

Korrekciók és kiegészítések a 'Bevezetés a geometriába' című könyvhöz

KURUSA ÁRPÁD

Kivonat. Sajnos minden könyvben vannak hibák és hiányosságok, akármennyire gondos is az előállítás, hiszen — bár ez elvi ellentmondásnak tűnik egy véges sok karaktert tartalmazó könyvben :-) – hiba és kiegészíteni való minden javítás után marad minden könyvben.

Ebben a dokumentumban az eddig felfedezett hibák és hiányosságok, valamint kiegészítések vannak.

Kérem, hogy aki bármely súlyosságú további hibát is talál e könyvben, azt jelezze a kurusa@math.u-szeged.hu elektronikus levelezési címemre.

1. Korrekciók

A hiba helyét egy a^b vagy a_b alakú koordináta adja meg, melyek jelentése:

$$\begin{cases} a^b, & \text{az } a \text{ sorszámú oldalon felülről sorban a } b\text{-edik sorban,} \\ a_b, & \text{az } a \text{ sorszámú oldalon alulról sorban a } b\text{-edik sorban.} \end{cases}$$

Régebbi adatokkal való kompatibilitás érdekében $b < 0$ esetén $a^b := a_{-b}$.

hely hiba → javítása

ii¹³ rajzolja → rajzolta

3²⁴ ;? → ;

2¹⁹ ellentmondásmentesség → ellentmondás-mentesség (*végig*)

7⁻³ AC és BD → BC és DA

10¹ nyitot → nyitott

10²¹ hogy amennyiben a → hogy a

13¹¹ Kongruencia tétel
→ Kongruencia-tétel

13¹² $(P', Q) \rightarrow (P', Q')$

13¹⁷ kongruencia tétel
→ kongruencia-tétel

16⁹ kívüli → kívül

16⁻¹⁶ az PQ egyenes → a PQ egyenes

20⁻⁶ L az pont → L az a pont

21⁻² tétele mindkét → tétele miatt mindkét

23⁻¹ egyenes párhuzamosak → egyenes párhuzamos

24¹³ szorzási → szorzás

25¹² az $Q \mapsto \rightarrow$ a $Q \mapsto$

27¹⁴ az $T_O \mathfrak{S} \rightarrow$ a $T_O \mathfrak{S}$

27⁻¹² az $T_O \mathfrak{S} \rightarrow$ a $T_O \mathfrak{S}$

29⁻¹⁰ A e tétel → E tétel

35⁵ az $T_O \mathfrak{S} \rightarrow$ a $T_O \mathfrak{S}$

- 36**² az $\psi(O) \rightarrow a \psi(O)$
36⁵ osztóviszony tartó $\rightarrow$ osztóviszonyt tartó
36⁸ valamint egy tetszőleges a képtér $\rightarrow$ valamint a képtér
39²² centrális $\rightarrow$ centrálisan
39⁻⁹ sajátértékének $\rightarrow$ sajátértékeinek
40⁻⁸ inverzük $\rightarrow$ inverzeik
40⁻⁸ alakúak, $\rightarrow$ alakúak.
41⁻⁹ az $T_O\mathfrak{S} \rightarrow a T_O\mathfrak{S}$
43¹² megadja és $\rightarrow$ megadja, és
43¹³ teljesülnek $\rightarrow$ teljesül
46¹³ mindegyik $\rightarrow$ mindegyike
46⁻⁷ minden a nyitott $\rightarrow$ minden nyitott
49⁻¹³ ekvivalencia reláció $\rightarrow$ ekvivalenciareláció
47⁻⁹ esik $\rightarrow$ essen
47⁻⁵ lépésről-lépésre $\rightarrow$ lépésről lépésre
50⁵ átmegy $\rightarrow$ átmenne
51¹³ ekvivalencia reláció $\rightarrow$ ekvivalenciareláció
51⁻¹² paritáruk $\rightarrow$ paritásuk
52⁻¹⁵ végezzük a $\rightarrow$ végezzük, a
53¹⁵ a $\overline{X_{i_1} X_{i_2}} \rightarrow$ az $\overline{X_{i_1} X_{i_2}}$
53⁻¹¹ Pasch axióma $\rightarrow$ Pasch-axióma
54¹² poligonok, a $\rightarrow$ poligonok a
55² eső pontja $\rightarrow$ eső, pontja
56⁷ mert, ha $\rightarrow$ mert ha
56⁹ metszheti $\rightarrow$ metszhetné
58³ $\rightarrow \backslash \text{section}\{\text{Euklidészi metrika}\}$
58⁻⁷ t_2 és $\rightarrow t_2$ és
58⁻³ $d(P, Q)+ \rightarrow (d(P, Q)+$
59^{fej1.} 1.6 Törött ... $\rightarrow$ 2.1 Euklidészi metrika (61 és 63 oldalon is)
60¹⁰ E és F helyett rendre E_g és F_g
62⁻⁵ merőlegessége $\rightarrow$ merőleges
64⁴ az „csak akkor” $\rightarrow$ a „csak akkor”
64⁵ a „akkor” $\rightarrow$ az „akkor”
65⁻⁹ belátáshoz $\rightarrow$ belátásához
69¹ Vegyük $\rightarrow$ Vegyünk
69⁻¹³ merőlegek $\rightarrow$ merőlegesek
69⁻¹² az $T_O\mathfrak{S} \rightarrow a T_O\mathfrak{S}$
69⁻¹¹ irányvektora $n \rightarrow$ irányvektora, n
69⁻⁵ tükrözések $\rightarrow$ tükrözések.
70⁻¹² hagyja miközben $\rightarrow$ hagyja, miközben
71⁷ hagyja miközben $\rightarrow$ hagyja, miközben
71¹⁴ izometria, minden $\rightarrow$ izometria minden
72¹⁴ Fixpont tételek $\rightarrow$ Fixpont-tételek
73⁶ vagy a $\rightarrow$ vagy
73⁻¹² akkor előbbi $\rightarrow$ akkor az előbbi
73⁻¹⁰ másrészt $\rightarrow$ másfelől
74⁻⁶ amelyre $\rightarrow$ amelyekre
75¹ igazolásához, legyen $\rightarrow$ igazolásához legyen
77⁻¹¹ az tételt $\rightarrow$ a tételt
77⁻⁵ típusai $\rightarrow$ típusa
79⁸ eljárni $\rightarrow$ eljárni.
79¹³ identikus $\rightarrow$ identitás
79¹⁴ szorzata. $\rightarrow$ szorzataként.
79¹⁶ szorzatára $\rightarrow$ szorzata
87² vannak a $\rightarrow$ vannak, a
89⁹ ábrában $h_+ \rightarrow c_+$
92⁴ , mondjuk, $\rightarrow$, mondjuk
96⁴ vannak elrendezve $\rightarrow$ helyezkednek el
96⁻¹ valamint szigorúan monoton $\rightarrow$ *törlendő*

- 98¹⁷ u pedig $\rightarrow v$ pedig
 99⁻⁷ $A, B, C \rightarrow ABC$
 100¹ $A, B, C \rightarrow ABC$
 102⁻¹⁵ külön külön $\rightarrow$ külön-külön
 108⁸ egy olyan ugyanolyan $\rightarrow$ egy ugyanolyan
 109⁻¹⁴ (-1) -szeresét $\rightarrow (-1)$ -szeresére
 111⁻¹⁴ tekintsünk $\rightarrow$ tekintsük
 113² kapcsolatok, $\rightarrow$ kapcsolatokat,
 115⁻¹⁶ Gallai-Sylvester tétel $\rightarrow$ Gallai-Sylvester-tétel
 115⁻⁷ a Q pont $\rightarrow$ a $P_i^\perp$ pont *ezután az egész bizonyításban Q helyett $P_i^\perp$ használandó — az ábrában is*
 118⁻¹ tükrözése $\rightarrow$ tükrözésének
 120² homotécia, és $\rightarrow$ homotécia és
 122⁷ hogy $\rightarrow$ ha
 122¹⁰ háromszögekben $\rightarrow$ háromszögben
 122¹⁰ lévő, $\triangleleft \rightarrow$ lévő $\triangleleft$
 123⁹ a $(A_1 \rightarrow$ az $(A_1$
 125¹⁸ metszéspontja, mint $\rightarrow$ metszés-pontja mint
 125²⁵ egymás. $\rightarrow$ egymást.
 128² több mint $\rightarrow$ több, mint
 128¹³ pontthalmazt, másodrendű $\rightarrow$ pontthalmazt másodrendű
 134¹³ pontthalmaz, a $\rightarrow$ pontthalmaz a
 135³ *ez a tétel és bizonyítása a 133. oldali első tétel után kellene következzen*
 135¹⁰ a $y^2 \rightarrow$ az y^2
 137⁸ az $t \rightarrow$ a t
 137⁻⁰ első két ábrában $S \rightarrow \mathcal{S}$
 138⁻¹⁰ baloldali ábrában $\rightarrow \overline{A_1T}, \overline{YT}, \overline{XT}$ és $\overline{XY}$ pirossal
 138⁻⁸ a $\mathcal{S}_i \rightarrow$ az $\mathcal{S}_i$
 139¹ alap-síkkal $\rightarrow$ síkkal
 139¹³ metszi $\rightarrow$ metsz
 141⁰ baloldali ábrán $\rightarrow F_2$ feljebb, X jobbra, A_1 jobbra fel, A_2 balra fel, $\mathcal{K}_1$ le, $\mathcal{S}$ balra
 141⁻¹ Tehát, a $\rightarrow$ Tehát a
 142⁻⁸ kúpszeletet $\rightarrow$ kúpszeletnek
 142⁻¹² pontjának $\rightarrow$ pontjainak
 144¹ mondjuk, az $\rightarrow$ mondjuk az
 144¹² eredménye, $\rightarrow$ eredménye.
 144¹³ *teljes sor $\rightarrow$ törlendő*
 146¹² egyenlőszárú $\rightarrow$ egyenlő szárú
 147⁷ kisebb mint $\rightarrow$ kisebb, mint
 147⁻⁷ kör pontosan $\rightarrow$ kör, a szakasz végpontjaitól eltekintve, pontosan
 147⁻⁶ szakasz két végpontja derékszög $\rightarrow$ szakasz derékszög
 148⁻¹⁵ hiszen $\rightarrow$ hiszen az $A' = CD \cap BB'$ pontra
 148⁻¹⁴ helyette: $\frac{d(A',C)}{d(C,B)} = \frac{d(A',P)}{d(P,B'')} = \frac{d(A',P)}{d(P,B)} = \frac{d(A',P)}{d(B',P)} = \frac{d(A',D)}{d(D,B)}$
 148⁻¹³ Ezzel $\rightarrow$ Eszerint $\frac{d(A',C)}{d(C,B)} = \frac{d(D,C)}{d(D,B)-d(C,B)} = \frac{d(A,C)}{d(C,B)}$, amivel
 148⁻¹³ bizonyítottuk, a $\rightarrow$ bizonyítottuk. A
 149¹¹ kör melyek $\rightarrow$ kör, melyek
 149¹⁴ kör melyek $\rightarrow$ kör, melyek
 152²⁻³ így téglalap $\rightarrow$ így a téglalap
 154⁻⁷ érintőket és a $\rightarrow$ érintőket, a
 154⁻⁷ szögét mindig $\rightarrow$ szögét pedig mindig
 154⁻⁶ meg. Az $\rightarrow$ meg, ezért az
 154⁻⁵ a tételt bizonyítja $\rightarrow$ bizonyítja a tételt
 155⁻¹² az $\Phi \rightarrow$ a Φ
 155⁻⁹ az $\Phi \rightarrow$ a Φ

- 155**⁻⁶ az $\Phi \rightarrow a \Phi$
155⁻³ $\Phi \rightarrow \Phi$.
156¹ Az $\Phi \rightarrow A \Phi$
157¹⁰ ponto $\rightarrow$ pontot
157¹³ oldalal $\rightarrow$ oldalak
157⁻⁹ állítunk $\rightarrow$ állítjuk
157⁻³ nevezzük $\rightarrow$ nevezünk
158⁻¹⁵ hasonlóan $\rightarrow$ hasonló
158⁻¹³ végetlen $\rightarrow$ végtelen
160¹² a $\mathcal{I} \rightarrow$ az $\mathcal{I}$
161¹² az $\Phi \rightarrow a \Phi$
167¹² ponton. $\rightarrow$ pontra.
171⁻⁴ $ABB'B \rightarrow ABB'A'$
171⁻¹ $ABB'B \rightarrow ABB'A'$
172² $ABB'B \rightarrow ABB'A'$
172⁴ $ABB'B \rightarrow ABB'A'$
175¹⁵ ami $\rightarrow$ amit
180¹⁷ merőlegesnek, irányvektoraik $\rightarrow$
 merőlegesnek, ha irányvektoraik
181¹³ fixponttétel $\rightarrow$ fixpont-tétel
186¹⁰ fixponttételek $\rightarrow$ fixpont-tételek
191¹¹ 0-dimenziósnek $\rightarrow$ 0-dimenziós
191⁻¹² (1-dimenziós lapnak) $\rightarrow$ 1-di-
 menziós lapnak
192¹ reláció, és ha $\rightarrow$ reláció. Ha
192¹ Lásd a 2.1 állítást.
193⁷ másodikban $\rightarrow$ másodikba
196¹² azoban $\rightarrow$ azonban
196⁻⁸ ketté vágunk $\rightarrow$ kettévágunk
202¹³ többszöröse $\rightarrow$ többszöröse
202¹³ bizonyítás. $\rightarrow$ bizonyítása.
217⁻³ belsején $\rightarrow$ relatív belsején
218⁶ sem nem $\rightarrow$ sem
220⁻¹⁰ belseje. $\rightarrow$ relatív belseje.
223⁵ $\rightarrow$ \section{Metrikus affin geo-
 metriák transzformációi}
225^{fejl.} 5.3 Konvex ... $\rightarrow$ 6.1 Metrikus
 affin geometriák transzformációi
230⁵ E és F helyett rendre E_g és F_g
236⁻¹⁷ nem más mint $\rightarrow$ nem más, mint
237⁵ Minkowski-féle $\rightarrow$ Minkowski-
 féle.
238⁻¹⁷ euklidészi és $\rightarrow$ euklidészi, és
238⁻¹⁴ euklidészi és $\rightarrow$ euklidészi, és
238⁻¹³ Gram-Schmidt eljárásnak $\rightarrow$
 Gram-Schmidt-eljárásnak
240³ általánosabba $\rightarrow$ általánosabb
242⁻⁷ következik, ami vagyis $\rightarrow$ követ-
 kezik, vagyis
249¹¹ van. $\rightarrow$ vannak.
264⁻⁴ szubaditivitás $\rightarrow$ szubadditivi-
 tás
266⁻⁹ Gram-Schmidt eljárás $\rightarrow$
 Gram-Schmidt-eljárás
274⁻⁹ terület és $\rightarrow$ terület- és
283¹⁰ Hahn-Banach tétel $\rightarrow$ Hahn-
 Banach-tétel
283¹⁴ egy egy $\rightarrow$ egy-egy
283¹⁵ K pont : $\rightarrow K$:
284⁻⁴ görbe $\rightarrow$ görbét
294⁸ logaritmus függvény $\rightarrow$ expo-
 nenciális függvény
304⁹ Dedekind axióma $\rightarrow$ Dedekind-
 axióma
305^{9,10} metsző $\sim$, 3 $\rightarrow$ metsző $\sim$, 3, 168
305^{10,11} metsző $\sim$, 3 $\rightarrow$ metsző $\sim$, 3, 168
305^{12,13} normálisa, 30 $\rightarrow$ normálisa, 30,
 62
305⁻⁸ ellentmondásmentesség $\rightarrow$
 ellentmondás-mentesség (*végig*)
306⁻¹⁹ típusú, 235 $\rightarrow$ gömbszerű, 235
306⁻¹² Hahn-Banach tétel $\rightarrow$ Hahn-
 Banach-tétel
306⁻⁶ egyenlőszárú $\rightarrow$ egyenlő szárú
 (*végig*)
306⁻⁵ egyenlőoldalu $\rightarrow$ egyenlő oldalú

- (végig és előbbi elé) 310⁶ szabadszögé → szabad szögé
 309⁻¹¹ beszúrni: relatív belső (végig és előbbi elé)
 310⁵ szabadvektoré → szabad vektoré 311⁵ félter → féltér
 ré (végig)

A fentieket magam és segítőkész emberek találták. Köszönöm nekik, hogy nem csak felfedezték, de meg is írták nekem a hibákat.

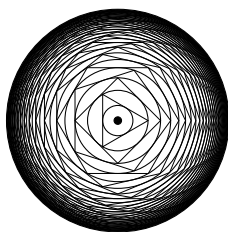
2. Pótlások

2.1. Állítás. (192¹) *Ha egyetlen él sincs befestve, akkor az összes lap ismerős az összes többi lappal.*

Bizonyítás. Vegyük a tetszőleges 3-dimenziós $\mathcal{P}$ politóp bármely két lapját, ezeken pedig egy-egy, egymástól különböző P_1 és P_2 pontot. Ez a két pont és a politóp egy belső pontja együtt meghatároz egy $\mathcal{S}$ síkot. Ez a sík egy 2-dimenziós $\mathcal{P}'$ poligonban metszi a $\mathcal{P}$ politópot. A $\mathcal{P}'$ poligon élei összekötik a P_1 és P_2 pontot és végig a $\mathcal{P}$ politóp lapjain haladnak. Ez bizonyítja az állítást. ■

3. Kiegészítések

3.1. Címlapi ábra



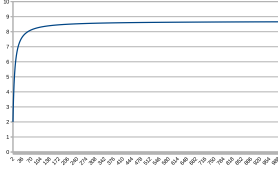
A könyv címlapján szereplő ábra egy origó középpontú egységnyi sugarú kör köré rajzolt szabályos háromszögből induló rekurzív rajzolás eredménye. Minden lépésben az utoljára megkapott szabályos n -szög körülírt köre köré egy szabályos $(n+1)$ -szöget rajzolunk úgy, hogy egyik csúcsa az x -tengelyre esik. Az ábra alapján indokolt az a feltételezés, hogy akármeddig is folytatjuk a rajzolást, a megrajzolt körök sugara

nem lép túl egy véges határt.

Most azt fogjuk bizonyítani, hogy minden kör sugara kisebb mint kilenc.

Ha az n -szög körüli kör sugara ϱ_{n-1} , akkor $\varrho_{n-1} = \varrho_n \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right)$. Eszerint a $\varrho_2 := 1$ meghatározást elfogadva

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_n} = \frac{\varrho_2}{\varrho_3} \frac{\varrho_3}{\varrho_4} \dots \frac{\varrho_{n-1}}{\varrho_n} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} \dots \cos \frac{\pi}{n}, \quad \text{vagyis} \quad \varrho_n = \left(\prod_{k=3}^n \cos \left(\frac{\pi}{k} \right) \right)^{-1}.$$



Az világos, hogy a ϱ_n sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért a $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n$ létezéséhez elég igazolni, hogy a ϱ_n sorozat korlátos.

Akár táblázatkezelővel is kivitelezhető kalkuláció azt mutatja, hogy ϱ_n értékei sosem érik el a 9-et. Most ezt fogjuk bizonyítani. Világos, hogy

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{2},$$

amelyből

$$\frac{1}{\cos(\pi/k)} < \frac{1}{1 - \frac{(\pi/k)^2}{2}} = \frac{2}{2 - (\pi/k)^2} = \frac{2k^2}{2k^2 - \pi^2} = 1 + \frac{\pi^2}{2k^2 - \pi^2}$$

következik. Ezt a korábbi formulánkkal összevetve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n < \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{\pi^2}{2k^2 - \pi^2}\right)}{\prod_{k=3}^m \cos(\pi/k)}$$

adódik minden $m \geq 3$ természetes számra. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{\pi^2}{2k^2 - \pi^2}\right) &\leq \exp\left(\sum_{k=m+1}^n \frac{\pi^2}{2k^2 - \pi^2}\right) \leq \exp\left(\sum_{k=m+1}^n \frac{\pi^2/2}{k^2 - 3^2}\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{\pi^2}{12} \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{k-3} - \frac{1}{k+3}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\pi^2}{12} \left(\sum_{k=m+1}^{m+6} \frac{1}{k-3}\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\pi^2}{2} \frac{1}{m-2}\right). \end{aligned}$$

Az $m = 172$ esetben egy táblázatkezelővel kiszámítható, hogy $\prod_{k=3}^m \cos^{-1}(\pi/k) < 8,46$ és $\exp\left(\frac{\pi^2}{2} \frac{1}{m-2}\right) < 1,061$. Eszerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n < 8,46 \cdot 1,061 = 8.97606 < 9,$$

amely igazolja állításunkat. Precízebb számolás azt mutatja, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n$ értéke nagyjából 8,6989 és 8,699 között van.

3.2. Konvex halmazok elválasztása

Bár a könyvben közölt Hahn–Banach-tétel a létező legeléesebb feltételek mellett biztosítja a konvex halmazok elválasztását, az általunk vizsgált véges dimenziós

esetben geometriai bizonyítás is létezik, mely eszerint úgy is felfogható, mint a Hahn–Banach-tétel egy bizonyítása véges dimenziós térben.

Egy halmazt *zárt*nak nevezünk, ha az elemeiből képzett bármely konvergens sorozat határértéke is a halmazhoz tartozik. Egy halmaz *lezártjának* mondjuk azon pontok halmazát, melyek az elemeiből képzett valamely konvergens sorozat határértékei. Egy $\mathcal{H}$ halmaz lezártját $\overline{\mathcal{H}}$ jelöli.

Világos, hogy konvex halmaz lezártja is konvex, hiszen ha $\mathcal{K}$ egy konvex halmaz és $\bar{K}^\infty, \tilde{K}^\infty \in \bar{\mathcal{K}}$, akkor léteznek rendre ezekhez konvergáló $\bar{K}^i$ és $\tilde{K}^j$ konvergens pontsorozatok a $\mathcal{K}$ halmazban, melyekre tetszőleges $\lambda \in [0, 1]$ esetén a $K_O^k = \lambda \bar{K}_O^k + (1 - \lambda) \tilde{K}_O^k$ által adott K^k sorozat elemei is a $\mathcal{K}$ halmazban vannak, és konvergálnak a $K_O^\infty = \lambda \bar{K}_O^\infty + (1 - \lambda) \tilde{K}_O^\infty$ által adott K^∞ ponthoz, mely a konvergencia miatt $\bar{\mathcal{K}}$ eleme.

3.1. Tétel. *Ha két nem üres konvex halmaz metszete üres, akkor létezik olyan hipersík, melynek egyik zárt féltére az egyik, másik zárt féltére pedig a másik konvex halmazt tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyenek adottak a nem üres, idegen $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ konvex ponthalmazok.

Legyen $\mathcal{K} := \{K : K_O = X_O - Y_O, X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}$. Ez egy konvex halmaz, hiszen tetszőleges $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén

$$\begin{aligned} \lambda K_O + (1 - \lambda) K'_O &= \lambda(X_O - Y_O) + (1 - \lambda)(X'_O - Y'_O) \\ &= (\lambda X_O + (1 - \lambda) X'_O) - (\lambda Y_O + (1 - \lambda) Y'_O). \end{aligned}$$

Világos, hogy $O \notin \mathcal{K}$, hiszen $O_O = X_O - Y_O$ esetén $X = Y$ következne.

Tegyük fel először, hogy $O \notin \bar{\mathcal{K}}$. Ekkor az **F.6** szakasz első tétele értelmében van olyan $\mathcal{H}$ hipersík, amely elválasztja az O pontot és a $\bar{\mathcal{K}}$ konvex zárt halmazt.

Most azt tegyük fel, hogy $O \in \bar{\mathcal{K}}$. Ekkor $O \in \partial\mathcal{K} = \bar{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{K}$, amiért minden $i \in \mathbb{N}$ számhoz van olyan $P_i \notin \bar{\mathcal{K}}$ pont, melyre $d(O, P_i) < 1/i$. Az **F.6** szakasz első tétele értelmében tehát van olyan $\mathcal{H}_i$ hipersík, amely elválasztja a P_i pontot és a $\bar{\mathcal{K}}$ konvex zárt halmazt. A $\mathcal{H}_i$ hipersíkok $\mathbf{n}_i$ egységnyi normálisainak végpontjai a kompakt egységgömb-felületen helyezkednek el, ezért van olyan végtelen $\mathbf{n}_{i_j}$ részsorozat, amely konvergens valamely $\mathbf{n}$ egységvektorhoz. Legyen $\mathcal{H}$ az az O pontot tartalmazó hipersík, melynek $\mathbf{n}$ egy normálisa.

Ha a $\hat{K}, \tilde{K} \in \bar{\mathcal{K}}$ pontok a $\mathcal{H}$ két különböző nyílt féltérében vannak, akkor elég nagy $j \in \mathbb{N}$ számra a $\mathcal{H}_{i_j}$ hipersíknak is különböző nyílt féltéréibe esnek, ami ellentmondás. Ez igazolja, hogy a $\mathcal{H}$ hipersík olyan, hogy egyik zárt féltérében tartalmazza a $\bar{\mathcal{K}}$ konvex zárt halmazt.

Összefoglalva: van olyan $\mathcal{H}$ hipersík, mely egyik $\mathcal{H}^+$ zárt féltérében tartalmazza a $\bar{\mathcal{K}}$ konvex zárt halmazt, másik $\mathcal{H}^-$ zárt féltérében pedig az O pontot.

Legyen $\mathbf{n}$ a $\mathcal{H}$ hipersíknak az az egységnyi normálisa, mely a $\mathcal{H}^+$ féltérbe mutat. Ekkor $\{\langle K_O, \mathbf{n}_O \rangle : K_O = X_O - Y_O, X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\} \geq 0$, amiért $\langle X_O, \mathbf{n}_O \rangle \geq \langle Y_O, \mathbf{n}_O \rangle$ minden $X \in \mathcal{X}$ és $Y \in \mathcal{Y}$ pontra. Minthogy ezen egyenlőtlenség mindkét oldala a másik egy-egy véges értéke által korlátozott, a bal oldal alsó és a jobboldal felső határa véges egy-egy véges szám, melyekre $\inf_{X \in \mathcal{X}} \langle X_O, \mathbf{n}_O \rangle \geq \sup_{Y \in \mathcal{Y}} \langle Y_O, \mathbf{n}_O \rangle$. Legyen κ ezen számok átlaga.

Az a $\tilde{\mathcal{H}}$ hipersík, mely átmegy a $\kappa \mathbf{n}_O$ végpontján és párhuzamos a $\mathcal{H}$ hipersíkkal, nyilván olyan, melynek létét a tétel állítja. ■

Ha a 3.1 tételben az egyik konvex halmaz nyitott, akkor a bizonyításban szereplő $\mathcal{K}$ halmaz is nyitott, így a bizonyításban adódó $\mathcal{H}$ hipersík ugyan továbbra is tartalmazhatja az O pontot, de $\mathcal{K}$ teljes egészében a $\mathcal{H}$ hipersík egyik nyílt féltérfébe esik. Ebből adódik a Hahn–Banach-tétel könyvben (283. oldalon) megadott geometriai alakja.

KURUSA Á., Szegedi Tudományegyetem TTIK, Bolyai Intézet, Geometriai Tanszék Szeged, Aradi vértanúk tere 1 *e-mail*: kurusa@math.u-szeged.hu