C. Hammer, *'Problem 2', Proc. of Symp. in Pure Math. – Vol. VII: Convexity*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963.
[40] S. Helgason, Support theorems in integral geometry and their applications, *preprint.*
[41] S. Helgason, Differential operators on homogeneous spaces, *Acta Math.*, **102** (1959), 239–299.
[42] S. Helgason, Some remarks on the exponential mapping for an affine connection, *Math. Scand.*, **9** (1961), 129–146.
[43] S. Helgason, The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds, *Acta Math.*, **113** (1965), 153-180.
[44] S. Helgason, Support of Radon transforms, *Advances in Math.*, **38** (1980), 91–100.
[45] S. Helgason, *The Radon transform*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1980.
[46] S. Helgason, *Groups and geometric analysis* (Pure and applied mathematics), Academic Press, Inc., 1984.
[47] S. Helgason, The Radon transform on constant curvature spaces, *Cont. Math.*, **113** (1990), 141-149.
[48] S. Helgason, The totally geodesic Radon transform on constant curvature spaces, *Contemp. Math.*, **113** (1990), 141–149.
[49] A. Hertle, A characterization of Fourier and Radon transforms on Euclidean space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273** (1982), 595–608.
[50] A. Hertle, On the range of the Radon transform and its dual, *Math. Ann.*, **267** (1984), 91–99.
[51] A. Hertle, On the injectivity of the attenuated Radon transform, *Proc. AMS*, **92** (1984), 201-205.
[52] A. Hertle, The identification problem for the constantly attenuated Radon transform, *Math. Z.*, **197** (1988), 13–19.
[53] A. Horwitz, Reconstructing a function from its tangent lines, *Amer. Math. Monthly*, **96** (1989), 807-813.
[54] Wu-Yi Hsiang, On the laws of trigonometry of two-point homogeneous spaces, *Ann. Global Anal. Geom.*, **7** (1989), 29–45.
[55] F. John, The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 300–322.
[56] F. John, *Plane waves and spherical means*, Springer-Verlag, Reprint, 1981.
[57] T. Kakehi, Range characterization of Radon transforms on $\mathbb{S}^n$ and $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, *J. Math. Kyoto Univ.*, **33** (1993), 315–328.
[58] J. Kincses and Á. Kurusa, Can you recognize the shape of a figure from its shadows?, *Beiträge zur Alg. und Geom.*, **36** (1995), 25–35.
[59] A. A. Kirillov, On a problem of I. M. Gel'fand, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **137** (1961), 268–269.
[60] Á. Kurusa, Identification of rotation invariant Radon transforms, *preprint.*

[61] Á. Kurusa, A characterization of the Radon transform and its dual on Euclidean space, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **54** (1990), 273–276.

[62] Á. Kurusa, The Radon transform on hyperbolic space, *Geom. Dedicata*, **40** (1991), 325–339.

[63] Á. Kurusa, The invertibility of the Radon transform on abstract rotational manifolds of real type, *Math. Scand.*, **70** (1992), 112–126.

[64] Á. Kurusa, New unified Radon inversion formulas, *Acta Math. Hung.*, **60** (1992), 283–290.

[65] Á. Kurusa, Support curves of invertible Radon transforms, *Arch. Math.*, **61** (1993), 448–458.

[66] Á. Kurusa, The Radon transform on half sphere, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **58** (1993), 143–158.

[67] Á. Kurusa, Support theorems for totally geodesic Radon transforms on constant curvature spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122** (1994), 429–435.

[68] Á. Kurusa, Romanov's theorem in higher dimensions, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **60** (1995), 487–499.

[69] Á. Kurusa, The shadow picture problem for nonintersecting curves, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 103–112.

[70] Á. Kurusa, You can recognize the shape of a figure from its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59** (1996), 113–125.

[71] Á. Kurusa, The totally geodesic Radon transform on the Lorentz space of curvature -1, *Duke Math. J.*, **86** (1997), 565–583.

[72] Á. Kurusa, Limited domain Radon transform, *Math. Balkanica*, **11** (1997), 327–337.

[73] Á. Kurusa, Orbital integrals on the Lorentz space of curvature -1, *Arch. Math.*, **75** (2000), 132–146.

[74] D. Ludwig, The Radon transform on Euclidean space, *Comm. Pure Appl. Math.*, **19** (1966), 49–81.

[75] P. Maass, A generalized Radon transform in wideband radar, *Contemp. Math.*, **113** (1990), 183–187.

[76] W. R. Madych, Summability and approximate reconstruction from Radon transform data, *Cont. Math.*, **113** (1990), 189–219.

[77] W. R. Madych and D. C. Solmon, A range theorem for the Radon transform, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104** (1988), 79–85.

[78] A. Markoe, Fourier inversion of the attenuated X-ray transform, *SIAM J. Math. Anal.*, **15** (1984), 718–722.

[79] R. G. Mukhometov, The reconstruction problem of a two-dimensional Riemannian metric and integral geometry, *Sov. Math. Dokl.*, **18** (1977), 27–31.

[80] R. G. Mukhometov, A problem of reconstructing a Riemannian metric, *Sib. Math. J.*, **22** (1981), 420–433.

[81] F. Natterer, Computerized tomography with unknown sources, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1201-1212.

[82] F. NATTERER, An inverse problem for a transport equation and integral geometry, *Contemp. Math.*, **113** (1990), 221–231.
[83] J.C.C. NIETSCHE, Isoptic characterization of a circle, (Proof of a conjecture of M.S. Klamkin), *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 45-47.
[84] E. T. QUINTO, The dependence of the generalized Radon transform on defining measures, *Trans. AMS*, **257** (1980), 331-346.
[85] E. T. QUINTO, Null spaces and ranges for the classical and spherical Radon transforms, *J. Math. Anal. Appl.*, **90** (1982), 408–420.
[86] E. T. QUINTO, The invertibility of rotation invariant Radon transforms, *Math. Anal. Appl.*, **91** (1983), 510–522!!!.
[87] E. T. QUINTO, The invertibility of rotation invariant transforms, *J. Math. Anal. Appl.*, **91** (1983), 510–522!!!.
[88] E. T. QUINTO, Singular value decompositions and inversion methods for the exterior Radon transform and a spherical transform, *J. Math. Anal. Appl.*, **95** (1983), 437–448.
[89] J. RADON, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig – Math-Nat. kl.*, **69** (1917), 262–277.
[90] H. REINCHARDT, Bestätigung einer Vermutung von Fejes Tóth, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **15** (1970), 1513–1518.
[91] C. A. ROGERS, An equichordal problem, *Geom. Dedicata*, **10** (1981), 73–78.
[92] V. G. ROMANOV, *Integral geometry and inverse problems for hyperbolic equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
[93] L.A. SANTALÓ, *Integral geometry and geometric probability*, Addison-Wesley, New York, 1976.
[94] R. SCHNEIDER, Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres, *J. of Math. Anal. and Appl.*, **26** (1969), 381–384.
[95] R.T. SEELEY, Spherical harmonics, *Amer. Math. Monthly*, **73** (1966), 115–121.
[96] V. I. SEMYANISTYI, Homogeneous functions and some problems of integral geometry in spaces of constant curvature, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 59–62.
[97] L. A. SHEPP and J. B. KRUSKAL, Computerized tomography: the new medical X-ray technology, *Amer. Math. Monthly*, **85** (1978), 420–439.
[98] D. C. SOLMON, The $X - ray$ transform, *J. Math. Anal. Appl.*, **56** (1976), 61–83.
[99] D. C. SOLMON, Asymptotic formulas for the dual Radon transform and applications, *Math. Z.*, **195** (1987), 321–343.
[100] R. S. STRICHARTZ, L^p estimates for Radon transforms in Euclidean and non-Euclidean spaces, *Duke Math. J.*, **48** (1981), 699–727.
[101] R. S. STRICHARTZ, Radon inversion – variations on a theme, *Amer. Math. Monthly*, **89** (1982), 377–384.
[102] Z. I. SZABÓ, Hilbert's fourth problem I., *Adv. in Math.*, **59** (1986), 185–301.
[103] O. TRETIAK and C. METZ, The exponential Radon transform, *SIAM J. Appl. Math.*, **39** (1980), 341–354.
[104] F. G. TRICOMI, *Integral equations*, Interscience, 1957.

[105] H. K. Tuy, An inversion formula for cone-beam reconstruction, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 546–552.
[106] A. Volčič, A tree-point solution to Hammer's X-ray problem, *J. London Math. Soc.*, **34** (1986), 349-359.
[107] K. Yanagihara, On a characteristic property of the circle and the sphere, *Tôhoku Math. J.*, **10** (1916), 142-143.

Kurusa Á., JATE TTK Bolyai Intézet, Geometriai tanszék, Szeged, Aradi vértanúk tere 1., 6720; *e-mail*: kurusa@math.u-szeged.hu