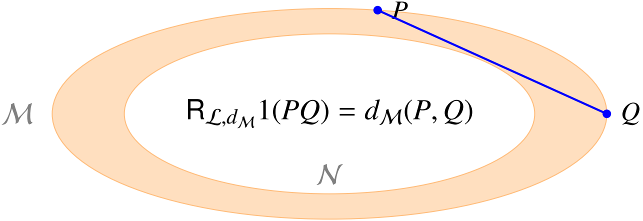
Projektív metrikák és határmetrikájuk

Projektív-metrikus Röntgen-transzformációk azonosítása

Kurusa Árpád
http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Magyar Tudományos Akadémia
https://www.renyi.hu/
Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem
http://www.math.u-szeged.hu/



Az új tételek **Ódor Tiborral** közös munka eredményei.

A munkát az NKFIH támogatta a K 116451 és KH_18 129630 számú projektekkel.
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Geometria Szemináriuma, Budapest, 2019. február 8, 14:15

A multimédia-tartalomhoz Adobe PDF Reader szükséges.

Általánosított Radon-transzformáció definíciója

Legyen $\mathcal{S}_\omega$ az $\mathbb{R}^n$ tér $S_{\omega,t}$ hiperfelületeinek egy halmaza, ahol $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ és $t \in [0,\infty)$.

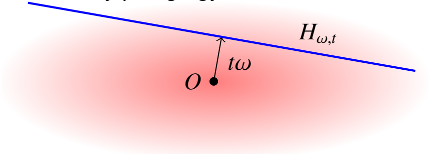
Az $S_{\omega,t}$ hiperfelületek mindegyikén integrálható $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény *általánosított Radon-transzformáltja*

$$\mathrm{R}_{\mathcal{S},\mu} f(\omega,t) = \int_{S_{\omega,t}} f(\boldsymbol{x})\mu_{\omega,t}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \tag{1.1}$$

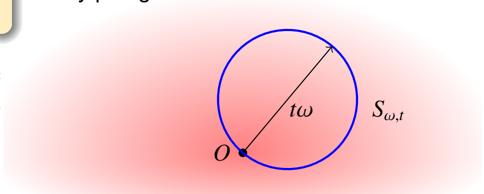
ahol $d\boldsymbol{x}$ az $S_{\omega,t}$ hiperfelület természetes felszínmértéke, a $\mu_{\omega,t}$ pedig egy szigorúan pozitív folytonos függvény az $S_{\omega,t}$ hiperfelületen, amely folytonosan függ a paramétereitől.

Az $S_{\omega,t}$ hiperfelületeket *sziromnak*, az $\mathcal{S} = \bigcup_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{S}_\omega$ halmazukat *virágnak* a $\mu_{\omega,t}$ függvényeket pedig *súlynak* nevezzük.

A “klasszikus” $\mathrm{R}_{\mathcal{H},1}$ Radon-transzformáció esetén a $H_{\omega,t} = \{\boldsymbol{x} : \langle \boldsymbol{x},\omega\rangle = t\}$ szirmokból a $\mathcal{H} = \{H_{\omega,t} : \omega \in \mathbb{S}^{n-1},\ t \in [0,\infty)\}$ virág áll össze, a súly pedig egyszerűen 1.



A “duális” $\mathrm{R}_{\mathcal{S},1}$ Radon-transzformáció esetén az $S_{\omega,t} = \{\boldsymbol{x} : \langle t\boldsymbol{u}_\omega - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0\}$ szirmokból az $\mathcal{S} = \{S_{\omega,t} : \omega \in \mathbb{S}^{n-1},\ t \in [0,\infty)\}$ virág áll össze, a súly pedig egyszerűen 1.



Jellemzés és azonosítás ha a virág ismert

Invarianciákkal. **Quinto** [20] bizonyította, hogy az *eltolás invariáns* $\mathrm{R}_{\mathcal{H},\mu}$ Radon-transzformációkban a μ *súly exponenciális*. Eltérő nézőpontból [10] egy kicsit általánosabb eredményre jutott. **Quinto** [21] igazolta, hogy a *forgásinvariáns* $\mathrm{R}_{\mathcal{H},\mu}$ Radon-transzformációkban a μ *súly forgásinvariáns*. Ugyanezt forgásinvariáns virágok esetére [11] bizonyította.

Kép által. **Hertle** [7] bizonyította hogy az $\mathrm{R}_{\mathcal{H},\mu}$ *exponenciális Radon-transzformációra* az $(f,\mu)\mapsto \mathrm{R}_{\mathcal{H},\mu}f$ leképezés injektív a kompakt tartójú nem radiális f disztribúciók halmazán. **Solmon** [22] megmutatta, hogy a μ *súly kiszámítható* az $\mathrm{R}_{\mathcal{H},\mu}f$ függvényből, ha f egy kompakt tartójú nem radiális függvény.

Dirac-teszttel. **Natterer** [16, 17] igazolta hogy egy $\mathrm{R}_{\mathcal{H},\mu}$ *csillapított Radon-transzformáció* μ *súlya kiszámítható* egy szorzó erejéig az $\mathrm{R}_{\mathcal{H},\mu}f$ függvényből az f tartójában, ha az f tesztfüggvényről tudjuk, hogy véges sok Dirac-mérték összege. **Boman** [4] általánosította Natterer eredményét általános súlyokra.

Választható tesztfüggvénnyel [11]. Egy konformális $\mathrm{R}_{\mathcal{S},\mu}$ Radon-transzformáció ismert szimmetrikus virággal *rekonstruálható az f és $F=\mathrm{R}_{\mathcal{S},\mu}f$ függvényekből*, ha a kompakt tartójú $f\in L^2(\mathbb{R}^2)$ radiális függvénynek nincsenek eltűnő momentumai.

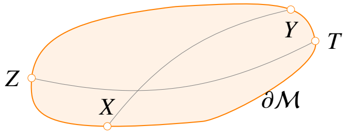
Azonosítás ha a virág ismeretlen

Invarianciákkal. **Hertle** [6] igazolta, hogy a "*klasszikus*" Radon-transzformáció éppen a *folytonos, forgás-, nagyítás-, és eltolás-invariáns* operátor. Más nézőpontból ugyanez [9].

Dirac-teszttel [11]. Ha a konformális $\mathcal{S}$ virág differenciálható és nem önérintő, és $F(\bar{\omega}, r) = \mathrm{R}_{\mathcal{S},\mu} f(\bar{\omega}, r)$ ismert az ismeretlen $f = \sum_{i=1}^{m} \delta_{\boldsymbol{x}_i} + g$ függvényre, ahol $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ és $\delta_{\boldsymbol{x}_i}$ a Dirac-mérték az $\boldsymbol{x}_i$ pontban, akkor az $\mathcal{S}$ virág meghatározható, és $\mu_{\omega,r}(\boldsymbol{x}_i)$ kiszámítható, ha $\boldsymbol{x}_i \in S_{\omega,r}$.

Választható tesztfüggvénnyel [11]. Egy konformális $\mathrm{R}_{\mathcal{S},\mu}$ Radon-transzformáció ismert szimmetrikus súllyal rekonstruálható az f és $F = \mathrm{R}_{\mathcal{S},\mu} f$ függvényekből, ha a kompakt tartójú $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ radiális függvénynek nincsenek eltűnő momentumai.

Határmetrikával. **Mukhometov** [14, 15] bizonyította, hogy az $\mathbb{R}^n$ térben $\mathrm{R}_{\mathcal{S},1} 1$ meghatározza az $\mathcal{S}$ virágot, ha a szirmok egy Riemann-metrika totál-geodetikusai. További friss eredmények: [13, 18, 23].

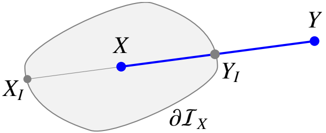


Felvetődik, hogy az önérintés és a szirmok legfeljebb egypontos metszése fontosabb szerepet játszhat az azonosításban mint azt a differenciálhatóság látni engedi. Ez motiválta, hogy **Ódor T.** és jómagam vizsgálni kezdjük a *projektív metrikák* függését határmetrikájuktól [12].

Az Euklidészi tér egy konvex, nem feltétlenül valódi $\mathcal{M}$ részhalmazán értelmezett folytonos metrikát, melynek geodetikusai az $\mathcal{M}$ húrjai *projektív metrikának*[1] nevezünk.

Beltrami tétele [3] szerint a Riemann-féle projektív metrikák görbülete konstans.

Íme két példa, melyek nem Riemann-, de Finsler-félék.

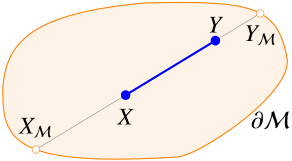


Minkowski-metrika. $d_{\mathcal{I}}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definíciója $d_{\mathcal{I}}(X,Y) = (Y, Y_I; X)$, ahol $\mathcal{I}$, az *indikátrix*, az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos, centrálszimmetrikus tartománya, $\mathcal{I}_X$ az X-re szimmetrikus eltoltja, és $\overline{X_I Y_I} = \mathcal{I}_X \cap XY$.

Hilbert-metrika. $d_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definíciója

$$d_{\mathcal{M}}(X,Y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } X = Y, \\ \left|\ln(X,Y;X_{\mathcal{M}},Y_{\mathcal{M}})\right|/2, & \text{ha } X \neq Y, \end{cases}$$

ahol $\mathcal{M}$ az $\mathbb{R}^n$ egy nyitott, szigorúan konvex, korlátos tartománya, és $\overline{X_{\mathcal{M}} Y_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M} \cap XY$.



Hilbert IV-es problémájának megoldásai [19, 1, 2, 24], szerint a projektív metrikák előállíthatók a *Blaschke–Busemann-konstrukcióval*, így *a projektív metrikák osztálya hatalmas*.

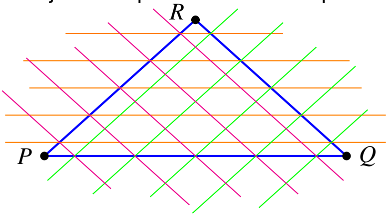
[1] *Az elliptikus eset szándékosan maradt ki.*

Blaschke–Busemann-konstrukció I

$\mathcal{M}$ az $\mathbb{R}^n$ egy kompakt konvex nem üres tartománya. P^* jelöli a P ponton áthaladó hipersíkok halmazát. Egy $\mu\colon 2^{\mathcal{M}^*} \to \mathbb{R}_+$ mérték *p-típusú* ha

1. $\mu(P^*) = 0$ (μ *definit*),
2. $\mu(\bigcup_{X\in\overline{PQ}} X^*) > 0$ (μ *pozitív*), és
3. $\mu(\bigcup_{X\in\overline{PQ}} X^* \cap \bigcup_{Y\in\overline{QR}} Y^*) > 0$ (μ *szigorú*)

minden nem kollineáris $P, Q, R \in \mathcal{M}$ esetén.



Blaschke–Busemann-konstrukció [5]. *Ha $\mu\colon 2^{\mathcal{M}^*} \to \mathbb{R}_+$ egy p-típusú mérték, akkor $d(P,Q) = \mu(\bigcup_{X\in\overline{PQ}} X^*)/2$ által definiált $d\colon \mathcal{M}\times\mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$ függvény egy projektív metrika.*

Proof. Ha $\mu\colon 2^{\mathcal{M}^*} \to \mathbb{R}_+$ egy p-típusú mérték, akkor 2 miatt $d(P,Q) = \mu(\bigcup_{X\in\overline{PQ}} X^*)/2$ nem negatív, és 1 miatt pontosan akkor tűnik el, ha $P \equiv Q$. Ráadásul 3 miatt a

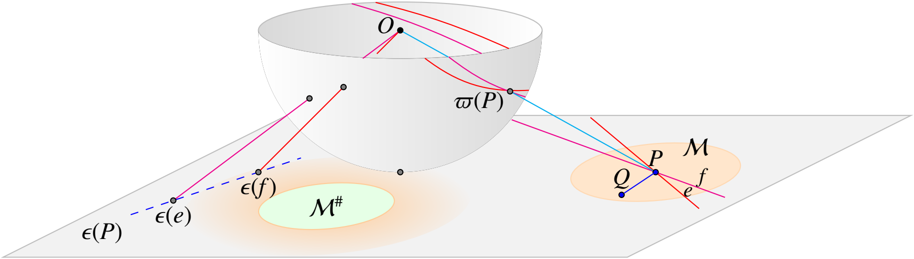
$$2d(P,Q) + 2d(Q,R) = \mu\Big(\bigcup_{X\in\overline{PQ}} X^* \cup \bigcup_{Y\in\overline{QR}} Y^*\Big) = \mu\Big(\bigcup_{Z\in\overline{PR}} Z^*\Big) + \mu(\{XY : X \in \overline{PQ} \wedge Y \in \overline{QR}\})$$

$$= 2d(P,R) + \mu\Big(\bigcup_{X\in\overline{PQ}} X^* \cap \bigcup_{Y\in\overline{QR}} Y^*\Big) > 2d(P,R)$$

háromszög-egyenlőtlenség is teljesül. Végül 1 miatt d folytonos is. ∎

Blaschke–Busemann-konstrukció II

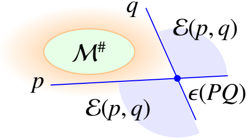
Egy ϵ polaritás a P ponton átmenő minden e hipersík $\epsilon(e)$ *pólusát* a P pont $\epsilon(P)$ *poláris* hipersíkjára viszi, ezért az $\mathcal{M}$-et elkerülő hipersíkok pólusainak $\mathcal{M}^\#$ konvex, nem üres korlátos halmaza komplementer az $\mathcal{M}^*$ hipersíkjai pólusainak halmazához.



Az ϵ polaritás a $\overline{PQ}$ szakaszhoz az

$$\epsilon(\overline{PQ}^*) = \bigcup_{X\in\overline{PQ}} \epsilon(X^*) = \bigcup_{X\in\overline{PQ}} \epsilon(X) =: \mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q)).$$

kétélet rendeli. Ezt a poláris $p = \epsilon(P)$ és $q = \epsilon(Q)$ hipersíkok határolják, és



(2.1) $$\mu \circ \epsilon(\mathcal{E}(\epsilon(P), \epsilon(Q))) = \mu(\overline{PQ}^*).$$

A Blaschke–Busemann-konstrukcióban ez éppen $d(P,Q)$, ezért az $\mathcal{M}^\#$ komplementerén keressük a megfelelő mértéket.

Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává I

A háromszög-egyenlőtlenség miatt, mivel bármely nem elfajuló konvex $\square(PQRS)$ négyszög $X = \overline{PR} \cap \overline{QS}$ átlós pontja az $\mathcal{M}$ eleme, minden $d\colon \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$ projektív metrika teljesíti a

(2.2) $$d(P,R) + d(Q,S) - d(P,S) - d(Q,R) \geq 0,$$

négyszög-egyenlőtlenséget, ahol egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\square(PQRS)$ szakasszá fajul.

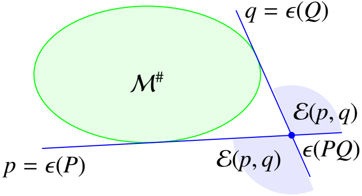
Kiterjesztési tétel [12]. *Ha a folytonos, korlátos $\delta\colon \partial\mathcal{M} \times \partial\mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$ metrika teljesíti a (2.2) négyszög-egyenlőtlenséget minden konvex, nem elfajuló, az $\partial\mathcal{M}$-be írt $\square(PQRS)$ négyszögre, akkor van olyan $d\colon \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$ projektív metrika, melynek δ a megszorítottja.*

Bizonyítási vázlat. Konstruálni kell egy p-típusú $\mu\colon 2^{\mathcal{M}^*} \to \mathbb{R}_+$ mértéket, amelyre $\delta(P,Q) = \mu(\bigcup_{X\in\overline{PQ}} X^*)/2$ minden $P,Q \in \partial\mathcal{M}$ esetén.
Először egy ν halmazfüggvényt készítünk a síkon, ami generálni fogja a $\mu \circ \epsilon$ mértéket.

A $\partial\mathcal{M}$ minden $\overline{PQ}$ húrjára legyen

(2.3) $$\nu(\mathcal{E}(\epsilon(P),\epsilon(Q))) := \delta(P,Q).$$

Ez (2.1) miatt elkerülhetetlen.
Az $\mathcal{M}^\#$-et nem tartalmazó olyan kétéleket, amelyek határoló egyenesei érintik az $\mathcal{M}^\#$-et, *támaszkétélnek* nevezzük.

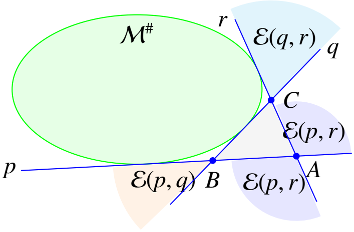


Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává II

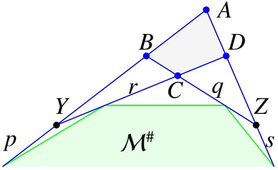
Ha az $\triangle(ABC)$ háromszög $p = AB = \epsilon(P)$, $q = BC = \epsilon(Q)$, és $r = CA = \epsilon(R)$ oldalegyenesei olyanok, hogy $\mathcal{E}(p,q)$, $\mathcal{E}(q,r)$, és $\mathcal{E}(r,p)$ is támaszkétél, akkor a p,q,r egyeneseken kívül $2\chi_{\triangle(ABC)} = \chi_{\mathcal{E}(p,q)} + \chi_{\mathcal{E}(q,r)} - \chi_{\mathcal{E}(r,p)}$. Emiatt a (2.3) értelmében legyen

(2.4) $\quad \nu(\triangle(ABC)) := (\delta(P,Q) + \delta(Q,R) - \delta(P,R))/2.$

Ez nem negatív a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Az ilyen háromszögek a *támaszháromszögek*.



Legyen $\square(ABCD)$ egy konvex négyszög, a $p = AB = \epsilon(P)$, $q = BC = \epsilon(Q)$, $r = CD = \epsilon(R)$, és $s = DA = \epsilon(S)$ oldalegyenesekkel. Ha $\mathcal{E}(p,q)$, $\mathcal{E}(q,r)$, $\mathcal{E}(r,s)$, és $\mathcal{E}(s,p)$ is támaszkétél, akkor a $\square(ABCD)$ négyszög $X = AC \cap BD$, $Y = p \cap r$, és $Z = q \cap s$ átlós pontjai az $\triangle(YBC)$, $\triangle(ZDC)$, $\triangle(YAD)$, és $\triangle(ZAB)$ támaszháromszögeket alkotják, így (2.4) értelmében legyen



$$(2.5)\qquad \begin{aligned} 2\nu(\square(ABCD)) &:= \nu(\triangle(YAD)) + \nu(\triangle(ZAB)) - \nu(\triangle(YBC)) - \nu(\triangle(ZCD)) \\ &= \delta(P,Q) + \delta(R,S) - \delta(R,Q) - \delta(P,S). \end{aligned}$$

Ez nem negatív a négyszög-egyenlőtlenség miatt. Az ilyen négyszögek a *támasznégyszögek*.

Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává III

Legyen Q a támasznégyszögek halmaza. Legyen a Q-t tartalmazó legkisebb félgyűrű R. Ekkor R elemei olyan páronként diszjunkt, zárt $\mathcal{P}$ poligonok uniói, amelyeknek minden oldalegyenese az $\mathcal{M}^\#$ érintője.

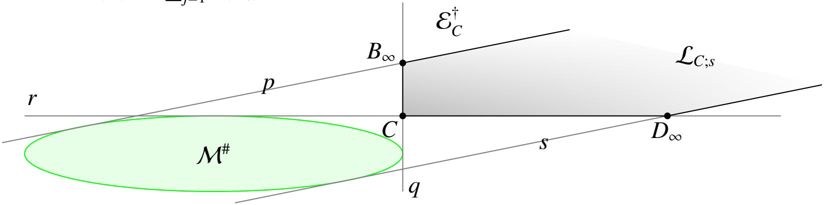
Mivel a $\mathcal{P} \in$ R poligon minden oldalegyenese az $\mathcal{M}^\#$ érintője, ezek a $\mathcal{P}$ poligont véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{Q}_i \in$ Q $(i = 1, \dots, n)$ négyszögre vágják. Ezért legyen

(2.6) $$\nu(\mathcal{P}) := \textstyle\sum_{i=1}^{n} \nu(\mathcal{Q}_i).$$

Mivel minden $\mathcal{R} \in$ R halmaz páronként diszjunkt, zárt $\mathcal{P}_j \in$ R $(j = 1, \dots, \ell)$ poligonok uniója, a ν definiálását ezzel zárjuk:

(2.7) $$\nu(\mathcal{R}) := \textstyle\sum_{j=1}^{\ell} \nu(\mathcal{P}_j).$$

Legyen $\mathcal{E}_C$ az $\mathcal{M}^\#$ tartomány $C \notin \mathcal{M}^\#$ ponton áthaladó r és q támaszegyenesei által alkotott nem támaszkétél. $\mathcal{E}_C^\dagger$ ennek az a síknegyeda, melynek $\mathcal{M}^\#$ nem része. Legyenek s és p az $\mathcal{M}^\#$ olyan párhuzamos támaszegyenesei, melyek közé esik a C pont. *Csúcsos sávnak* nevezzük az $\mathcal{E}_C^\dagger$ és az s és p közti sáv $\mathcal{L}_{C;s}$ metszetét, továbbá $D_\infty = r \cap s$ és $B_\infty = q \cap p$.

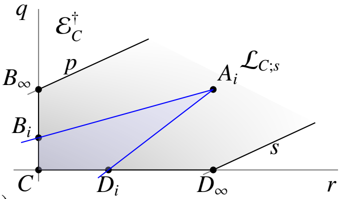


Állítjuk, hogy $\nu_{C;s} = \nu\restriction_{\mathrm{R}_{C;s}}$, *ahol* $\mathrm{R}_{C;s} = \{\mathcal{R} : \mathrm{R} \ni \mathcal{R} \subset \mathcal{L}_{C;s}\}$, *kiterjeszthető mértékké* $\mathcal{L}_{C;s}$*-re.*

Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává IV

A $\nu_{C;s}$ halmaz-függvény nyilván additív és σ-szubadditív is. A σ-végességét kell igazolni.

Legyenek a $D_i \in \overline{CD_\infty}$ és $B_i \in \overline{CB_\infty}$ $(i = 1, \dots, \infty)$ pontok olyanok, hogy rendre $\overrightarrow{CD_\infty} = i\overrightarrow{D_iD_\infty}$ és $\overrightarrow{CB_\infty} = i\overrightarrow{B_iB_\infty}$. Legyen $s_i = \epsilon(S_i)$ és $p_i = \epsilon(P_i)$ az $\mathcal{M}^\#$ olyan érintője, melyre rendre $D_i \in s_i \neq r$ és $B_i \in p_i \neq q$. Ha ezek metszéspontja $A_i = p_i \cap s_i$, akkor $\bigcup_{i=1}^{k} \square(A_iB_iCD_i) = \square(A_kB_kCD_k)$ és $\bigcup_{i=1}^{\infty} \square(A_iB_iCD_i) = \mathcal{L}_{C;s}$. Eszerint



$$2\nu_{C;s}(\mathcal{L}_{C;s}) = 2\lim_{k\to\infty}\nu_{C;s}(\square(A_kB_kCD_k)) = 2\lim_{k\to\infty}\nu(\square(A_kB_kCD_k))$$

$$= \lim_{k\to\infty}(\delta(P_i,R)+\delta(Q,S_i)-\delta(P_i,S_i)-\delta(Q,R)) = \delta(P,R)+\delta(Q,S)-\delta(P,S)-\delta(Q,R) < \infty,$$

ahol $P = \lim_{k\to\infty} P_k$, $S = \lim_{k\to\infty} S_k$, $q = \epsilon(Q)$, $r = \epsilon(R)$, $p = \epsilon(P)$, $s = \epsilon(S)$, és δ folytonos.

A Caratéodory-tétel [8, Theorem 1.53] értelmében tehát a $\nu_{C;s}$ kiterjed egy σ-véges $\mu_{C;s}$ mértékké az $\mathcal{L}_{C;s}$ Borel-halmazainak $\sigma(\mathrm{R}_{C;s})$ σ-gyűrűjére.

Világos, hogy *$\mu_{C;s}(\square(ABCD)) = \nu(\square(ABCD))$ minden a $\mathrm{R}_{C;s}$ gyűrűben lévő $\square(ABCD)$ négyszögre*, amiért minden $\mu_{C;s}$ mérték egyforma értéket vesz fel minden a csúcsos sávjaik metszetében lévő $\square(ABCD)$ négyszögre. Vagyis *mindezen mértékek egyenlőek a csúcsos sávjaik közös Borel halmazain*.

Határmetrika kiterjesztése projektív metrikává V

Előzőek alapján a μ mérték következő definíció helyes: *Egy adott $\mathcal{B}$ Borel halmaz μ mértékét úgy kapjuk, hogyfeldaraboljuk kisebb részekre, melyek már egy-egy $\mathcal{L}_{C;s}$ csúcsos sávba esnek, aztán ezeknek a megfelelő $\mu_{C;s}$ által adott mértékeit összeadjuk.*
A bizonyítás befejezéséhez már csak ellenőriznünk kell, hogy δ annak a d projektív metrikának a határra való megszorítása, melyet a Blaschke–Busemann-konstrukció készít a μ mértékből.
Legyen $\square(ABCD)$ egy támasznégyszög a $p = AB = \epsilon(P)$, $q = BC = \epsilon(Q)$, $r = CD = \epsilon(R)$, és $s = DA = \epsilon(S)$ oldalegyenesekkel. Ekkor

$$\begin{aligned}\delta(P,Q) + \delta(R,S) - \delta(R,Q) - \delta(P,S)\\ &= 2\nu(\square(ABCD)) = 2\nu_{C;s}(\square(ABCD)) = 2\mu_{C;s}(\square(ABCD)) = 2\mu(\square(ABCD))\\ &= d(P,Q) + d(R,S) - d(R,Q) - d(P,S),\end{aligned}$$

ahol az első és utolsó egyenlőséget a (2.5) levezetés igazolja. Amennyiben $Q \to R$ és $S \to P$ az iménti egyenlőségben, akkor a δ és d folytonossága az $2\delta(P,R) = 2d(P,R)$ egyenlőségre vezet, ami teljessé teszi a bizonyítást.

■

A Caratéodory-tétel unicitási részéből nem következik a kiterjesztési tételünkben szereplő projektív metrika unicitása, mivel a ν definíciójának egyértelműsége nem igazolt.

A határmetrika meghatározza a projektív metrikát I

Határmerevség [12]. *Minden projektív metrikát meghatároz a határmetrikája.*

Bizonyítási vázlat. Egy $d{:}\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}_+$ projektív metrikához a Kiterjesztési tétel szerint van olyan p-típusú $\mu\colon 2^{\mathcal{M}^*}\to\mathbb{R}_+$ mérték, melyre $d(P,Q)=\mu(\mathcal{E}(\epsilon(P),\epsilon(Q)))$. Eszerint a d meghatározásához elegendő a μ meghatározása a δ határmetrikából.

A (2.3), (2.4) és (2.5) formulák alapján a μ értékét a támaszkétéleken, támaszháromszögeken és támasznégyszögeken

$$2\mu(\mathcal{E}(\epsilon(P),\epsilon(Q)))=\delta(P,Q),$$

$$2\mu(\triangle(ABC))=\delta(P,Q)+\delta(Q,R)-\delta(P,R),\ \text{és}$$

$$2\mu(\square(ABCD))$$
$$=2(\delta(P,Q)+\delta(R,S)-\delta(R,Q)-\delta(P,S))$$

adja, ahol $P,Q,R,S\in\partial\mathcal{M}$.

Legyen Q a támasznégyszögek halmaza, R pedig legyen a legszűkebb félgyűrű, ami tartalmazza. Ekkor az R minden eleme olyan páronként diszjunkt zárt poligonok uniója, melyeknek minden oldalegyenese az $\mathcal{M}^\#$ érintője.

Ezek a $\mathcal{P}$ poligont véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{Q}_i\in$ Q $(i=1,\dots,n)$ négyszögre vágják, ezért $\mu(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^n\mu(\mathcal{Q}_i)$.

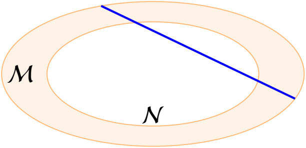
Mivel minden $\mathcal{R}\in$ R halmaz páronként diszjunkt, zárt $\mathcal{P}_j\in$ R $(j=1,\dots,\ell)$ poligonok uniója, $\mu(\mathcal{R}):=\sum_{j=1}^{\ell}\mu(\mathcal{P}_i)$. adódik. Ugyanakkor a μ mérték σ-véges minden $\mathcal{L}_{C;s}$ csúcsos sávon, így ott meghatározzák az R elemein felvett értékei a Caratéodory-tétel [8, Theorem 1.53] unicitási állítása miatt. ∎

A határmetrika meghatározza a projektív metrikát II

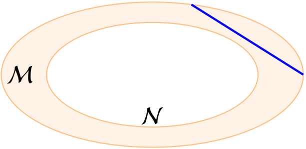
A határmetrika megszorításaival élesíthető a határmerevségi tétel ... Legyen $\mathcal{N}$ egy kompakt konvex tartomány az $\mathcal{M}$ belsejében, $\mathcal{A}$ pedig egy összefüggő nyílt ív a $\partial\mathcal{M}$ határon.

Több eltérő módon is lokalizálhatjuk a határmetrika megszorításának hatását ...

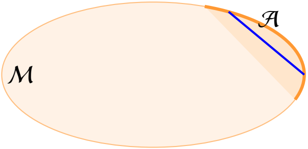
Tétel [12]. *A* $d\colon \mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}_+$ *projektív metrikát az* $\mathcal{N}$ *tartományon meghatározza határmetrikájának az* $\mathcal{N}$ *tartományt elkerülő húrokra való megszorítása.*



Tétel [12]. *A* $d\colon \mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}_+$ *projektív metrikát a* $\mathcal{M}\setminus\mathcal{N}$ *tartományon meghatározza határmetrikájának az* $\mathcal{N}$ *halmazt nem metsző húrokra való megszorítása.*



Tétel [12]. *A* $d\colon \mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}_+$ *projektív metrikát a* $\mathrm{Conv}\mathcal{A}$ *tartományon meghatározza határmetrikájának az* $\mathcal{A}$ *ívről induló húrokra való megszorítása.*



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

Kurusa Árpád
Rényi A. Matematikai Kutatóintézet, MTA
SZTE TTIK Bolyai Intézet

http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa
karpad@renyi.hu
kurusa@math.u-szeged.hu

Bibligráfia szerzők szerinti sorban I

[1] R. V. Ambartzumian, A note on pseudo-metrics on the plane 2, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **37** (1976), 145–155; http://dx.doi.org/10.1007/BF00536777.

[2] R. Alexander, Planes for which the Lines are the Shortest Paths between Points, *Illinois J. Math.*, **22** (1978), 177–190; https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ijm/1256048729.

[3] E. Beltrami, Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Opere*, **I** (1865), 262–280.

[4] J. Boman, On generalized Radon transforms with unknown measures, *Integral geometry and tomography* (Arcata, CA, 1989), Contemp. Math. **113**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 5–15; https://doi.org/10.1090/conm/113.

[5] H. Busemann, Geometries in which the planes minimize area, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **55** (1961), 171–190.

[6] A. Hertle, A characterization of Fourier and Radon transforms on Euclidean space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273** (1982), 595–607; https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1982-0667162-6.

[7] A. Hertle, The identification problem for the constantly attenuated Radon transform, *Math. Z.*, **197** (1988), 13–19; https://doi.org/10.1007/BF01161627.

[8] A. Klenke, *Probability Theory: A Comprehensive Course*, Universitext, Springer, London, 2014; http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-5361-0.

Bibligráfia szerzők szerinti sorban II

[9] Á. Kurusa, Characterization of the Radon transform and its dual on Euclidean space, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **54** (1990), 273–276; http://pub.acta.hu/acta/viewArticle.action?dataObjectType=article&id=11077.

[10] Á. Kurusa, Translation Invariant Radon Transforms, *Math. Balkanica*, **11** (1991), 40–46; http://www.math.bas.bg/infres/MathBalk/MB-05/MB-05-040-046.pdf.

[11] Á. Kurusa, Identifying rotational Radon transforms, *Period. Math. Hungar.*, **67** (2013), 187–209; https://doi.org/10.1007/s10998-013-5391-9.

[12] Á. Kurusa and T. Ódor, Boundary rigidity of projective metrics and the geodesic X-ray transform, *manuscript* (2019), pp. 11.

[13] R. Michel, Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques, *Invent. Math.*, **65** (1981), 71–83; https://doi.org/10.1007/BF01389295.

[14] R. G. Mukhometov, The reconstruction problem of a two-dimensional Riemannian metric and integral geometry, *Sov. Math. Dokl.*, **18** (1977), 27–31; *Dokl.* Akad. Nauk SSSR, **232:1** (1977), 32–35.

[15] R. G. Mukhometov, A problem of reconstructing a Riemannian metric, *Sib. Math. J.*, **22** (1981), 420–433; https://doi.org/10.1007/BF00969776.

[16] F. Natterer, Computerized tomography with unknown sources, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1201–1212; https://www.jstor.org/stable/2101427.

Bibligráfia szerzők szerinti sorban III

[17] F. Natterer, An inverse problem for a transport equation and integral geometry, *Integral geometry and tomography* (Arcata, CA, 1989), Contemp. Math. **113**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 221–231; https://doi.org/10.1090/conm/113.

[18] L. Pestov and G. Uhlmann, Two dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid, *Ann. Math.*, **161** (2005), 1093–1110; https://doi.org/10.4007/annals.2005.161.1093.

[19] A. V. Pogorelov, *Hilbert's Fourth Problem*, Moscow, 1974.

[20] E. T. Quinto, The dependence of the generalized Radon transform on defining measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **257** (1980), 331–346; https://doi.org/10.2307/1998299.

[21] E. T. Quinto, The invertibility of rotation invariant Radon transforms, *Math. Anal. Appl.*, **91** (1983), 510–522; https://doi.org/10.1016/0022-247X(83)90165-8.

[22] D. C. Solmon, The identification problem for the exponential Radon transform, *Math. Methods Appl. Sci.*, **18** (1995), 687–695; https://doi.org/10.1002/mma.1670180903.

[23] P. Stefanov, G. Uhlmann and A. Vasy, Local and global boundary rigidity and the geodesic X-ray transform in the normal gauge, *arXiv*, (2017), pp. 51; https://arxiv.org/abs/1702.03638.

[24] Z. I. Szabó, Hilbert's Fourth Problem I, *Adv. Math.*, **59** (1986), 185–301; https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90056-3.

Az előadás felépítése

1. **Radon-transzformáció**
   - Általános definíció
   - Jellemzés és azonosítás
2. **Projektív metrikák**
   - Definíció és példák
   - Blaschke–Busemann-konstrukció
   - Határmetrika a síkon
     - Kiterjesztési tétel
     - Unicitási tételek