

Röntgen-transzformációk azonosítása: projektív metrikák határmetrika-merevsége

Kurusa Árpád

<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

<http://www.math.u-szeged.hu/>

Debreceni Egyetem TTK Matematikai Intézet Geometria Tanszéki Szeminárium 2019. október 18. 10:30.

A következő projektek támogatták ezt a munkát is: K 116451, KH_18 129630, és 20391-3/2018/FEKUSTRAT.

Az animációk megtekintéséhez [Adobe PDF Reader](#) szükséges.

Általánosított Radon-transzformációk definíciója

Minden $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén legyen S_w az $\mathbb{R}^n$ -beli $S_{w,t}$ hiperfelületek sokasága, ahol és $t \in [0, \infty)$.

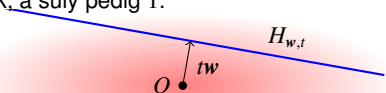
A minden $S_{w,t}$ hiperfelületen integrálható $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeken értelmezett $R_{S,\mu}$ **Radon-transzformációt**

$$(1.1) \quad R_{S,\mu} f(w, t) = \int_{S_{w,t}} f(x) \mu_{w,t}(x) dx$$

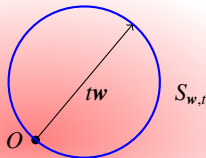
definiálja, ahol dx az $S_{w,t}$ természetes fel-szín-mértéke, $\mu_{w,t}: S_{w,t} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan pozitív folytonos függvény, amely a w és t folytonos függvénye.

Ebben a definícióban az $S_{w,t}$ hiperfelületeket **szíromnak**, az $S = \bigcup_{w \in \mathbb{S}^{n-1}} S_w$ sokaságukat **virágnak** a szírmokon adott $\mu_{w,t}$ függvényeket **súlynak** nevezzük.

A “klasszikus” Radon-transzformáció éppen $R_{\mathcal{H},1}$, ahol a $\mathcal{H} = \{H_{w,t} : w \in \mathbb{S}^{n-1}, t \in [0, \infty)\}$ virág szirmai a $H_{w,t} = \{x : \langle x, w \rangle = t\}$ hiper-síkok, a súly pedig 1.



A “duális” Radon-transzformáció (bumeráng!) $R_{S,1}$, ahol a $S = \{S_{w,t} : w \in \mathbb{S}^{n-1}, t \in [0, \infty)\}$ virág szirmai az $S_{w,t} = \{x : \langle tw - x, x \rangle = 0\}$ gömbfelületek, a súly pedig 1.



Karakterizálások és azonosítások

Karakterizálás invarianciákkal. **Quinto** bizonyította [22] hogy az *eltolás-invariáns* Radon-transzformációkban a súly *exponenciális*. (Kissé általánosabb: [12].) **Quinto** igazolta [23] hogy a *forgás-invariáns* Radon-transzformációkban a súly is forgás-invariáns. (Forgás-invariáns virágokra: [13].) **Hertle** karakterizálta [8] a “*klasszikus*” Radon-transzformációt mint a *folytonos, forgás-, dilatáció-, eltolás-invariáns operátor*. (Ennek más verziója: [11]).

Azonosítás képpel. **Hertle** igazolta [9] hogy a $(f, \mu) \mapsto R_{\mathcal{H}, \mu} f$ leképezés injektív a nem radiális kompakt tartójú f disztribúciókon, ha $R_{\mathcal{H}, \mu}$ *exponenciális Radon-transzformáció*. **Solmon** kis is számolta [24] a súlyt a $R_{\mathcal{H}, \mu} f$ képből.

Azonosítás Dirac-tesztel. **Natterer** [18, 19] és **Boman** [4] eredményeit általánosítva bizonyítottam [13], hogy $F(\bar{w}, r) = R_{S, \mu} f(\bar{w}, r)$ meghatározza a konform, differenciálható és nem ön-érintő S virágot, ha az ismeretlen f függvény $f = \sum_{i=1}^m \delta_{x_i} + g$ alakú, ahol $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ és δ_{x_i} a Dirac-delta az x_i pontban. Továbbá, $\mu_{w,r}(x_i)$ kiszámolható ha $x_i \in S_{w,r}$ teljesül.

Azonosítás egy méréssel [13]. Egy $R_{S, \mu}$ konform Radon-transzformáció rekonstruálható az $F = R_{S, \mu} f$ és f függvényekből, ha $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ kompakt tartójú, radiális és nincs eltűnő momentuma, valamint a virág vagy a súly ismert és szimmetrikus.

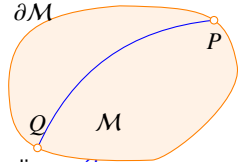
Röntgen-transzformáció azonosítása méréssel

Legyen C olyan, a kompakt összefüggő $M \subseteq \mathbb{R}^n$ tartománybeli görbék halmaza, melyek közül bármely kettő legfeljebb egy pontban metszi egymást, és bármely két $X, Y \in M$ ponthoz pontosan egy $C_{X,Y} \in C$ létezik, amely mindkét pontot tartalmazza.

Az $X_{C,\mu}$ **Röntgen-transzformáció** a C görbéin integrálható ∂M
 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az

$$(2.1) \quad X_{C,\mu} f: \partial M^2 \ni (P, Q) \mapsto X_{C,\mu} f(P, Q) = \int_{C_{P,Q}} f(x) d\mu_{P,Q}(x),$$

függvénybe képezi, ahol dx az ívhossz mérték, $\mu_{P,Q}$ pedig egy mérték a $C_{P,Q}$ görbén. Itt a görbék a **szirmok**, a C a **virág**, a $\mu_{P,Q}$ pedig a **súly**.



Azonosítás. **Mukhometov** bizonyította [16, 17], hogy az $X_{C,1}$ függvény meghatározza a virágot, ha a szirmok egy az Euklidészi metrikával konform Riemann-metrika geodetikusai.

Ezt **Michel, Uhlman és tsai** általánosították határral rendelkező Riemann-sokaságokra [15, 20, 25], stb., de a konformitás nélkül csak diffeomorfizmusoktól eltekintve van merevség. Fontolgatva ezen eredményeket felmerül az érzés, hogy a szirmok rendszere nagyobb szerepet játszhat, mint azt a differenciálhatóság engedi látni. Ez motiválta **projektív metrikák határmetrikájának** vizsgálatát [14], ahol a szirmok, vagyis a geodetikusok ismertek ugyan, de nincs differenciálhatósági feltétel csak folytonosság.

A következő kiterjesztési és unicitási tételek **Ódor Tiborral** közös munkánk eredményei.

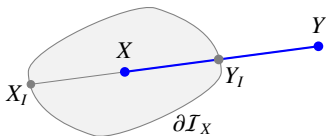
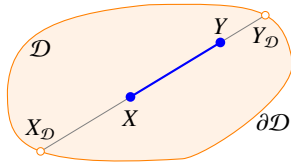
Az euklidészi tér valamely kompakt¹ konvex $\mathcal{M}$ tartományán adott folytonos metrika **projektív**, ha pontosan az $\partial\mathcal{M}$ húrjai a geodetikusai.

Íme két metrika, amelyek értelmezési tartományuk kompakt tartományain projektívek.

Hilbert-metrika. $d_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definíciója

$$d_{\mathcal{D}}(X, Y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } X = Y, \\ |\ln(X, Y; X_{\mathcal{D}}, Y_{\mathcal{D}})|/2, & \text{ha } X \neq Y, \end{cases}$$

ahol $\mathcal{D}$ az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos tartománya, és $\overline{X_{\mathcal{D}}Y_{\mathcal{D}}} = \mathcal{D} \cap XY$.



Minkowski-metrika. $d_I: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definíciója

$d_I(X, Y) = (Y, Y_I; X)$, ahol az $\mathcal{I}$ **indikátrix** az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos, centrálszimmetrikus tartománya, $\mathcal{I}_X$ az X -re szimmetrikus eltoltja, és $\overline{X_I Y_I} = \mathcal{I}_X \cap XY$.

A **Beltrami-tétel** [3] szerint, ha egy projektív metrika Riemann-féle, akkor konstans görbületű (Euklidészi, hiperbolikus vagy elliptikus). (A nem hiperbolikus Hilbert metrikák Finsler-félék!)

Hilbert IV. problémájának megoldása azt mutatja, hogy a projektív metrikák osztálya egészen hatalmas [21, 1, 2, 26], ugyanakkor a projektív metrikák a BB-konstrukcióval generálhatóak.

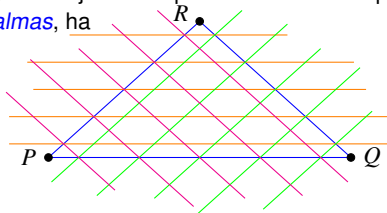
¹ Az előadás kedvéért szándékosan szigorított definíció, amely miatt az elliptikus eset is kimarad.

Projektív metrikák BB-konstrukciója I

Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathbb{R}^n$ egy konvex nem üres tartománya. Jelölje P^* a P pontot tartalmazó hiper-síkok sokaságát. Egy $\mu: 2^{\mathcal{M}^*} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérték *p-alkalmas*, ha

- 1 $\mu(P^*) = 0$ (μ *definit*),
- 2 $\mu(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^*) > 0$ (μ *pozitív*), and
- 3 $\mu(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^* \cap \bigcup_{Y \in \overline{QR}} Y^*) > 0$ (μ *szigorú*)

bármely nem kollineáris $P, Q, R \in \mathcal{M}$ pontokra.



Blaschke–Busemann-konstrukció [6]. Ha $\mu: 2^{\mathcal{M}^*} \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy *p-alkalmas mérték*, akkor a $d(P, Q) = \mu(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^*)/2$ által definiált $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény egy projektív metrika.

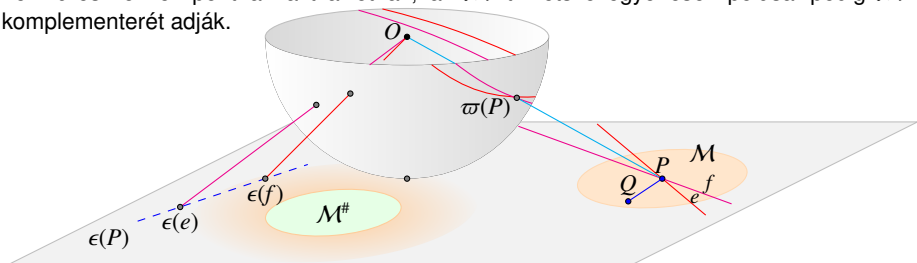
Bizonyítás. Ha $\mu: 2^{\mathcal{M}^*} \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy *p-alkalmas mérték*, akkor $d(P, Q) = \mu(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^*)/2$ pozitív és pontosan akkor nulla, ha $P \equiv Q$. Sőt,

$$\begin{aligned} 2d(P, Q) + 2d(Q, R) &= \mu\left(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^* \cup \bigcup_{Y \in \overline{QR}} Y^*\right) = \mu\left(\bigcup_{Z \in \overline{PR}} Z^*\right) + \mu(\{XY : X \in \overline{PQ} \wedge Y \in \overline{QR}\}) \\ &= 2d(P, R) + \mu\left(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^* \cap \bigcup_{Y \in \overline{QR}} Y^*\right) > 2d(P, R), \end{aligned}$$

vagyis teljesül a háromszög-egyenlőtlenség is. ■

Projektív metrikák BB-konstrukciója II

Ha ϵ egy polaritás, akkor a P ponton átmenő e egyenes $\epsilon(e)$ **pólusa** (pont) a P pont $\epsilon(P)$ **polárisára** (egyenes) esik, ezért az $\mathcal{M}$ -t elkerülő egyenesek pólusai egy $\mathcal{M}^\#$ korlátos, nyílt, nem üres konvex ponthalmazt alkotnak, az $\mathcal{M}^*$ -t metsző egyenesek pólusai pedig $\mathcal{M}^\#$ komplementerét adják.



Egy $\overline{PQ} \subset \mathcal{M}$ szakaszhoz egy olyan

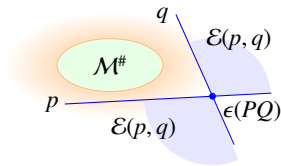
$$\epsilon(\overline{PQ}^*) = \bigcup_{X \in \overline{PQ}} \epsilon(X^*) = \bigcup_{X \in \overline{PQ}} \epsilon(X) =: \mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q))$$

kétél tartozik, melyet az $\mathcal{M}^\#$ -t elkerülő $p = \epsilon(P)$ és $q = \epsilon(Q)$ egyenesek határolnak. Emiatt

$$(3.1) \quad \mu \circ \epsilon(\mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q))) = \mu(\overline{PQ}^*),$$

ami a Blaschke–Busemann-konstrukció felől nézve éppen $d(P, Q)$.

Eszerint a $\mathcal{M}^\#$ halmazon keresünk p -alkalmas mértékeket.

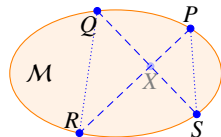


Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává I

A háromszög-egyenlőtlenség miatt, és mert bármely konvex $\square(PQRS) \subset \mathcal{M}$ négyszög $X = \overline{PR} \cap \overline{QS}$ átlós pontja az $\mathcal{M}$ -be esik, minden $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrika teljesíti a

$$(3.2) \quad d(P, R) + d(Q, S) - d(P, S) - d(Q, R) \geq 0,$$

négyszög-egyenlőtlenséget, ahol egyenlőség pontosan akkor jön létre, ha $\square(PQRS)$ egy szakasszá fajul.



Kiterjesztési tétel [14]. Ha egy folytonos, korlátos $\delta: \partial\mathcal{M} \times \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ metrika teljesíti a (3.2) négyszög-egyenlőtlenséget minden a $\partial\mathcal{M}$ -be írt nem elfajuló konvex $\square(PQRS)$ négyszögre, akkor létezik egy $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrika, melynek δ a megszorítottja.

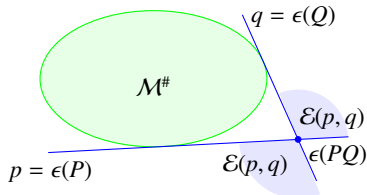
Bizonyítási vázlat. Egy olyan p-alkalmas $\mu: 2^{\mathcal{M}^*} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mértéket kell konstruálnunk, melyre $\delta(P, Q) = \mu(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^*)/2$ bármely $P, Q \in \partial\mathcal{M}$ pontokra. Ehelyett a $\mu \circ \epsilon$ mértéket fogjuk generálni a $\mathbb{P}^2$ egy ν halmazfüggvényéből.

A $\partial\mathcal{M}$ egy $\overline{PQ}$ húrjának a kétélére legyen

$$(3.3) \quad \nu(\mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q))) := \delta(P, Q).$$

A (3.1) szerint nem is lehetne másként.

Az ilyen, vagyis az $\mathcal{M}^\#$ -n kívüli, de azt az élével érintő kétéleket **támaszkétélnek** nevezzük.



Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává II

Legyen $p = AB = \epsilon(P)$, $q = BC = \epsilon(Q)$, és $r = CA = \epsilon(R)$ a $\triangle(ABC)$ oldalegyenese. Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}(p, q)$, $\mathcal{E}(q, r)$, és $\mathcal{E}(r, p)$ az $\mathcal{M}^\#$ támasza, vagyis $\triangle(ABC)$ **támaszháromszög**. Ekkor a $p \cup q \cup r$ halmazon kívül $2\chi_{\triangle(ABC)} = \chi_{\mathcal{E}(p,q)} + \chi_{\mathcal{E}(q,r)} - \chi_{\mathcal{E}(r,p)}$, amiből (3.3) adja, hogy a háromszög-egyenlőtlenség miatt nem negatív

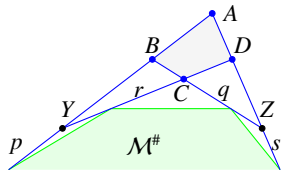
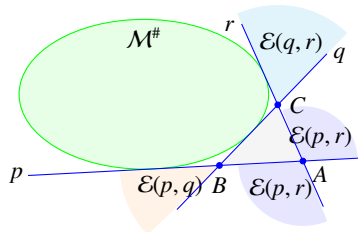
$$(3.4) \quad \nu(\triangle(ABC)) := (\delta(P, Q) + \delta(Q, R) - \delta(P, R))/2$$

kell legyen a jó definíció.

Legyen $p = AB = \epsilon(P)$, $q = BC = \epsilon(Q)$, $r = CA = \epsilon(R)$ és $s = DA = \epsilon(S)$ a konvex $\square(ABCD)$ négyszög oldalegyenese. Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}(p, q)$, $\mathcal{E}(q, r)$, $\mathcal{E}(r, s)$, és $\mathcal{E}(s, p)$ az $\partial\mathcal{M}^\#$ támasza, vagyis $\square(ABCD)$ **támasznégyszög**. Legyen $X = AC \cap BD$, $Y = p \cap r$, és $Z = q \cap s$. Mivel az $\triangle(YBC)$, $\triangle(ZDC)$, $\triangle(YAD)$, és $\triangle(ZAB)$ háromszögek $\mathcal{M}^\#$ támaszai, (3.4) adja, hogy

$$(3.5) \quad \begin{aligned} 2\nu(\square(ABCD)) &:= \nu(\triangle(YAD)) + \nu(\triangle(ZAB)) - \nu(\triangle(YBC)) - \nu(\triangle(ZCD)) \\ &= \delta(P, Q) + \delta(R, S) - \delta(R, Q) - \delta(P, S) \end{aligned}$$

kell legyen. "Szerencsére" ez is nem negatív, mert a tételnek feltétele a (3.2) négyszög-egyenlőtlenség.



Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává III

Legyen Q az $\mathcal{M}^\#$ támasznégyszögeinek halmaza, R pedig az ezt tartalmazó legszűkebb félgűrű. Ekkor R minden eleme olyan páronként idegen poligonok uniója, melyek minden oldalegyenese az $\mathcal{M}^\#$ támasza: **támaszpoligon**.

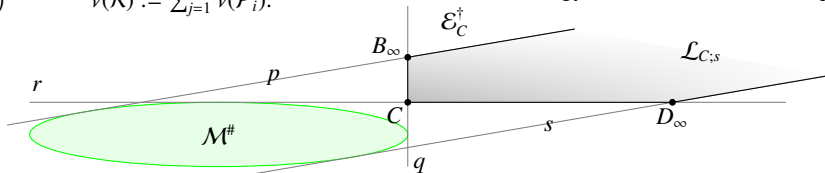
Ha $\mathcal{P} \in R$ egy támaszpoligon, akkor oldalegyenesei véges sok páronként idegen $Q_i \in Q$ ($i = 1, \dots, n$) támasznégyszögre vágják fel, ezért definiáljuk ν -t úgy, hogy legyen

$$(3.6) \quad \nu(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n \nu(Q_i).$$

Minden $\mathcal{R} \in R$ halmaz ilyen páronként idegen $\mathcal{P}_j \in R$ ($j = 1, \dots, \ell$) támaszpoligonok uniója, ezért definiáljuk ν -t úgy, hogy legyen

$$(3.7) \quad \nu(\mathcal{R}) := \sum_{j=1}^{\ell} \nu(\mathcal{P}_j).$$

Egy $C \notin \mathcal{M}^\#$ ponton át az $\mathcal{M}^\#$ kettő támaszegyenese r and q . Az $\mathcal{M}^\#$ az ezek által adott kétélek egyikében van, mondjuk ez $\mathcal{E}_C$. Legyen $\mathcal{E}_C^\dagger$ az $\mathcal{E}_C$ azon síknegyede amelynek nem része $\mathcal{M}^\#$. Legyen s az $\mathcal{M}^\#$ olyan érintője, amelynek C és $\mathcal{M}^\#$ egy oldalára esik. Legyen $p \parallel s \neq p$ is az $\mathcal{M}^\#$ érintője. Legyen az $\mathcal{L}_{C;s}$ **csúcsos sáv** az s és p közti sáv és $\mathcal{E}_C^\dagger$ metszete. Legyen $D_\infty = r \cap s$ és $B_\infty = q \cap p$.



Állítjuk, hogy $\nu_{C;s} := \nu|_{R_{C;s}}$, ahol $R_{C;s} = \{\mathcal{R} : R \ni \mathcal{R} \subset \mathcal{L}_{C;s}\}$, mértékké terjeszthető $\mathcal{L}_{C;s}$ -re.

Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává IV

Csak a $\nu_{C;s}$ halmaz-függvény σ -végességét kell igazolni, mert nyilván additív és σ -szubadditív.

Legyenek a $D_i \in \overline{CD_\infty}$ és $B_i \in \overline{CB_\infty}$ ($i = 1, \dots, \infty$) pontok olyanok, hogy rendre $\overrightarrow{CD_\infty} = i\overrightarrow{D_iD_\infty}$ és $\overrightarrow{CB_\infty} = i\overrightarrow{B_iB_\infty}$.

Legyen $s_i = \epsilon(S_i)$ és $p_i = \epsilon(P_i)$ az $\mathcal{M}^\#$ olyan érintője, melyre rendre $D_i \in s_i \neq r$ és $B_i \in p_i \neq q$. Ha ezek metszéspontja $A_i = p_i \cap s_i$, akkor $\bigcup_{i=1}^k \square(A_i B_i C D_i) = \square(A_k B_k C D_k)$ és $\bigcup_{i=1}^\infty \square(A_i B_i C D_i) = \mathcal{L}_{C;s}$. Eszerint

$$2\nu_{C;s}(\mathcal{L}_{C;s}) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{C;s}(\square(A_k B_k C D_k)) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(\square(A_k B_k C D_k))$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta(P_i, R) + \delta(Q, S_i) - \delta(P_i, S_i) - \delta(Q, R)) = \delta(P, R) + \delta(Q, S) - \delta(P, S) - \delta(Q, R) < \infty,$$

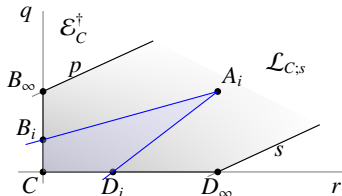
ahol $P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k$, $S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$, $q = \epsilon(Q)$, $r = \epsilon(R)$, $p = \epsilon(P)$, $s = \epsilon(S)$, és δ folytonos.

A Caratéodory-tétel [10, Theorem 1.53] értelmében tehát a $\nu_{C;s}$ kiterjed egy σ -véges $\mu_{C;s}$ mértékké az $\mathcal{L}_{C;s}$ Borel-halmazainak $\sigma(R_{C;s})$ σ -gyűrűjére.

Világos, hogy

$\mu_{C;s}(\square(ABCD)) = \nu(\square(ABCD))$ minden az $R_{C;s}$ gyűrűben lévő $\square(ABCD)$ négyszögre, amiért minden $\mu_{C;s}$ mérték egyforma értéket vesz fel minden a csúcsos sávjaik metszetében lévő $\square(ABCD)$ négyszögre. Vagyis

a $\mu_{C;s}$ mértékek megegyeznek a csúcsos sávok közös Borel-halmazain.



Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává V

Előzőek alapján a μ mérték következő definíciója helyes:

Egy $\mathcal{B}$ Borel halmaz μ -mértékét úgy kapjuk, hogy felvágjuk kisebb részekre, melyek már egy-egy $\mathcal{L}_{C;s}$ csúcsos sávba esnek, majd ezek $\mu_{C;s}$ -mértékeit összeadjuk.

Már csak azt kell ellenőriznünk, hogy δ annak a d projektív metrikának a határra való megszorítása, amelyet a Blaschke–Busemann-konstrukció készít a μ mértékből.

Legyen $\square(ABCD)$ egy támasznégyszög a $p = AB = \epsilon(P)$, $q = BC = \epsilon(Q)$, $r = CD = \epsilon(R)$, és $s = DA = \epsilon(S)$ oldalegyenesekkel. Ekkor

$$\begin{aligned} \delta(P, Q) + \delta(R, S) - \delta(R, Q) - \delta(P, S) \\ &= 2\nu(\square(ABCD)) = 2\nu_{C;s}(\square(ABCD)) = 2\mu_{C;s}(\square(ABCD)) = 2\mu(\square(ABCD)) \\ &= d(P, Q) + d(R, S) - d(R, Q) - d(P, S), \end{aligned}$$

ahol az első és utolsó egyenlőséget a (3.5) levezetés igazolja. Amennyiben $Q \rightarrow R$ és $S \rightarrow P$ az iménti egyenlőségben, akkor a δ és d folytonossága az $2\delta(P, R) = 2d(P, R)$ egyenlőségre vezet, ami teljessé teszi a bizonyítást. ■

A Caratéodory-tétel unicitási részéből nem következik a kiterjesztési tételünkben szereplő projektív metrika unicitása, mivel a ν definíciójának egyértelműsége nem igazolt.

Projektív metrikák határmetrika-merevsége I

Egy projektív metrika minden síkra megszorítva is projektív metrika, így a következő merevségi tételek minden dimenzióban érvényesek.

Határmetrika-merevség [14].

Egy $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrikát meghatároz a $\delta = d|_{\partial \mathcal{M}}$ határmetrikája.

Bizonyítás vázlata. A Kiterjesztési Tétel szerint van egy p -alkalmas $\mu: 2^{\mathcal{M}^*} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérték, amelyre $d(P, Q) = \mu(\mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q)))$, így csak ezt kell meghatározni a δ alapján.

A (3.3), (3.4) és (3.5) formulák megadják μ értékét a támaszkétélek, a támaszháromszögek és a támasznégyszögek esetére:

$$\begin{aligned} 2\mu(\mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q))) &= \delta(P, Q) \\ 2\mu(\triangle(ABC)) &= \delta(P, Q) + \delta(Q, R) - \delta(P, R), \\ 2\mu(\square(ABCD)) &= 2(\delta(P, Q) + \delta(R, S) - \delta(R, Q) - \delta(P, S)), \end{aligned}$$

ahol $P, Q, R, S \in \partial \mathcal{M}$.

Minden $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ halmaz páronként idegen $\mathcal{P}_j \in \mathcal{R}$ ($j = 1, \dots, \ell$) támaszpoligonok uniója, ezért $\mu(\mathcal{R}) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu(\mathcal{P}_i)$. Ugyanakkor a μ mérték σ -véges minden $\mathcal{L}_{C;s}$ csúcsos sávon, így ott meghatározzák az $\mathcal{R}$ elemein felvett értékei a Caratéodory-tétel [10, Theorem 1.53] unicitási állítása miatt. ■

Legyen Q az $\mathcal{M}^\#$ támasznégyszögeinek halmaza, $\mathcal{R}$ pedig az ezt tartalmazó legszűkebb félgűrű. Ekkor $\mathcal{R}$ minden eleme páronként idegen támaszpoligonok uniója.

Egy $\mathcal{P} \in \mathcal{R}$ támaszpoligont az oldalegyenesei véges sok páronként idegen $Q_i \in Q$ ($i = 1, \dots, n$) támasznégyszögre vágunk fel, tehát

$$\mu(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \mu(Q_i).$$

Projektív metrikák határmetrika-merevsége II

A határmetrika megszorításaival a határmetrika-merevségi tétel élesebb geometriai képet mutat. Legyen N egy kompakt konvex tartomány az M belsejében,

Lokalizálható a határmetrika-merevségi tétel...

Tétel [14]. *A $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrikát az N tartományon meghatározza a d határmetrikája azon húrokon, amelyek metszik az N tartományt.*

A [25] “hámozós” módszere is felfedezhető....

Tétel [14]. *A $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrikát az $M \setminus N$ tartományon meghatározza a d határmetrikája azon húrokon, amelyek elkerülik az N tartományt.*

Legyen $\mathcal{A}$ az ∂M egy nyílt összefüggő íve.

Theorem [14]. *A $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrikát a $\text{Conv } \mathcal{A}$ tartományon meghatározza a d határmetrikája azon húrokon, amelyek egyik vége az $\mathcal{A}$ íven van.*

Egy csöppet nagyobb általánosság

Tétel. Legyen C_1 és C_2 a sík N kompakt tartománya görbéinek olyan rendszere, hogy

- 1 minden $C \in C_1 \cup C_2$ görbe folytonos és injektív paraméterezésű valamely $[a, b]$ intervallumon, és $C(a), C(b) \in \partial N$;
- 2 az N bármely két pontjára mindkét C_i ($i = 1, 2$) rendszerből pontosan egy-egy görbe illeszkedik;
- 3 a C_1 és C_2 rendszerek teljesítik a Desargues-tulajdonságot.

Ha az N tartomány d_1 és d_2 metrikájának geodetikusai rendre pontosan a C_1 és C_2 rendszer görbéi, és $d_1 \equiv d_2$ a $\partial N \times \partial N$ határon, akkor van egy $\chi: N \rightarrow N$ homeomorfizmus, amelyre $d_2 \equiv d_1 \circ (\chi, \chi)$.

Igazolásul, válasszunk egy ψ homeomorfizmust, amely leképezi N tartományt a $z = 0$ sík egységkörlapjára. Vetítsük a $\psi(N)$ tartományt a felső S_+^2 félgömbfelületre a $\varpi: (x, y, 0) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ projekcióval. Vetítsük az S_+^2 félgömböt az $O = (0, 0, 0)$ origóból a $z = 1$ síkba a $\hat{\varpi}: (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \mapsto (x/\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y/\sqrt{1 - x^2 - y^2}, 1)$ projekcióval. A $z = 1$ síkon a $\hat{\varpi}(\varpi(\psi(C_i)))$ ($i = 1, 2$) görberendszerek teljesítik az [5, (11.2) Theorem] követelményeit, ezért a $z = 1$ síkon vannak olyan d_i metrikák, hogy azokkal olyan $\mathcal{G}_i$ egyenes G-síkokat alkot, amelyek geodetikusai pontosan a $\hat{\varpi}(\varpi(\psi(C_i)))$ görbéi. Ebből Busemann [5, (13.1) Theorem] adja, hogy $\mathcal{G}_i$ a $z = 1$ sík egy nyílt konvex $\mathcal{M}_i$ tartományára képezhető topologikusan úgy, hogy a $\mathcal{G}_i$ geodetikusai és az $\mathcal{M}_i$ húrjai egymásnak felelnek meg.



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

Kurusa Árpád
SZTE TTIK Bolyai Intézet

<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>
kurusa@math.u-szeged.hu

Bibliográfia szerző szerinti sorban I

- [1] R. V. Ambartzumian
A note on pseudo-metrics on the plane 2, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **37** (1976), 145–155; <https://doi.org/10.1007/BF00536777>. <5>
- [2] R. Alexander
Planes for which the Lines are the Shortest Paths between Points, *Illinois J. Math.*, **22** (1978), 177–190; https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ijm/1256048729. <5>
- [3] E. Beltrami
Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Opere*, **I** (1865), 262–280. <5>
- [4] J. Boman
On generalized Radon transforms with unknown measures, *Integral geometry and tomography* (Arcata, CA, 1989), *Contemp. Math.* **113**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 5–15; <https://doi.org/10.1090/conm/113>. <3>
- [5] H. Busemann,
The Geometry of Geodesics, Academic Press, New York, 1955. <15>
- [6] H. Busemann
Geometries in which the planes minimize area, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **55** (1961), 171–190. <6>
- [7] S. Helgason
The Radon Transform, Progress in Mathematics 5, Birkhäuser, Boston, MA, 1999; sec.ed. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1463-0>; <http://www-math.mit.edu/~helgason/Radonbook.pdf>.
- [8] A. Hertle
A characterization of Fourier and Radon transforms on Euclidean space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273** (1982), 595–607; <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1982-0667162-6>. <3>

Bibliográfia szerző szerinti sorban II

- [9] A. Hertle
The identification problem for the constantly attenuated Radon transform, *Math. Z.*, **197** (1988), 13–19; <https://doi.org/10.1007/BF01161627>. $\langle 3 \rangle$
- [10] A. Klenke
Probability Theory: A Comprehensive Course, Universitext, Springer, London, 2014; <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-5361-0>. $\langle 11, 13 \rangle$
- [11] Á. Kurusa
Characterization of the Radon transform and its dual on Euclidean space, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **54** (1990), 273–276; <http://pub.acta.hu/acta/viewArticle.action?dataObjectType=article&id=11077>. $\langle 3 \rangle$
- [12] Á. Kurusa
Translation Invariant Radon Transforms, *Math. Balkanica*, **11** (1991), 40–46; <http://www.math.bas.bg/infres/MathBalk/MB-05/MB-05-040-046.pdf>. $\langle 3 \rangle$
- [13] Á. Kurusa
Identifying rotational Radon transforms, *Period. Math. Hungar.*, **67** (2013), 187–209; <https://doi.org/10.1007/s10998-013-5391-9>. $\langle 3 \rangle$
- [14] Á. Kurusa and T. Ódor
Boundary-rigidity of projective metrics and the geodesic X-ray transform, *manuscript* (2019), pp. 11; submitted. $\langle 4, 8, 13, 14 \rangle$
- [15] R. Michel
Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques, *Invent. Math.*, **65** (1981), 71–83; <https://doi.org/10.1007/BF01389295>. $\langle 4 \rangle$

Bibliográfia szerző szerinti sorban III

[16] R. G. Mukhometov

The reconstruction problem of a two-dimensional Riemannian metric and integral geometry, *Sov. Math. Dokl.*, **18** (1977), 27–31; *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **232:1** (1977), 32–35. <4>

[17] R. G. Mukhometov

A problem of reconstructing a Riemannian metric, *Sib. Math. J.*, **22** (1981), 420–433; <https://doi.org/10.1007/BF00969776>. <4>

[18] F. Natterer

Computerized tomography with unknown sources, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1201–1212; <https://www.jstor.org/stable/2101427>. <3>

[19] F. Natterer

An inverse problem for a transport equation and integral geometry, *Integral geometry and tomography* (Arcata, CA, 1989), *Contemp. Math.* **113**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 221–231; <https://doi.org/10.1090/conm/113>. <3>

[20] L. Pestov and G. Uhlmann

Two dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid, *Ann. Math.*, **161** (2005), 1093–1110; <https://doi.org/10.4007/annals.2005.161.1093>. <4>

[21] A. V. Pogorelov

Hilbert's Fourth Problem, Moscow, 1974. <5>

Bibliográfia szerző szerinti sorban IV

- [22] E. T. Quinto
The dependence of the generalized Radon transform on defining measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **257** (1980), 331–346; <https://doi.org/10.2307/1998299>. $\langle 3 \rangle$
- [23] E. T. Quinto
The invertibility of rotation invariant Radon transforms, *Math. Anal. Appl.*, **91** (1983), 510–522; [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(83\)90165-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(83)90165-8). $\langle 3 \rangle$
- [24] D. C. Solmon
The identification problem for the exponential Radon transform, *Math. Methods Appl. Sci.*, **18** (1995), 687–695; <https://doi.org/10.1002/mma.1670180903>. $\langle 3 \rangle$
- [25] P. Stefanov, G. Uhlmann and A. Vasy
Local and global boundary rigidity and the geodesic X-ray transform in the normal gauge, *arXiv*, (2017), pp. 51; <https://arxiv.org/abs/1702.03638>. $\langle 4, 14 \rangle$
- [26] Z. I. Szabó
Hilbert's Fourth Problem I, *Adv. Math.*, **59** (1986), 185–301; [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(86\)90056-3](https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90056-3). $\langle 5 \rangle$

Ismeretlen általánosított Radon-transzformációk karakterizációja és azonosítása invarianciái vagy mért adatai alapján egy klasszikus problémakör (Példaképpen lásd E. T. Quinto, A. Hertle, D. C. Solmon, F. Natterer, J. Boman, és mások munkáit!).

Azon Radon-transzformációk meghatározása, melyek alkalmas függvényeket integrálnak valamely kompakt, egyszerű, határral rendelkező Riemann-sokaság geodetikusain szintén régóta kutatott probléma (Példaképpen lásd G. Herglotz, Ju. E. Anikonov, V. G. Romanov, R. G. Mukhometov és mások munkáit). Ez a terület manapság néhány fontos eredmény, a Riemann-sokaságok határmetrika-merevsége képében vált újra élővé olyanok munkájának köszönhetően, mint R. Michel, C. Croke, G. Uhlmann, A. Vasy, P. Stefanov, és mások.

Ezen eredményeket izlelgetve felmerül az érzés, hogy talán fontosabb szerep jut ezekben az integrálásra használt görbék rendszere által teljesített bizonyos tulajdonságoknak mint azt a differenciálhatóság feltétele látni engedi. Ez az érzés motiválta vizsgálatainkat a projektív metrikák határmetrika-merevsége irányába.

Az euklidészi tér egy konvex $\mathcal{M}$ tartományán értelmezett folytonos metrikát projektívnek nevezünk, ha geodetikusai pontosan az egyeneseknek az $\mathcal{M}$ tartománnyal vett metszetei. Ahogy azt már Busemann is megjegyezte, a projektív metrikák osztálya hatalmas, de, Beltrami tétele szerint egy projektív metrika akkor és csak akkor Riemann-féle, ha konstans görbületű. A Finsler-féle projektív metrikák ennél jóval nagyobb osztályt alkotnak, de a projektív metrikáknak messze nem mindegyike differenciálható.

Tétel. (Á. K. & T. ÓBOR, 2018) *Legyen $\mathcal{M}$ egy kompakt konvex nem üres tartomány a síkban. Ha a folytonos korlátos $\delta: \partial\mathcal{M} \times \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ metrika teljesíti a $\delta(P, R) + \delta(Q, S) - \delta(P, S) - \delta(Q, R) \geq 0$ négyszög-egyenlőtlenséget minden nem elfajuló konvex $\square(PQRS)$ négyszögre, akkor δ egyértelműen kiterjed eg $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrikává.*

A bizonyítás alapvetően Busemann integrálgeometriai ötletét használja, mely szerint a projektív metrikák előállnak a Grassman-sokaság mértékeivel használt Crofton-formulával. Az egyértelműség Carathéodory's kiterjesztési tételének unicitási részéből következik.

A tétel unicitási állítása minden dimenzióban érvényes, mivel az egyértelműség minden síkon érvényes.

Az előadás felépítése

1 Általánosított Radon-transzformációk

- Karakterizálások és azonosítások

2 Röntgen-transzformáció és határmetrika-merevség

3 Projektív metrikák

- Definíció és példák
- A Blaschke–Busemann-konstrukció
- Határmetrikák
 - Kiterjesztési tétel (síkon)
 - Unicitási tételek (térben)

4 Diszkusszió