

Projektív-metrikus Röntgen-transzformációk azonosítása

Projektív metrikák határmerevsége

Kurusa Árpád

<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Magyar Tudományos Akadémia

<https://www.renyi.hu/>

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

<http://www.math.u-szeged.hu/>

Az új tételek **Ódor Tiborral** közös munka eredményei.

A munkát az NKFIH támogatta a K 116451 és KH_18 129630 számú projektekkel.

BME Matematikai Intézet Geometria Szeminárium, Budapest, 2019. március 5, 10:30

A multimédia-tartalomhoz [Adobe PDF Reader](#) szükséges.

Általánosított Radon-transzformáció definíciója

Legyen S_ω az $\mathbb{R}^n$ tér $S_{\omega,t}$ hiperfelületeinek egy halmaza, ahol $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ és $t \in [0, \infty)$. Az $S = \bigcup_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} S_\omega$ halmazt **virágnak**, az $S_{\omega,t}$ hiperfelületeket **szíromnak** nevezzük.

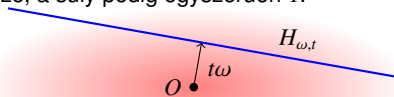
Az S minden elemén integrálható $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **Radon-transzformáltja**

$$R_{S,\mu} f(\omega, t) = \int_{S_{\omega,t}} f(x) \mu_{\omega,t}(x) dx,$$

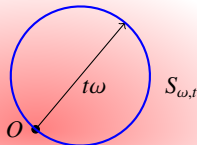
ahol dx a szírom természetes felszín-mértéke, a $\mu_{\omega,t}$ **súly** pedig egy szigorúan pozitív folytonos függvény a szíromon.



A "klasszikus" $R_{\mathcal{H},1}$ Radon-transzformáció esetén a $H_{\omega,t} = \{x : \langle x, \omega \rangle = t\}$ szírmokból a $\mathcal{H} = \{H_{\omega,t} : \omega \in \mathbb{S}^{n-1}, t \in [0, \infty)\}$ virág áll össze, a súly pedig egyszerűen 1.



A "duális" $R_{S,1}$ Radon-transzformáció esetén az $S_{\omega,t} = \{x : \langle t\omega - x, x \rangle = 0\}$ szírmokból az $S = \{S_{\omega,t} : \omega \in \mathbb{S}^{n-1}, t \in [0, \infty)\}$ virág áll össze, a súly pedig egyszerűen 1.



Jellemzés és azonosítás ha a virág ismert

Invarianciákkal. **Quinto** [20] bizonyította, hogy az *eltolás invariáns* $R_{\mathcal{H},\mu}$ Radon-transzformációkban a μ *súly exponenciális*. Eltérő nézőpontból [10] egy kicsit általánosabb eredményre jutott. **Quinto** [21] igazolta, hogy a *forgásinvariáns* $R_{\mathcal{H},\mu}$ Radon-transzformációkban a μ *súly forgásinvariáns*. Ugyanezt forgásinvariáns virágok esetére [11] bizonyította.

Kép által. **Hertle** [7] bizonyította hogy az $R_{\mathcal{H},\mu}$ *exponenciális Radon-transzformációra* az $(f, \mu) \mapsto R_{\mathcal{H},\mu} f$ leképezés injektív a kompakt tartójú nem radiális f disztribúciók halmazán. **Solmon** [22] megmutatta, hogy a μ *súly kiszámítható* az $R_{\mathcal{H},\mu} f$ függvényből, ha f egy kompakt tartójú nem radiális függvény.

Dirac-tesztel. **Natterer** [16, 17] igazolta hogy egy $R_{\mathcal{H},\mu}$ *csillapított Radon-transzformáció* μ *súlya kiszámítható* egy szorzó erejéig az $R_{\mathcal{H},\mu} f$ függvényből az f tartójában, ha az f testfüggvényről tudjuk, hogy véges sok Dirac-mérték összege. **Boman** [4] általánosította Natterer eredményét általános súlyokra.

Választható testfüggvénnyel [11]. Egy konformális $R_{S,\mu}$ Radon-transzformáció ismert szimmetrikus virággal *rekonstruálható az f és $F = R_{S,\mu} f$ függvényekből*, ha a kompakt tartójú $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ radiális függvénynek nincsenek eltűnő momentumai.

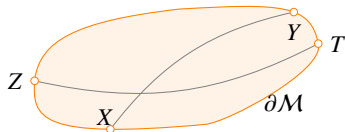
Azonosítás ha a virág ismeretlen

Invarianciákkal. Hertle [6] igazolta, hogy a “*klasszikus*” Radon-transzformáció éppen a *folytonos, forgás-, nagyítás-, és eltolás-invariáns* operátor. Más nézőpontból ugyanez [9].

Dirac-tesztel [11]. Ha a konformális $\mathcal{S}$ virág differenciálható és nem önérintő, és $F(\bar{\omega}, r) = R_{S,\mu} f(\bar{\omega}, r)$ ismert az ismeretlen $f = \sum_{i=1}^m \delta_{x_i} + g$ függvényre, ahol $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ és δ_{x_i} a Dirac-mérték az x_i pontban, akkor az $\mathcal{S}$ virág meghatározható, és $\mu_{\omega,r}(x_i)$ kiszámítható, ha $x_i \in S_{\omega,r}$.

Választható tesztfüggvénnyel [11]. Egy konformális $R_{S,\mu}$ Radon-transzformáció ismert szimmetrikus súllyal rekonstruálható az f és $F = R_{S,\mu} f$ függvényekből, ha a kompakt tartójú $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ radiális függvénynek nincsenek eltűnő momentumai.

Határmetrikával. Mukhometov [14, 15] bizonyította, hogy az $\mathbb{R}^n$ térben $R_{S,1}$ meghatározza az $\mathcal{S}$ virágot, ha a szirmok egy Riemann-metrika totál-geodetikusai. További friss eredmények: [13, 18, 23].

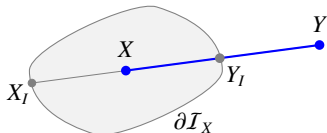


Felvetődik, hogy az önérintés és a szirmok legfeljebb egy pontos metszése fontosabb szerepet játszhat az azonosításban mint azt a differenciálhatóság látni engedi. Ez motiválta, hogy Ódor T. és jómagam vizsgálni kezdjük a *projektív metrikák* függését határmetrikájuktól [12].

Az Euklidészi tér egy konvex, nem feltétlenül valódi $\mathcal{M}$ részhalmazán értelmezett folytonos metrikát, melynek geodetikusai az $\partial\mathcal{M}$ hűrjai **projektív metrikának**¹ nevezünk.

Beltrami tétele [3] szerint a Riemann-féle projektív metrikák görbülete konstans.

Íme két Finsler-féle, a quadratikus esetet kivéve nem Riemann-metrika.

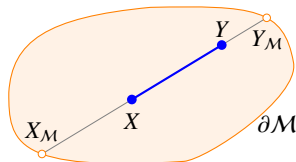


Minkowski-metrika. $d_I: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definíciója $d_I(X, Y) = (Y, Y_I; X)$, ahol I , az **indikátrix**, az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos, centrálszimmetrikus tartománya, I_X az X -re szimmetrikus eltoltja, és $\overline{X_I Y_I} = I_X \cap XY$.

Hilbert-metrika. $d_M: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definíciója

$$d_M(X, Y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } X = Y, \\ \left| \ln(X, Y; X_M, Y_M) \right| / 2, & \text{ha } X \neq Y, \end{cases}$$

ahol $\mathcal{M}$ az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos tartománya, és $\overline{X_M Y_M} = \mathcal{M} \cap XY$.



A legtöbb projektív metrika nem Finsler-féle.

Hilbert IV-es problémájának megoldásai [19, 1, 2, 24] szerint a projektív metrikák előál-líthatók a **Blaschke–Busemann-konstrukcióval**, így **a projektív metrikák osztálya hatalmas**.

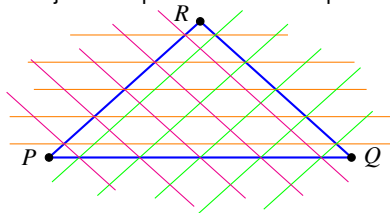
¹ Az elliptikus eset szándékosan maradt ki.

Blaschke–Busemann-konstrukció I

$\mathcal{M}$ az $\mathbb{R}^n$ egy kompakt konvex nem üres tartománya. P^* jelöli a P ponton áthaladó hipersíkok halmazát. Egy $\mu: 2^{\mathcal{M}^*} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérték *p-típusú* ha

- 1 $\mu(P^*) = 0$ (μ *definit*),
- 2 $\mu(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^*) > 0$ (μ *pozitív*), és
- 3 $\mu(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^* \cap \bigcup_{Y \in \overline{QR}} Y^*) > 0$ (μ *szigorú*)

minden nem kollineáris $P, Q, R \in \mathcal{M}$ esetén.



Blaschke–Busemann-konstrukció [5]. Ha $\mu: 2^{\mathcal{M}^*} \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy p-típusú mérték, akkor $d(P, Q) = \mu(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^*)/2$ által definiált $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény egy projektív metrika.

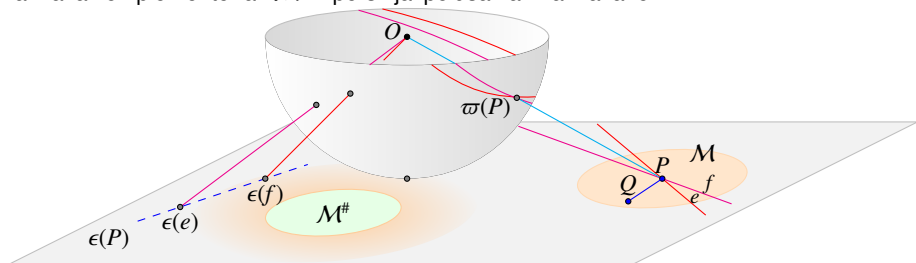
Proof. Ha $\mu: 2^{\mathcal{M}^*} \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy p-típusú mérték, akkor 2 miatt $d(P, Q) = \mu(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^*)/2$ nem negatív, és 1 miatt pontosan akkor tűnik el, ha $P \equiv Q$. Ráadásul 3 miatt a

$$\begin{aligned} 2d(P, Q) + 2d(Q, R) &= \mu\left(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^* \cup \bigcup_{Y \in \overline{QR}} Y^*\right) = \mu\left(\bigcup_{Z \in \overline{PR}} Z^*\right) + \mu(\{XY : X \in \overline{PQ} \wedge Y \in \overline{QR}\}) \\ &= 2d(P, R) + \mu\left(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^* \cap \bigcup_{Y \in \overline{QR}} Y^*\right) > 2d(P, R) \end{aligned}$$

háromszög-egyenlőtlenség is teljesül. Végül 1 miatt d folytonos is.

Blaschke–Busemann-konstrukció II

Egy ϵ polaritás a P ponton átmenő minden e hipersík $\epsilon(e)$ **pólusát** a P pont $\epsilon(P)$ **poláris** hipersíkjára viszi, ezért az $\mathcal{M}$ -et elkerülő hipersíkok pólusainak $\mathcal{M}^\#$ konvex, nem üres korlátos halmaza komplementer az $\mathcal{M}^*$ hipersíkjai pólusainak halmazához.



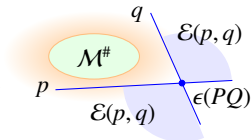
Az ϵ polaritás a $\overline{PQ}$ szakaszhoz az

$$\epsilon(\overline{PQ}^*) = \bigcup_{X \in \overline{PQ}} \epsilon(X^*) = \bigcup_{X \in \overline{PQ}} \epsilon(X) =: \mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q)).$$

kétélet rendeli. Ezt a poláris $p = \epsilon(P)$ és $q = \epsilon(Q)$ hipersíkok határolják, és a Blaschke–Busemann-konstrukció μ mértékére

$$(2.1) \quad \mu \circ \epsilon(\mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q))) = \mu(\overline{PQ}^*).$$

A Blaschke–Busemann-konstrukcióban ez $d(P, Q)$, ezért az $\mathcal{M}^\#$ komplementerén keresünk megfelelő pozitív μ mértéket. A síkon az ebből adódó $\mu \circ \epsilon$ automatikusan p -típusú mérték.



Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává I

A háromszög-egyenlőtlenség miatt, mivel bármely nem elfajuló konvex $\square(PQRS)$ négyszög $X = \overline{PR} \cap \overline{QS}$ átlós pontja az $\mathcal{M}$ eleme, minden $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrika teljesíti a

$$(2.2) \quad d(P, R) + d(Q, S) - d(P, S) - d(Q, R) \geq 0,$$

négyszög-egyenlőtlenséget, ahol egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\square(PQRS)$ szakasszá fajul.

Kiterjesztési tétel [12]. Ha a folytonos, korlátos $\delta: \partial\mathcal{M} \times \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ metrika teljesíti a (2.2) négyszög-egyenlőtlenséget minden konvex, nem elfajuló, az $\partial\mathcal{M}$ -be írt $\square(PQRS)$ négyszögre, akkor van olyan $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrika, melynek δ a megszorítottja.

Bizonyítási vázlat. Konstruálni kell egy p-típusú $\mu: 2^{\mathcal{M}^*} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mértéket, amelyre $\delta(P, Q) = \mu(\bigcup_{X \in \overline{PQ}} X^*)/2$ minden $P, Q \in \partial\mathcal{M}$ esetén.

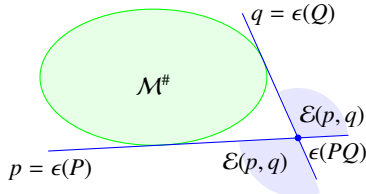
Először egy ν halmazfüggvényt készítünk a síkon, ami generálni fogja a $\mu \circ \epsilon$ mértéket.

A $\partial\mathcal{M}$ minden $\overline{PQ}$ húrjára legyen

$$(2.3) \quad \nu(\mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q))) := \delta(P, Q).$$

Ez (2.1) miatt elkerülhetetlen.

Az $\mathcal{M}^\#$ -et nem tartalmazó olyan kétéleket, amelyek határoló egyenesei érintik az $\mathcal{M}^\#$ -et, *támaszkétélnek* nevezzük.



Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává II

Ha az $\triangle(ABC)$ háromszög $p = AB = \epsilon(P)$, $q = BC = \epsilon(Q)$, és $r = CA = \epsilon(R)$ oldalegyenesei olyanok, hogy $\mathcal{E}(p, q)$, $\mathcal{E}(q, r)$, és $\mathcal{E}(r, p)$ is támaszkétel, akkor a p, q, r egyeneseken kívül $2\chi_{\triangle(ABC)} = \chi_{\mathcal{E}(p, q)} + \chi_{\mathcal{E}(q, r)} - \chi_{\mathcal{E}(r, p)}$. Emiatt a (2.3) értelmében legyen

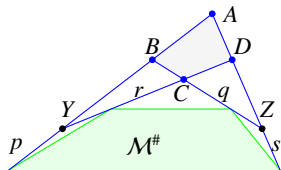
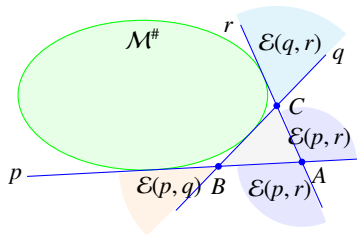
$$(2.4) \quad \nu(\triangle(ABC)) := (\delta(P, Q) + \delta(Q, R) - \delta(P, R))/2.$$

Ez nem negatív a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Az ilyen háromszögek a **támaszháromszögek**.

Legyen $\square(ABCD)$ egy konvex négyszög, a $p = AB = \epsilon(P)$, $q = BC = \epsilon(Q)$, $r = CD = \epsilon(R)$, és $s = DA = \epsilon(S)$ oldalegyenesekkel. Ha $\mathcal{E}(p, q)$, $\mathcal{E}(q, r)$, $\mathcal{E}(r, s)$, és $\mathcal{E}(s, p)$ is támaszkétel, akkor a $\square(ABCD)$ négyszög $X = AC \cap BD$, $Y = p \cap r$, és $Z = q \cap s$ átlós pontjai az $\triangle(YBC)$, $\triangle(ZDC)$, $\triangle(YAD)$, és $\triangle(ZAB)$ támaszháromszögeket alkotják, így (2.4) értelmében legyen

$$(2.5) \quad \begin{aligned} 2\nu(\square(ABCD)) &:= \nu(\triangle(YAD)) + \nu(\triangle(ZAB)) - \nu(\triangle(YBC)) - \nu(\triangle(ZCD)) \\ &= \delta(P, Q) + \delta(R, S) - \delta(R, Q) - \delta(P, S). \end{aligned}$$

Ez nem negatív a négyszög-egyenlőtlenség miatt. Az ilyen négyszögek a **támasznégyszögek**.



Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává III

Legyen Q a támasznégyszögek halmaza. Legyen a Q -t tartalmazó legkisebb félgyűrű R . Ekkor R elemei olyan páronként diszjunkt, zárt $\mathcal{P}$ poligonok uniói, amelyeknek minden oldal-egyenese az $\mathcal{M}^\#$ érintője.

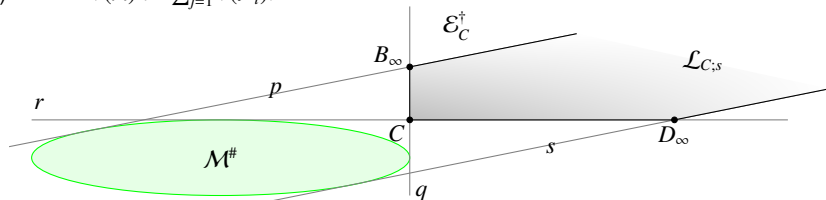
Mivel a $\mathcal{P} \in R$ poligon minden oldalegyenese az $\mathcal{M}^\#$ érintője, ezek a $\mathcal{P}$ poligont véges sok páronként diszjunkt $Q_i \in Q$ ($i = 1, \dots, n$) négyszögre vágják. Ezért legyen

$$(2.6) \quad \nu(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n \nu(Q_i).$$

Mivel minden $\mathcal{R} \in R$ halmaz páronként diszjunkt, zárt $\mathcal{P}_j \in R$ ($j = 1, \dots, \ell$) poligonok uniója, a ν definiálását ezzel zárjuk:

$$(2.7) \quad \nu(\mathcal{R}) := \sum_{j=1}^{\ell} \nu(\mathcal{P}_j).$$

Legyen $\mathcal{E}_C$ az $\mathcal{M}^\#$ tartomány $C \notin \mathcal{M}^\#$ ponton áthaladó r és q támaszegyenesei által alkotott nem támaszkétél. $\mathcal{E}_C^\dagger$ ennek az a síknyegyeda, melynek $\mathcal{M}^\#$ nem része. Legyenek s és p az $\mathcal{M}^\#$ olyan párhuzamos támaszegyenesei, melyek közé esik a C pont. **Csúcsos sávnak** nevezzük az $\mathcal{E}_C^\dagger$ és az s és p közötti sáv $\mathcal{L}_{C;s}$ metszetét, továbbá $D_\infty = r \cap s$ és $B_\infty = q \cap p$.



Állítjuk, hogy $\nu_{C;s} = \nu \upharpoonright_{R_{C;s}}$, ahol $R_{C;s} = \{R : R \ni R \subset \mathcal{L}_{C;s}\}$, kiterjeszthető mértékké $\mathcal{L}_{C;s}$ -re.

Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává IV

A $\nu_{C;s}$ halmaz-függvény nyilván additív és σ -szubadditív is. A σ -végességét kell igazolni.

Legyenek a $D_i \in \overline{CD_\infty}$ és $B_i \in \overline{CB_\infty}$ ($i = 1, \dots, \infty$) pontok olyanok, hogy rendre $\overrightarrow{CD_\infty} = i\overrightarrow{D_iD_\infty}$ és $\overrightarrow{CB_\infty} = i\overrightarrow{B_iB_\infty}$.

Legyen $s_i = \epsilon(S_i)$ és $p_i = \epsilon(P_i)$ az $\mathcal{M}^\#$ olyan érintője, melyre rendre $D_i \in s_i \neq r$ és $B_i \in p_i \neq q$. Ha ezek metszéspontja $A_i = p_i \cap s_i$, akkor $\bigcup_{i=1}^k \square(A_i B_i C D_i) = \square(A_k B_k C D_k)$ és $\bigcup_{i=1}^\infty \square(A_i B_i C D_i) = \mathcal{L}_{C;s}$. Eszerint

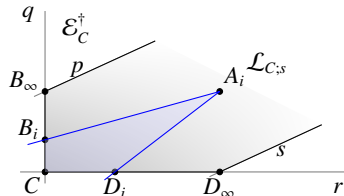
$$2\nu_{C;s}(\mathcal{L}_{C;s}) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{C;s}(\square(A_k B_k C D_k)) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(\square(A_k B_k C D_k))$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta(P_i, R) + \delta(Q, S_i) - \delta(P_i, S_i) - \delta(Q, R)) = \delta(P, R) + \delta(Q, S) - \delta(P, S) - \delta(Q, R) < \infty,$$

ahol $P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k$, $S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$, $q = \epsilon(Q)$, $r = \epsilon(R)$, $p = \epsilon(P)$, $s = \epsilon(S)$, és δ folytonos.

A Caratéodory-tétel [8, Theorem 1.53] értelmében tehát a $\nu_{C;s}$ kiterjed egy σ -véges $\mu_{C;s}$ mértékké az $\mathcal{L}_{C;s}$ Borel-halmazainak $\sigma(R_{C;s})$ σ -gyűrűjére.

Világos, hogy $\mu_{C;s}(\square(ABCD)) = \nu(\square(ABCD))$ minden a $R_{C;s}$ gyűrűben lévő $\square(ABCD)$ négyszögre, amiért minden $\mu_{C;s}$ mérték egyforma értéket vesz fel minden a csúcsos sávjaik metszetében lévő $\square(ABCD)$ négyszögre. Vagyis mindezen mértékek egyenlők a csúcsos sávjaik közös Borel-halmazain.



Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává V

Előzőek alapján a μ mérték következő definíció helyes: *Egy adott $\mathcal{B}$ Borel-halmaz μ mértékét úgy kapjuk, hogy feldaraboljuk kisebb részekre, melyek már egy-egy $\mathcal{L}_{C;s}$ csúcsos sávba esnek, aztán ezeknek a megfelelő $\mu_{C;s}$ által adott mértékeit összeadjuk.*

A bizonyítás befejezéséhez már csak ellenőriznünk kell, hogy δ annak a d projektív metrikának a határra való megszorítása, melyet a Blaschke–Busemann-konstrukció készít a μ mértékből.

Legyen $\square(ABCD)$ egy támasznégyszög a $p = AB = \epsilon(P)$, $q = BC = \epsilon(Q)$, $r = CD = \epsilon(R)$, és $s = DA = \epsilon(S)$ oldalegyenesekkel. Ekkor

$$\begin{aligned} \delta(P, Q) + \delta(R, S) - \delta(R, Q) - \delta(P, S) \\ &= 2\nu(\square(ABCD)) = 2\nu_{C;s}(\square(ABCD)) = 2\mu_{C;s}(\square(ABCD)) = 2\mu(\square(ABCD)) \\ &= d(P, Q) + d(R, S) - d(R, Q) - d(P, S), \end{aligned}$$

ahol az első és utolsó egyenlőséget a (2.5) levezetés igazolja. Amennyiben $Q \rightarrow R$ és $S \rightarrow P$ az iménti egyenlőségben, akkor a δ és d folytonossága az $2\delta(P, R) = 2d(P, R)$ egyenlőségre vezet, ami teljessé teszi a bizonyítást. ■

A Caratéodory-tétel unicitási részéből nem következik a kiterjesztési tételünkben szereplő projektív metrika unicitása, mivel a ν definíciójának egyértelműsége nem igazolt.

A határmetrika meghatározza a projektív metrikát I

Határmerevség [12]. Minden projektív metrikát meghatároz a határmetrikája.

Bizonyítási vázlat. Egy $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrikához a Kiterjesztési tétel szerint van olyan p-típusú $\mu: 2^{\mathcal{M}^*} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérték, melyre $d(P, Q) = \mu(\mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q)))$. Eszerint a d meghatározásához elegendő a μ meghatározása a δ határmetrikából.

A (2.3), (2.4) és (2.5) formulák alapján a μ értékét a támaszkételeken, támaszháromszögeken és támasznégyszögeken

$$2\mu(\mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q))) = \delta(P, Q),$$

$$2\mu(\triangle(ABC)) = \delta(P, Q) + \delta(Q, R) - \delta(P, R), \text{ és}$$

$$2\mu(\square(ABCD))$$

$$= 2(\delta(P, Q) + \delta(R, S) - \delta(R, Q) - \delta(P, S))$$

adja, ahol $P, Q, R, S \in \partial \mathcal{M}$.

Mivel minden $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ halmaz páronként diszjunkt, zárt $\mathcal{P}_j \in \mathcal{R}$ ($j = 1, \dots, \ell$) poligonok uniója, $\mu(\mathcal{R}) := \sum_{j=1}^{\ell} \mu(\mathcal{P}_j)$. adódik. Ugyanakkor a μ mérték σ -véges minden $\mathcal{L}_{C,s}$ csúcsos sávon, így ott meghatározzák az $\mathcal{R}$ elemein felvett értékei a Caratéodory-tétel [8, Theorem 1.53] unicitási állítása miatt. ■

Legyen $\mathcal{Q}$ a támasznégyszögek halmaza, $\mathcal{R}$ pedig legyen a legszűkebb félgyűrű, ami tartalmazza. Ekkor az $\mathcal{R}$ minden eleme olyan páronként diszjunkt zárt poligonok uniója, melyeknek minden oldalegyenese az $\mathcal{M}^{\#}$ érintője.

Ezek a $\mathcal{P}$ poligont véges sok páronként diszjunkt $Q_i \in \mathcal{Q}$ ($i = 1, \dots, n$) négyszögre vágják, ezért $\mu(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \mu(Q_i)$.

A határmetrika meghatározza a projektív metrikát II

A határmetrika megszorításaival élesíthető a határmerevségi tétel ... Legyen N egy kompakt konvex tartomány az M belsejében, $\mathcal{A}$ pedig egy összefüggő nyílt ív a ∂M határon. Több eltérő módon is lokalizálhatjuk a határmetrika megszorításának hatását ...

Tétel [12]. A $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrikát az N tartományon meghatározza határmetrikájának az N tartományt elkerülő húrokra való megszorítása.

Tétel [12]. A $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrikát a $M \setminus N$ tartományon meghatározza határmetrikájának az N halmazt nem metsző húrokra való megszorítása.

Tétel [12]. A $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ projektív metrikát a $\text{Conv} \mathcal{A}$ tartományon meghatározza határmetrikájának az $\mathcal{A}$ ívről induló húrokra való megszorítása.



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

Kurusa Árpád
MTA Rényi A. Matematikai Kutatóintézet
SZTE TTIK Bolyai Intézet

<http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa>
karpad@renyi.hu
kurusa@math.u-szeged.hu

Bibliográfia szerzők szerinti sorban I

- [1] R. V. Ambartzumian, A note on pseudo-metrics on the plane 2, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **37** (1976), 145–155; <http://dx.doi.org/10.1007/BF00536777>.
- [2] R. Alexander, Planes for which the Lines are the Shortest Paths between Points, *Illinois J. Math.*, **22** (1978), 177–190; https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ijm/1256048729.
- [3] E. Beltrami, Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Opere*, I (1865), 262–280.
- [4] J. Boman, On generalized Radon transforms with unknown measures, *Integral geometry and tomography* (Arcata, CA, 1989), *Contemp. Math.* **113**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 5–15; <https://doi.org/10.1090/conm/113>.
- [5] H. Busemann, Geometries in which the planes minimize area, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **55** (1961), 171–190.
- [6] A. Hertle, A characterization of Fourier and Radon transforms on Euclidean space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273** (1982), 595–607; <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1982-0667162-6>.
- [7] A. Hertle, The identification problem for the constantly attenuated Radon transform, *Math. Z.*, **197** (1988), 13–19; <https://doi.org/10.1007/BF01161627>.
- [8] A. Klenke, *Probability Theory: A Comprehensive Course*, Universitext, Springer, London, 2014; <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-5361-0>.

Bibligráfia szerzők szerinti sorban II

- [9] Á. Kurusa, Characterization of the Radon transform and its dual on Euclidean space, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **54** (1990), 273–276; <http://pub.acta.hu/acta/viewArticle.action?dataObjectType=article&id=11077>.
- [10] Á. Kurusa, Translation Invariant Radon Transforms, *Math. Balkanica*, **11** (1991), 40–46; <http://www.math.bas.bg/infres/MathBalk/MB-05/MB-05-040-046.pdf>.
- [11] Á. Kurusa, Identifying rotational Radon transforms, *Period. Math. Hungar.*, **67** (2013), 187–209; <https://doi.org/10.1007/s10998-013-5391-9>.
- [12] Á. Kurusa and T. Ódor, Boundary rigidity of projective metrics and the geodesic X-ray transform, *manuscript* (2019), pp. 11.
- [13] R. Michel, Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques, *Invent. Math.*, **65** (1981), 71–83; <https://doi.org/10.1007/BF01389295>.
- [14] R. G. Mukhometov, The reconstruction problem of a two-dimensional Riemannian metric and integral geometry, *Sov. Math. Dokl.*, **18** (1977), 27–31; *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **232:1** (1977), 32–35.
- [15] R. G. Mukhometov, A problem of reconstructing a Riemannian metric, *Sib. Math. J.*, **22** (1981), 420–433; <https://doi.org/10.1007/BF00969776>.
- [16] F. Natterer, Computerized tomography with unknown sources, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1201–1212; <https://www.jstor.org/stable/2101427>.

Bibliográfia szerzők szerinti sorban III

- [17] F. Natterer, An inverse problem for a transport equation and integral geometry, *Integral geometry and tomography* (Arcata, CA, 1989), Contemp. Math. **113**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 221–231; <https://doi.org/10.1090/conm/113>.
- [18] L. Pestov and G. Uhlmann, Two dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid, *Ann. Math.*, **161** (2005), 1093–1110; <https://doi.org/10.4007/annals.2005.161.1093>.
- [19] A. V. Pogorelov, *Hilbert's Fourth Problem*, Moscow, 1974.
- [20] E. T. Quinto, The dependence of the generalized Radon transform on defining measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **257** (1980), 331–346; <https://doi.org/10.2307/1998299>.
- [21] E. T. Quinto, The invertibility of rotation invariant Radon transforms, *Math. Anal. Appl.*, **91** (1983), 510–522; [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(83\)90165-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(83)90165-8).
- [22] D. C. Solmon, The identification problem for the exponential Radon transform, *Math. Methods Appl. Sci.*, **18** (1995), 687–695; <https://doi.org/10.1002/mma.1670180903>.
- [23] P. Stefanov, G. Uhlmann and A. Vasy, Local and global boundary rigidity and the geodesic X-ray transform in the normal gauge, *arXiv*, (2017), pp. 51; <https://arxiv.org/abs/1702.03638>.
- [24] Z. I. Szabó, Hilbert's Fourth Problem I, *Adv. Math.*, **59** (1986), 185–301; [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(86\)90056-3](https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90056-3).

● **Cím:** *Projektív-metrikus Röntgen-transzformációk azonosítása*

Kivonat: A tomografikus módszer kiinduló pontja az alkalmazott eszköznek, vagyis magának a tomografikus transzformációnak az ismerete. A Röntgen-sugárzás esetén ezt korán sikerült meghatározni, de vannak olyan esetek, mint például a SPECT (single particle emission computed tomography), ahol nem lehet az alkalmazott Röntgen-transzformációt előre meghatározni.

Az általánosított Radon-transzformációk elméletében ezek az *azonosítási problémák* a megszo-
kottól jelentősen eltérő matematikát igényelnek, és mára eljutottak a Riemann-metrikák határ-
merevségi vizsgálatához, melyet napjainkban leginkább a földtani és 'marstani(!)' vizsgálatok
motiválnak.

Az előadás gyors áttekintést ad az azonosítási problémákról, és beszámol az *Ódor Tiborral*
végzett közös kutatásról a projektív metrikák határmerevsége tekintetében.

● **Title:** *Identification of projective-metric X-ray transforms*

Abstract: The starting point of the tomographic method is the knowledge of the applied de-
vice, i.e. the tomographic transformation itself. In the case of X-ray radiation, this has been
determined early, but there are cases such as single particle emission computed tomography
(SPECT), where the X-ray transformation used cannot be predetermined.

In the theory of generalized Radon transformations, these *identification problems* require much
different mathematics than usual and have now reached the investigation of the boundary-metric
rigidity of the Riemann metrics, which is today motivated mainly by geological and 'marsologi-
cal(!)' studies.

The presentation gives a quick overview of identification problems and reports on the joint re-
search with *Tibor Ódor* regarding the boundary-metric rigidity of projective metrics.

Az előadás felépítése

1 Radon-transzformáció

- Általános definíció
- Jellemzés és azonosítás

2 Projektív metrikák

- Definíció és példák
- Blaschke–Busemann-konstrukció
- Határmetrika a síkon
 - Kiterjesztési tétel
 - Unicitási tételek