A BUMERANG TRANSZFORMÁCIÓ

Készitette: Kurusa Arpád
JATE, matematikus V. évfolyam

TARTALOMJEGYZÉK

xxx

I BEVEZETÉS

Legyen adott egy A halmaz és egy P részhalmaz rendszere, melynek minden $p \in P$ elemén adott egy m_p mérték. Adott továbbá egy $f: A \longrightarrow R$ függvény, mely minden m_p szerint P minden elemén integrálható. Ekkor a következő képlettel definiálhatjuk a "$\wedge$" transzformációt:

$$\hat{f}(p) = {}_p\int f \, dm_p \qquad /I.1/$$

Ha feltesszük, hogy minden $a \in A$ esetére létezik egy m_a mérték a $H_a = \{p \in P : a \in p\}$ halmazon, könnyen definiálhatjuk a "$\wedge$" transzformáció úgynevezett duálisát, melyet "$\vee$"-pal jelölünk:

$$\check{F}(a) = {}_{H_a}\int F \, dm_a \qquad /I.2/$$

ahol persze F a P-n értelmezett valós függvény, mely minden H_a halmazon integrálható m_a szerint. Észrevehetjük, hogy a duális transzformáció voltaképpen szintén /I.1/ típusú transzformáció, hiszen P-n a H_a-k alkotnak részhalmaz rendszert.

A legfontosabb felmerülő probléma ezen transzformációk invertálásának lehetősége. Az inverz keresése közben pedig szinte automatikusan vetődik fel a duális felhasználásának gondolata. Erre vezet már az az egyszerű észrevétel is, hogy ha $f: A \longrightarrow R$, akkor $(\hat{f})^{\vee}$ szintén A-t képezi R-re. Erre a gondolatra vezet az is, amikor a legegyszerűbb esetekben próbálkozunk.

Nézzünk erre egy példát. Ha A véges és P a legalább félhalmaznyi részhalmazainak rendszere, továbbá m_p a későbbiekben meghatározandó feltételeknek eleget tevő mérték, vagyis „elég jó" , akkor a /I.1/ képlet nem más mint egy $|P|$ egyenletből álló algebrai egyenletrendszer f-re nézve, /I.2/ képlet pedig megfelelő m_a esetén nem más, mint ennek az egyenletrendszernek a megoldása.

Ebben a formában tehát Cramer tétele azt mondja ki, hogy ha az $(m_p(a))_{p\in P,\, a\in A}$ mátrixnak létezik inverze, akkor invertálva olyan m_a mértéket kapunk P-n, melyre igaz az $(\hat{f})^{\vee}=f$ azonosság. Ez a képlet pedig lényegében a "$\wedge$" transzformációt invertálja.

Ezután már nem olyan meglepő a következő eredmény, melyet 1917-ben bizonyitott J. Radon. Legyen $A=R^3$, P a sikok halmaza, m_p minden p sikon a szokott Euklideszi mérték, mig m_a az $a\in R^3$ ponton áthaladó sikokon a Haar mérték, amit szemléletesen ugy nyerhetünk, ha ezeket a sikokat gondolatban azonositjuk egy az a pontban állitott a sikra merőleges egyenes által az a körüli egységgömbből kimetszett két ponttal, és ezeken vesszük a gömb felületmértékét. Ekkor tehát:

$$f=\frac{-1}{4\pi^2}L\left(\hat{f}\right)^{\vee}$$

ahol L a Laplace operátor és $f\in S/R^3/$. Később Radon tiszteletére ezt a "$\wedge$" transzformációt Radon transzformációnak nevezték el, ami aztán öröklődött a d dimenziós n dimenzióban vett általánositásaira is.

A /I.1/ által meghatározott transzformációt d dimenziós n dimenzióban vett Radon transzformációnak nevezzük, ha ott $A=R^n$, $P=P_d^n$, m_p a p-n vett Euklideszi mérték, mig dualisánál, melyet /I.2/ határoz meg, m_a a H_a Haar mértéke, melyet H_a és az a körüli forgáscsoport azonositásával nyerhetünk. Itt P_d^n-vel jelöltük az n dimenziós Euklideszi tér d dimenziós hiperaltereit.

Ismeretes a következő tétel: Ha $f\in S/R^n/$, akkor

$$f=\frac{1}{c}L^{\frac{n-1}{2}}\left(\left(\hat{f}\right)^{\vee}\right) \quad \text{ahol} \quad c=(-4\pi)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(1/2)}$$

A következőkben ennek és általanositásainak fogjuk egy új bizonyitását adni.

II. BUMERÁNG TRANSZFORMÁCIÓ

A bumeráng transzformáció is /I.1/ tipusú transzformáció, illetve mint majd latjuk, a Radon transzformáció duálisának konstansszorosa.

Jelöljük S_x^{n-1}-nel az S^{n-1} gömbnek azt a felét, melyre $(e,x)\geq 0$, ha $e\in S_x^{n-1}$, és legyen $f_e: R^n \longrightarrow R$ az a függvény, melyet az $f: R^n \longrightarrow R$ függvényből az $f_e(x)=f(e\cdot(e,x))$ képlettel nyerünk $e\in S_x^{n-1}$-re.

Definiáljuk mostmár a B^t bumeráng operátort a következő módon:

$$B^t(f(t))(x) = \int_{S_x^{n-1}} f_e(x)\, dm(e) \tag{/II.1/}$$

ahol m az S^{n-1} Haar mértéke.

Itt a jobb-felső 't' index azt jelöli, hogy a bumeráng transzformációt a 't' változójú függvényre kell elvégezni. Ezt a 't' indexet csak akkor fogjuk kiirni, amikor enélkül az adott formula félreérthető lenne, és ugyanigy teszünk majd f argumentumával is.

Cilinder vagy nyél függvényeknek nevezzük azokat az $f: R^n \longrightarrow R$ függvényeket, melyekre létezi $e\in S^{n-1}$, hogy minden $x\in R^n$ esetén $f(x)=f_e(x)$. Gömbfüggvénynek nevezzük az $f: R^n \longrightarrow R$ függvényt, ha létezik $\bar{f}: R_+ \longrightarrow R$, melyre $f(x)=\bar{f}(|x|)$.

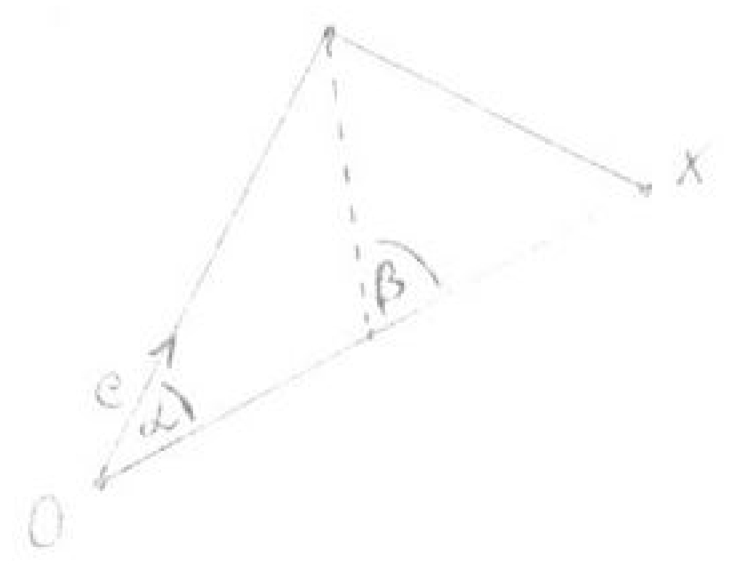
Eszerint a bumeráng transzformáció nem tesz mást, mint, hogy az adott függvényt nyélfüggvényekre bontja és azokat integrálja. Irjuk azonban be a /II.1/ képletbe f_e definicióját:

$$B^t(f(t))(x) = \int_{S_x^{n-1}} f(e\cdot(e,x))\, dm(e)$$

Mivel e végig fut S_x^{n-1}-n, Thalesz tétele értelmében az $e\cdot(e,x)$ vektor keresztül fut a $\overline{Ox}$ átmérőjű gömb minden pontján. Ez mutatja, hogy tényleg /I.1/ tipusú transzformációrol van szó, ahol az ottani jelöléseket használva $A=R^n$ P az origón átmenő gömbök halmaza, melyet természetes módon azonosithatunk az origóval átellenes pontok halmazával, m_p pedig nem más, mint az origó körüli egységgömb felületmértékének kivetitése p-re. Ez az észrevétel lehetővé teszi, hogy a sikon újabb definiciót adjunk.

<u>II.2 Tétel</u>: Ha $f:R^2 \longrightarrow R$ függvény integrálható az origón átmenő körökön, akkor $2B(f)(x)$ nem más, mint f átlaga a $\overline{0x}$ átmérőjü gömb felszinén.

A bizonyitás a kerületi szögek tételén alapszik, mely szerint bármely kerületi szög éppen fele a hozzá tartozó középponti szögnek.



A rajzon látható jelölésekkel tehat $2\alpha=\beta$, ami azt jelenti, hogy a B/f/-t definiáló integrálban szereplő kivetitett mérték éppen fele a körre a kör középpontjábol kivetitett szögmértékének, ami éppen a normált kerületi mérték. Ez pedig nyilvan a tétel állitását adja. -OK-

Sajnos ez az állitás több dimenzióban nem igaz, már csak azért sem, mert mint azt könnyü látni, állitásunk ekvivalens a kerületi szögek tételével, mely kettőnél nagyobb dimenzióban nem igaz / más konstans szorzóval se /, igy több dimenzióban meg kell elégednünk a definicióval magával, illetve a /1.1/ tipusú értelmezéssel.

II-1 FOLYTONOS GÖMBFÜGGVÉNYEK INVERZE

Mint tudjuk a $t\in S_x^{n-1}$-hez tartozó felületelem $\frac{dt_{n-1}\dots dt_1}{t_n}$, ezért /II.1/ miatt

/II-1.1/ $$B(f)(x)=\int_0^1\int_{-s_1}^{s_1}\dots\int_{-s_{n-2}}^{s_{n-2}} f(tt_1|x|)+f(t^{\square}t_1|x|)\,\frac{dt_{n-1}\dots dt_2dt_1}{t_n}$$

ahol $s_i=\sqrt{1-t_1^2-\dots-t_i^2}$, $t=(t_1,\dots,t_n)$ és $t^{\square}=(t_1,\dots,t_{n-1},-t_n)$ valamint úgy tekintjük, hogy x az első tengelyen van, illetve a koordináta rendszert ugy vettük fel, hogy x éppen az első tengelyre essek.

Jelöljük a továbbiakban G_p-vel a $P\in R^n$ pont körüli folytonos gömbfüggvények terét, és amig külön nem irjuk az ellenkezőjét, legyen $f\in G_0$ és $\bar{f}:R_+\longrightarrow R$ olyan függveny, melyre $f(x)=\bar{f}(|x|)$.

Elvégezve /II-1.1/-ben az integrálásokat, adódik:

/II-1.2/ $$B(f)(x)=2c_0c_1\dots c_{n-3}\int_0^1\bar{f}(|x|t_1)\sqrt{1-t_1^2}^{\,n-3}dt_1$$

ahol $c_k=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^k\alpha\,d\alpha$, hiszen ha $k\geq -1$ egész, akkor

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}^{\,k}dx=a^{k+1}\cdot c_{k+1}$$

Legyen $f_i:R^n\longrightarrow R$ / $f_i(x)=|x|^i$ / az i termeszetes számokra, /II-1.2/-ből nyerjük az alábbit:

/II-1.3/ $$B(f_i)(x)=f_i(x)2c_0c_1\dots c_{n-3}\int_0^1 t_1^i\sqrt{1-t_1^2}^{\,n-3}dt_1$$

Könnyen kiszamithatjuk ez utóbbi integrál értékét, ha egyszerü helyettesitéssel behozzuk a trigonometrikus függvényeket.

Vezessük be a $d_k^m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k\alpha\cos^m\alpha\,d\alpha$ jelölést. Parciális integrálással nyerjük az alábbiakat:

$$kc_k=(k-1)c_{k-2}\qquad (k+1)d_k^m=(m-1)d_{k+2}^{m-2}\qquad (m+1)d_k^m=(k-1)d_{k-2}^{m+2}$$

A triviális $d_{k+2}^{m-2}=d_k^{m-2}-d_k^m$ illetve $d_{k-2}^{m+2}=d_{k-2}^m-d_k^m$ azonosságokat figyelembe véve, újabb immár bizonyos szamitásokat is lehetővé tévő azonossagokat nyerünk.

$$(m+k)d_k^m=(m-1)d_k^{m-1} \quad \text{és} \quad (m+k)d_k^m=(k-1)d_{k-2}^m$$

Ezek segitségével könnyü teljes indukciós bizonyitását adhatjuk az alábbiaknak.

II-1.4 Tétel: Ha $k\geq 1$ természetes szám, akkor

/i/ $kc_kc_{k-1}=2\pi$

/ii/ Ha m páros $$d_k^m d_{k-1}^m=\frac{\pi}{2}\frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(m-1))^2}{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m)}$$

/iii/ Ha m páratlan $$d_k^m=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(m-1)}{(k+1)(k+3)\ldots(k+m-2)(k+m)}$$

Következmény: Ha n páros

$$c_0c_1\cdot c_2c_3\cdot\ldots\cdot c_{n-2}c_{n-3}=\frac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-5)(n-3)}$$

ha pedig n páratlan

$$c_0c_1\cdot c_2c_3\cdot\ldots\cdot c_{n-2}c_{n-3}=\frac{2^{\frac{n-3}{2}}\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(n-5)(n-3)}$$

Ugyanakkor /II-1.3/-ból nyilvánvalóan

$$B(f_1B(f_i))(x)=f_{i+1}(x)(2c_0c_1\cdot\ldots\cdot c_{n-3})^2d_i^{n-2}d_{i+1}^{n-2}$$

melybe ha beirjuk a következmény eredményeit illetve előbbi tételünk utolsó két formuláját, azt látjuk, hogy

$$B(f_1B(f_i))(x)=f_{i+1}(x)\frac{(2\pi)^{n-1}}{(i+1)(i+2)\cdot\ldots\cdot(i+n-1)}$$

mégpedig minden egynél nagyobb n természetes számra, amiből elemi integrálási szabályokkal adódik:

/II-1.5/ $$f_{n-2}(x)B(f_1B(f_i))(x)=(2\pi)^{n-1}\int_0^x\int_0^{y_1}\cdots\int_0^{y_{n-2}}f_i(y_{n-1})dy_{n-1}\ldots dy_1$$

Tekintve, hogy mindkét oldalon csak lineáris operátorok szerepelnek, /II-1.5/ természetesen igaz az f_i-k tetszőleges véges lineáris kombinációjára is.
Ugyanakkor az is igaz, hogy mindkét oldal operátorai folytonosak az egyenletes konvergenciára nézve, így /II-1.5/ igaz az f_i-k lineáris kombinációinak egyenletes lezártjában lévő bármely függvényre. A Stone-Weierstrass tétel viszont éppen azt állítja, hogy minden folytonos függvény ebben a térben van.

<u>II-1.6 Tétel</u>: ha $f\in G_0$, akkor

$$f_{n-2}(x)\,B(f_1 B(f))(x)=(2\pi)^{n-1}\int_0^x\int_0^{y_1}\cdots\int_0^{y_{n-2}} f(y_{n-1})\,dy_{n-1}\ldots dy_1$$

ahol az integrálokat sugárirányban kell venni.

<u>II-1.7 Lemma</u>: Ha $h\in G_0$ és $B/h/=0$, akkor $h=0$.

Előző tételünkből közvetlenül következik, hogy $B/h/=0$ esetén:

$$0=\int_0^x\int_0^{y_1}\cdots\int_0^{y_{n-2}} h(y_{n-1})\,dy_{n-1}\ldots dy_1$$

Mivel h folytonos, itt n-1 deriválás után h=0-t kapunk. -OK-

<u>II-1.8 Tétel</u>: G_0-n a bumerang transzformáció bijekció.

Az eddigieket figyelembe véve nyilván elegendő a bumeráng transzformáció szürjektivitását megmutatni. Legyen $f\in G_0$ és

$$g(x)=(2\pi)^{1-n}\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1}\left(f_{n-2}B(f_1 f)\right)(x) \qquad /II-1.9/$$

Ekkor II-1.6 tétel szerint

$$f_{n-2}(x)\,B(f_1 f)(x)=f_{n-2}(x)\,B(f_1 B(g))(x)$$

Ha $x\neq 0$, akkor II-2.7 lemma szerint, ebből $f/x/=B(g)(x)$ következik, de mivel mindkét oldal folytonos, ez x=0-ban is igaz, tehát $f=B/g/$. -OK-

Az eddigiekben a bumeráng transzformációt úgy vizsgáltuk, hogy a transzformációhoz szükséges gömbök mindig az origón mentek át. Csakhogy az origót végsősoron tetszőlegesen választhatjuk, így kézenfekvő a következő definició.

A B_P^v operátort a v változóra vonatkozó $P\in R^n$ pont körüli bumeráng transzformációnak nevezzük, ha

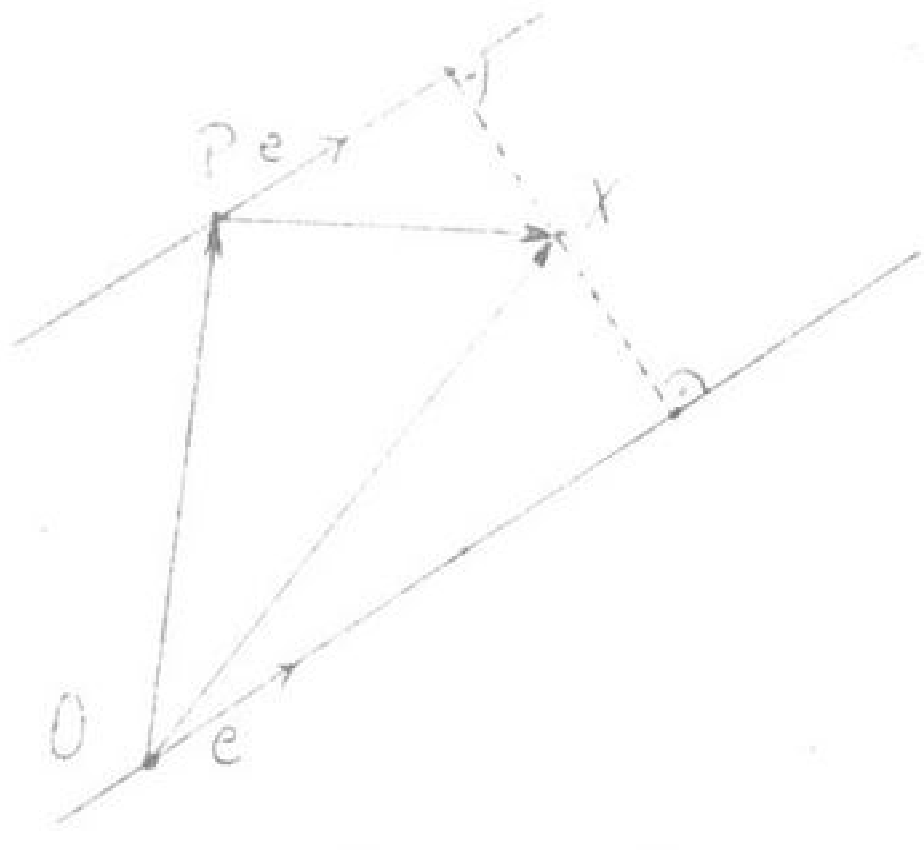
$$B_P^v\left(f(v)\right)(x)=B^t\left(f(t+P)\right)(x-P)$$

Nyilván mindaz amit a bumeráng transzformációról eddig megtudtunk, bármely P esetén B_P-re is igaz, ha P-t tekintjük origónak.

Eszerint, ha $f\in G_P$, akkor létezik $g\in G_P$, melyre $f=B_P/g/$. A definició szerint ennek jelentése:

$$f(x)=B^t\left(g(t+P)\right)(x-P) \quad \text{amiből} \quad g(t)=B^{-1}\left(f(x+P)\right)(t-P)$$

Nézzük most meg, hogyan "müködik" a B_P operátor g-n! Mint azt már a /II.1/ képlet kapcsán megjegyeztük, ilyenkor g-t cilinder függvényekre bontjuk, és azokat integráljuk, de most nem az origó körül bontjuk fel g-t, hanem a P pont körül, vagyis az $e\in S^{n-1}$ irányhoz tartozó nyélfüggvény g-ből a P-n átmenő és e irányú egyenesre való megszorítással alakul ki.



Ahhoz tehát, hogy megkapjuk f bumeráng inverzét, csak egy olyan h függvényt kell keresnünk, melynek a belőle az origóban nyerhető nyélfüggvényei megegyeznek a g-ből P-ben nyert nyélfüggvényekkel. Ez éppen azt jelenti, mint az a rajzon jól látható, hogy $h_e(x)=g(P+e\cdot(x-P,e))$ teljesül minden $e\in S^{n-1}$ és $x\in R^n$ esetén. Ez a képlet azonnal adja h explicit alakját, ha $|x|\cdot e$-t helyettesitünk.

$$h(x) = g\left(P + x \cdot \frac{(x-P,x)}{(x,x)}\right)$$

Mivel ennek csak $x\neq 0$ esetén van értelme, legyen definició szerint $h/0/=0$. Természetesen h az origót kivéve mindenütt folytonos.

<u>II-1.10 Tétel</u>: Ha $f\in G_p$ valamely $P\in R^n$ pontra, akkor a

$$h(x) = B^{-1}\left(f(t+P)\right)_{(x-P)} = (2\pi)^{1-n}\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1}\left(f_{n-2}B^{-1}\left(f_1(t)f(t+P)\right)\right)\left(x\frac{(x-P,x)}{(x,x)}\right)$$

függvény, mely az origóban 0, az origó kivételével mindenütt folytonos, és $f=B/h/$.

Ezzel tehát mostmár minden folytonos gömbfüggvénynek meg tudjuk határozni egy bumeráng inverzét, csakhogy a képlet, ami erre szolgál, nagyon bonyolult. Most a /II-1.3/ képletre és a II-1.4 tétel harmadik pontjára támaszkodva fogunk egy olyan formulát megmutatni, mely bár csak páratlan dimenzióban igaz, de lényegesen egyszerübb.

<u>II-1.11 Tétel</u>: Ha $n\in N$ páratlan és $f\in G_p$ valamely $P\in R^n$-re, akkor a

$$h(x) = M^{\frac{n-1}{2}}\left(f_{n-1}(v)f(v+P)\right)\left(x\frac{(x-P,x)}{(x,x)}\right)$$

függvény, mely az origóban 0, az origó kivételével mindenütt folytonos, és $f=B/h/$, ahol

$$M(\varphi) = \frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi(x)}{2\pi r}\right)$$

Végig nézve újra II-1.10 tétel bizonyitását, világossá válik, hogy a bizonyitás a /III-1.5/ képlet miatt jutott az ottani formulához, igy nyilvánvalóan elég látni:

$$f_{n-2}(x)B(f_2)(x) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^x f_1(y_k)\int_0^{y_k}\cdots f_1(y_2)\int_0^{y_2} f(y_1)\,dy_1\cdots dy_k$$

Ez /II-1.3/ és II-1.4 miatt igaz, hiszen k éppen n-1 fele.

-ÜK-

II-2 AZ INVERZFORMULA

Természetes gondolat az előző fejezet eredményeit nézve, hogy általánosabb függvényekre úgy próbáljunk inverzet adni, hogy azt mintegy "felépitjük" a gömbfüggvényekből. Jó lehetőséget ad erre az alábbi lemma.

II-2.1 Lemma: Legyen $g:R^n \times R^n \longrightarrow R$ és $g\in S/R^n \times R^n/$, valamint $f/x/=\int g/x,y/\,dy$, ahol az integrált az egész téren vesszük. Ekkor $B(f)(x)=\int_{R^n} B^t(g(t,y))(x)\,dy$

Nyilván alkalmazhatjuk a Fubini tételt, igy ez a lemma triviális. -OK-

Ennek egyenes következménye, hogy ha $f/x/=\int g/x,y/\,dy$, akkor a

$$h(x)=\int_{R^n}(B^t)^{-1}(g(t,y))(x)\,dy$$

függvény éppen f inverze, vagyis $f=B/h/$. Ez a gondolat adja az ötletet, hogy tekintsük az $f/x/=\int f/y/\delta/x-y/\,dy$ előállitást, ahol $\delta/x/$ az R^n-n vett Dirac féle disztribúció. Eszerint elég volna a Dirac féle disztribúció bumeráng inverzét venni, abból már adódna f bumeráng inverze. Az ötlet kivitelezéséhez szükséges az alabbi lemma.

II-2.2 Lemma: Legyen $v_k\in G_0$ minden k természetes számra olyan kompakt tartójú függvény, mely végtelenszer deriválható és ha k a végtelenbe tart, akkor v_k disztribúció értelemben tart a Dirac féle disztribúcióhoz. Ekkor a

$$V_k: R\longrightarrow R \quad \left(x\longmapsto \frac{|x|^{n-1}v_k(ex)\,\Omega_{n-1}}{2}\right)$$

függvénysorozat R-n tart a Dirac féle disztribúcióhoz, ahol $e\in S^{n-1}$.

A bizonyitáshoz két dolgot kell igazolni V_k-ra:

$$\int_{\mathbb{R}} V_k(t)dt = 1 \qquad \text{és} \qquad \int_{|t|>k} V_k(t)\,dt \longrightarrow 0$$

Tekintsük tehát a következő egyenlőséget:

$$\int_k^\infty V_k(t)dt = \frac{1}{2}\int_k^\infty t^{n-1}\int_{S^{n-1}} v_k(t\omega)dm(\omega)dt = \frac{1}{2}\int_{|y|\geq k} v_k(y)dy$$

Ez igazolja mindkét fentebbi allitásunkat, hiszen v_k az R^n-n vett Dirac disztribúcióhoz tart, ha k a végtelenbe tart. -OK-

<u>II-2.3 Tétel</u>: Ha n páratlan természetes szám és f az $S/R^n/$ egy eleme, akkor a

$$h(x) = \frac{2}{\Omega_{n-1}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1}\left(R(f)(e_x, r)\right)(|x|)$$

függveny az f egy inverze, vagyis f=B/h/, ahol R a Radon operátort jelöli és $e_x = \frac{x}{|x|}$ ha $x \neq 0$.

Legyen v_k mint az előző lemmában és $T_y^k/x/=f/y/v_k/x-y/$ valamint $t_y^k \in S/R^n/$, melyre $T_y^k = B/t_y^k/$.

Legyen ezkután a t_y^k függvények y szerinti R^n-n vett integrálja a $h_k/x/$ függvény, vagyis

$$h_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} t_y^k(x)dy$$

Ha $k \to \infty$, akkor $B/h_k/ \to f$, mert $v_k \to \delta$ valamint:

$$h_k(x) = (2\pi)^{1-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1}\left(f_{n-2}B(f_1 v_k)\right)\left(x\frac{(x-y,x)}{(x,x)}\right)dy$$

Ez azt jelenti, hogy elegendő belatnunk, hogy h_k egyenletesen konvergál a h függvényhez, A Fubini tétel szerint

$$h_k(x) = (2\pi)^{1-n}\int_{\mathbb{R}} R(f)(e_x, r)\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1}\left(f_{n-2}B(f_1 v_k)\right)(x - re_x)dr$$

Helyettesitsünk most r helyébe $|x|-r$ -et, majd integráljunk parciálisan. Ennek eredménye:

$$h_k(x) = (2\pi)^{1-n}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{-d}{dr}\right)^{n-1}\left(R(f)(e_x, |x|-r)\right)(r)\,\bar{f}_{n-2}(r)B(f_1 v_k)(re_x)\,dr$$

Alkalmazzuk most a II-1.11 tétel eredményét integrálos formában azzal a Q operátorral, mely C_0-n az alábbi módon működik

$$Q(\varphi)(y) = \int_0^{|y|} x\,\varphi(x e_y)\,dx$$

Akkor:

$$h_k(x) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{-d}{dr}\right)^{n-1} \left(R(f)(e_x,|x|-r)\right)(r)\; Q^{\frac{n-1}{2}}(V_k)(r e_x)\,dr$$

Jelölje most W azt az operátort, melyre ha $\phi \in S/R/$, akkor

$$W(\phi)(y) = y \int_0^y \phi(x)\,dx$$

Alkalmazva előbbi formulánkra a parciális integrálást, azt nyerjük, hogy

$$h_k(x) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathbb{R}} W^{\frac{n-1}{2}}\left(\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1}\left(R(f)(e_x,|x|-r)\right)\right)(r)\; V_k(r e_x)\,dr$$

A II-2.2 lemma jelölését alkalmazva:

$$h_k(x) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \frac{2}{\Omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}} r^{1-n}\, W^{\frac{n-1}{2}}\left(\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1}\left(R(f)(e_x,|x|-r)\right)\right)(r)\; V_k(r)\,dr$$

De a lemma szerint V_k a Dirac féle disztribúcióhoz tart R-n, igy elég belátni, hogy a

$$g(r) = r^{1-n}\, W^{\frac{n-1}{2}}\left(\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1}\left(R(f)(e_x,|x|-r)\right)\right)(r) \cdot \frac{2}{\Omega_{n-1}} \cdot (2\pi)^{\frac{1-n}{2}}$$

függvény S/R/-ben van, és g/O/ éppen az állitásban szereplő formula.

A Radon transzformált nyilván $S/R^n/$-ben van, hisz f is ott van, ebből pedig mint azt a következő lemma mutatja, következik, hogy g is S/R/-ben van. -OK-

<u>II-2.4 Lemma</u>: Ha $g \in C^\infty/R/$, akkor a

$$k(\lambda) = \lambda^{1-n}\, W^{\frac{n-1}{2}}(g)(\lambda)$$

függvény is $C^\infty/R/$-ben van. Természetesen n páratlan természetes szám.

A bizonyitást teljes indukcióval végezhetjük el. Nyilvánvalóan teljesül az allitás n=1-re, tekintsük tehát n+2-re.

tekintve, hogy

$$\lambda^{1-(n+2)} \cdot W^{\frac{(n+2)-1}{2}}(g)(\lambda) = \lambda^{-n} \int_0^\lambda t^{n-1} \frac{W^{\frac{n-1}{2}}(g)(t)}{t^{n-1}}\, dt$$

a teljesindukciós feltétel szerint elég latni, hogy ha $h \in C^\infty/R/$, akkor az

$$f(\lambda) = \lambda^{-n} \int_0^\lambda t^{n-1} h(t)\, dt$$

is $C^\infty/R/$-beli. Egyszerü integrál transzformációval nyerjük

$$f(\lambda) = \int_0^1 t^{n-1} h(t\lambda)\, dt$$

Márpedig ebből nyilvánvaló a lemma állitása, hiszen a λ szerinti deriválás bevihető az integrálon belülre.. --OK-

Meg kell itt jegyeznünk, hogy a II-2.3 tétel nem ad minden tekintetben teljes inverzet, hiszen az eredményben szereplő függvényt az origóban nem definiálja. Ennek legfőbb oka persze az, hogy a bizonyitásban felhasznált II-1.10 tétel is ilyen volt, de szerepet játszik benne az is, hogy a II-2.3 tétel csak azt állitja, hogy az eredményül kapott függvény bumerang transzformáltja f. Márpedig egy függvényt egyetlen pontban megváltoztatva, annak bumeráng transzformáltja nem változik.

II-3 D DIMENZIÓS BUMERANG TRANSZFORMÁCIÓ

Könnyen általanosithatjuk a /II.1/ képlettel adott definiciót az ottani ötödik bekezdés észrevétele alapján. A I fejezet jelöléseivel élve, a "~" transzformációt d dimenziós n dimenzióbeli bumerang transzformációnak hivjuk, ha $A=R^n$, P az origón átmenő d dimenziós gömbök halmaza és m_p egy origó körüli a p-vel azonos d+1 dimenziós altérben levő d dimenziós egységgömb felületmértékének kivetitése p-re.

Ennek az operátornak is meg tudjuk határozni az inverzét az eddigiek ismeretében, a következő módon:

Vegyünk R^n-ben egy d+1 dimenziós alteret. Világos, hogy ott a d dimenziós bumeráng transzformáció éppen a bumeráng transzformació R^d-ben, ha tehát R_d-vel jelöljük a d dimenziós Radon operatort, a következőre jutunk.

<u>II-3.1 Tétel</u>: Ha d páros természetes szám, $h \in S/R^n/$, akkor

$$h(x)=\frac{2}{\Omega_d}(2\pi)^{\frac{-d}{2}}\left(\frac{d}{dr}\right)^d\left(R_d(\tilde{h})(e_x,r)\right)(|x|)$$

Megjegyezzük még, hogy a bizonyitás a II-1 és II-2 fejezetek módszerével közvetlenül is elvégezhető, de a fenti indoklás is elég a bizonyitáshoz, ha figyelembe vesszük, hogy különböző d+1 dimenziós sikokat véve az inverzre ott kapott értékek nem mondhatnak ellent egy másik d+1 dimenziós sik esetében kapott értekeknek, mert a formulánk olyna, hogy abban biztositva van a h inverzének léte.

III RADON ÉS BUMERÁNG TRANSZFORMÁCIÓ

Legelőbb megmutatjuk, hogy a bumerang transzformáció a Radon duálisának konstans-szorosa.

Legyen $\phi : P^n \longrightarrow R$. P^n minden eleme jellemezhető a normálisával és az origótól való távolságával, így P^n azonosítható $S^{n-1}\times R$-rel. Így tekintve ϕ-re, legyen $g/x/=\phi/\frac{x}{|x|},|x|/$, illetve ha $x=0$, akkor $g=0$. Ekkor:

$$B(g)(x)=\int_{S_x^{n-1}} g(e(e,x))\,dm(e)=\int_{S_x^{n-1}}\phi(e,(e,x))\,dm(e)$$

Ez utóbbi formula viszont éppen azt jelenti, hogy ϕ-t az x-n átmenő hipersíkok halmazán integráljuk a Haar mérték valamely többszöröse szerint, vagyis ez ϕ duális Radon transzformáltjának konstans-szorosa.

A II-2.3 tétel formulájának bumeráng transzformáltját véve, az alábbit kapjuk.

III.1 Tétel: Ha n páratlan természetes szám és $f\in S/R^n/$, akkor

$$f(x)=\frac{2}{\Omega_{n-1}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\,B\left(\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1}\left(R(f)(e_y,r)\right)(|y|)\right)(x)$$

Ez a formula tehát képes a Radon operátort invertálni. Ha II-4.1 tételből indultunk volna ki, hasonlót kaptunk volna a d dimenziós Radon operátorra. Ahhoz, hogy a fentebbi konstans szorzót kiszámíthassuk lássuk az alábbit.

III.2 Lemma: Ha $f\in S/R^n/$ és $\phi\in S/P^n/$, akkor

$$(Lf)^\wedge=\Box(\hat f) \qquad \text{illetve} \qquad (\Box\phi)^\vee=L\check{\phi}$$

Ha $f_t/x/=f/x+t/$, akkor nyilván $\hat f_t/\omega,p/=\hat f/\omega,p+(t,\omega)/$. Már-most ezt deriválva t_i szerint a $t=0$ pontban, adódik:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)^\wedge(\omega,p)=\omega_i\,\frac{\partial\hat f}{\partial p}(\omega,p)$$

és ez első állításunkat azonnal adja.

A második állításunk a következő egyenlőség triviális következménye

$$\check{\phi}(x) = c'\int_{S^{n-1}} \phi(\omega, (x,\omega))\, dm(\omega)$$

-ÜK-

Összevetve ezt a III.1 tétellel és a bevezetoben említett tétellel, azonnal kiszámíthatjuk a konstans szorzót

$$c' = (-2)^{\frac{n+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Big/ \Omega_{n-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Tekintsük most a bevezetoben említett tételt és alkalmazzuk a III.1 tételnél használt ötletünket, vagyis vegyük a formula mindkét oldalának Radon transzformáltját. Ha $S^{+}/R^{n}/$ olyan függvénytér, mely a Radon operátor képterének része, akkor az alábbi tétel feltétlen igaz.

<u>III.3 Tétel:</u> Ha $f \in S^{+}/R^{n}/$, akkor

$$f = \frac{1}{c}\,\Box^{\frac{n-1}{2}}\left(\check{f}\right)^{\wedge} \qquad \text{ahol} \qquad c = (-4\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Ez a tétel persze a bumeráng transzformációra is igaz, csak más konstanssal, és ez új utat mutat a bumeráng transzformáció inverzenek kiszamitasára, a Radon operátor képterének vizsgálatával.

IV ALKALMAZÁSOK

Eredményeink igen jól alkalmazhatók a parciális differenciál egyenletek területén, amire jó példa a következő tétel.

IV.1 Tétel: Ha a D differenciál operátor olyan, melynek megszorítása az $e\in S^{n-1}$ normálisu sikhullámokra nem azonosan 0 és $f\in S/R^n/$, akkor a Du=f egyenletnek az

$$u=\frac{1}{2}(2\pi i)^{1-n}L_x^{\frac{n-1}{2}}\int_{S^{n-1}}u_\omega\,d\omega$$

függvény megoldása, ahol u_e a $Dv=\hat{f}/e,(.,e)/$ egyenletnek olyan megoldása, mely e-től simán függ.
Azt, hogy u_e a feltételeknek megfelelően választható, 1963-ban Tréves bizonyította. Ekkor viszont a bevezetőben említett, illetve a III.1 tétel szerint

$$Du=\frac{1}{2}(2\pi i)^{1-n}L_x^{\frac{n-1}{2}}\int_{S^{n-1}}Du_\omega\,d\omega=f$$

-OK-

Mivel a $Dv=f/e,(.,e)/$ egyenlet egy változós, ezzel a parciális differenciál egyenletek egy részét sikerült visszavezetni az egy változós egyenletekre. Ha a II-2.3 tételt nézzük, abban is észre vehetjük egy másként igen bonyolult differenciál egyenlet megoldását.

IV.2 Tétel: Ha n páratlan természetes szám és $f\in S/R^n/$, akkor az $f=D^{n-1}u$ egyenletnek, ahol D a sugár szerinti differenciál operátor, az

$$u=\frac{2}{\Omega_{n-1}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}R(B(f))(e_x,|x|)$$

függvény egy megoldása.

Igazi gyakorlati alkalmazásra ad lehetőséget egy orvosi vizsgálat esete, amikor a páciens testét vékony Röntgen sugárnyalábokkal pásztázzák végig daganatokat keresve. Tegyük fel, hogy a beteg testének sürüségét egy $x\in R^3$ pontban az f függveny adja meg. Az orvosok jól tudják, hogy a daganatoknál a szövetek sürüsége ugrásszerüen nagyobb, mint az egészséges szveteknél, ezért számukra éppen elég lenne ezt az f függvényt ismerni.

1963-ban egy Cormack nevü fizikus megmutatta, hogy ha a Röntgen sugár intenzitása I_0 és a testen való áthaladás után I, akkor

$$\log(I_0/I) = \int_{\xi} f(x)\,dm_{\xi}(x)$$

ahol ξ az az egyenes, melynek mentén a sugárnyaláb haladt. Mint latjuk ez éppen az f egy dimenziós Radon transzformáltja, amiből f a bevezető tételével visszanyerhető.

JELÖLÉSEK

R^n	n dimenziós valós Euklisdeszi tér
N	természetes számok halmaza
P_d^n	R^n-bëli d dimenziós hiperalterek halmaza
P^n	R^n hipersikjainak halmaza
$(.,.)$	mindig az adott tér belsőszorzata
S^k	R^nbeli k dimenziós egységgömb
Ω_d	S^d felszine
e	egységvektor
ω	egysegvektor
G_P	$P\in R^n$ körüli folytonos gömbfüggvények tere
r	origótol való tavolsag
$S/R^n/$	$f\in S/R^n/$ akkor és csak akkor, ha $f\in C^\infty/R^n/$ és minden P polinomra: $\forall m\in N \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| \|x\|^m P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x)\right\| < \infty$
L	Laplace operátor
$\square$	$F:S^{n-1}\times R \longrightarrow R$ esetén $\square F/e,p/=\frac{\partial^2}{\partial p^2}F/e,p/$
$\wedge$	Radon operátor
$\vee$	Radon operator duálisa
R_d	d dimenziós Radon operátor
B	bumeráng operátor
B^{-1}	bumeráng transzformált egy ősét képezi
$\sim$	d dimenziós bumeráng operátor
m	gömb felszinének mértéke

xxx

IRODALOM

S. Helgason: Groups and geometric analysis
/ 1984 Academic Press Inc. /

R. Cristescu - G. Marinescu:
Bevezetés a disztribúció elméletbe és alkalmazásaiba
/ 1969 Müszaki Könyvkiadó /

P. R. Halmos: Mértékelmélet
/ 1984 Gondolat Könyvkiadó /

xxx