

BEVEZETES A LOGIKAI HALÓZATOK MATEMATIKAI
 ELMELETEHEZ

Kurusa Arpád
 Szeged, 1979. nov.

TARTALOMJEGYZEK

Előszó	1.
Matematikai alap	
- Algebrai struktúrák	2.
- Hálók	6.
- Disztributív hálól	11.
A logika algebrája, elektronikus modellezése, számológépek	13.
- Aritmetikai műveletek megvalósítása	19.
Erőekes alkalmazás	22.
Jegyzet	31.
Irodalom jegyzék	33.

- 1 -

I/1

E L Ő S Z Ó

E kis értekezés általános célja, hogy megmutassa az olvasónak, miért érdemes, miért kell foglalkozni a matematikával.

Az ókori görögök még nem látták a matematika hasznát, csak saját „belső szépsége” miatt művelték. Még a Pascal XVII. század egyik legnagyobb francia matematikusa is így vélekedett erről:

„A matematika megtartja ugyan -a rendet-, a matematika *azonban* mélysége ellenére haszontalan valami.” /1/

Igaz sokak szerint, már ez a „belső szépség” elegendő volna ahhoz, hogy foglalkozzunk vele, azonban látni kell, hogy a matematikát nem szabad önkényesen kezelni. /Ezt pl. a definíciók megalkotásánál kell szem előtt tartani./

A mai ember már tudja, a matematikának milyen óriási haszna van. Tudja, hogy Einstein relativitás elmélete a matematikában már rég megalkotott és nagyon absztrakt Riemann-féle terek nélkül elképzelhetetlen.

Tudja, hogy az oly elterjedt rádiózás alapját, a rádióhullámokat is az un. Maxwell-egyenletek alapján, Maxwell kb. 50 évvel előbb felfedezte, mint azoknak fizikai létét kimutathatták volna. Még régebben Boole angol matematikus megalkotta a „logika algebráját”, amely most, több mint 200 évvel később, a számítógépek matematikai alapját képezi.

Ezen értekezés pontos célja az, hogy megismertesse az olvasót a „logikai áramkörök” alapjaival és beillessze annak elméletét a matematika rendszerébe.

MATEMATIKAI ALAP

1. Algebrai struktúrák

Definíció: A H és a K tetszőleges halmaz $H \times K$ Descartes-féle szorzata /szorzat halmaza/ az $\{a, b\} \mid a \in H, b \in K\}$ rendezett elempárok halmaza.

Definíció: Az S nem üres halmaz $S \times S$ Descartes-féle szorzatának S -be való leképezését az S halmazon értelmezett kétváltozós /binér/ műveletnek nevezzük.

Jelölése: $f/a, b/$; $a+b$; $a \cdot b$; $a \square b$

Definíció: Algebrai struktúrának nevezzük az olyan legalább két elemű $\{S; f, g, \dots\}$ rendszert, amelynek első eleme egy $S \neq \emptyset$ halmaz, a többi pedig S -en értelmezett valamilyen n o változós/ algebrai műveletet.

Definíciók alapján algebrai struktúra pl: $\{R; \cdot\}$, $\{R; +\}$, $\{R; \cdot, +\}$ ahol R a valós számok halmaza.

Definíciók:

asszociativitás	$(a+b)+c=a+(b+c)$
kommutativitás	$a+b=b+a$
idempotencia	$a+a=a$
kancellativitás	$x+a=b, a+y=b$ egyenleteknek legfeljebb 1-1 megoldása van
disztributivitás	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ $a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot c$
abszorbtivitás	$a \cdot (a+b) = a$
u neutrális elem	$u+a=a+u=a$
invertálhatóság	$\forall a \exists x \exists y \mid x+a=b \wedge a+y=b$
inverzelem létezése	$\forall a \exists a' \mid a'+a=a+a'=u$

Ezen definíciók értelmében az $\{R; \cdot\}$ struktúra asszociatív, kommutatív, kancellatív, neutrális eleme az 1, az $R \setminus \{0\}$ halmazon invertálható és minden elemének létezik inverze.

Mivel egyes algebrai struktúrák gyakran előfordulnak, érdemes nekik külön nevet adni.

Definíció: Az $/S;+/\$ algebrai struktúra

- félcsoport, ha a $+$ művelet asszociatív
- csoport, ha invertálható félcsoport
- félháló, ha a $+$ művelet asszociatív, kommutatív, idempotens
- modulus, ha kommutatív csoport

Az $/S;+,\square/\$ struktúra

- gyűrű, ha $/S;+/\$ modulus $/S;\square/\$ félcsoport és a $\square$ művelet a $+$ műveletre nézve disztributív
- integritástartomány, ha egységelemes zérusosztómentes kommutatív gyűrű
- test, ha S legalább 2 elemű, $/S;+/\$ modulus $/S\setminus\{0\};\square/\$ kommutatív csoport és a $\square$ művelet a $+$ műveletre disztributív
- háló, ha $/S;+/\$ és $/S;\square/\$ félháló és mind-két művelet abszorbtív a másikra nézve

Láthatjuk, hogy az $/R;+/\$ és az $/R\setminus\{0\};\cdot/\$ struktúra félcsoport is, csoport is, modulus is.

Tétel/1/: Félhálót alkot a pozitív számok halmaza, N_0 , a legnagyobb közös osztó, vagy a legkisebb közös többszörös műveletére.

Bizonyítás: A félháló algebrai struktúra, tehát előbb ezt kell igazolni az $/N_0;\square/\$ és az $/N_0;\cdot/\$ rendszerekre. $a\square b$ a legnagyobb közös osztót, $a\cdot b$ a legkisebb közös többszöröst jelenti/

Nyilvánvaló, hogy $a\square b \in N_0$ és $a\cdot b \in N_0$, ami azt bizonyítja, hogy algebrai struktúráról van szó. Bizonyítsuk be az asszociativitást!

Mint tudjuk, a legnagyobb közös osztónak az a tulajdonsága, hogy ha $t|a$ és $t|b$ akkor $t|a \sqcup b$ /a def. ~~pedig~~ alapján/. Hasonló tulajdonsága van a legkisebb közös többszörösnek is: $a|t, b|t$ akkor $a \S b|t$. Ezeket felhasználva:

$$a./ \text{ Ha } /a \sqcup b / \sqcup c = t \Rightarrow t|a \sqcup b \wedge t|c \Rightarrow t|a \wedge t|b \wedge t|c \Rightarrow t|a \wedge t|b \sqcup c \Rightarrow \\ \Rightarrow t|a \sqcup b \sqcup c /$$

$$\text{Ha } a \sqcup b \sqcup c = t' \Rightarrow t'|a \sqcup b \wedge t'|c \Rightarrow t'|a \wedge t'|b \wedge t'|c \Rightarrow \\ \Rightarrow t'|a \sqcup b \wedge t'|c \Rightarrow t'|a \sqcup b \sqcup c$$

Azt látjuk, hogy $t|t'$ és $t'|t$, ez pedig a reláció antiszimetriájából következőleg a $t=t'$ egyenlőséget, vagyis a bizonyítandót jelenti.

$$b./ \text{ Ha } /a \S b / \S c = t \Rightarrow a \S b|t \wedge c|t \Rightarrow a|t \wedge b|t \wedge c|t \Rightarrow a|t \wedge b \S c|t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \S b|t \wedge c|t \Rightarrow /a \S b / \S c|t$$

Láthatjuk, $t|t'$ és $t'|t$, amiből $t=t'$.

$$a \S b \S c = t' \Rightarrow a|t' \wedge b|t' \wedge c|t' \Rightarrow a|t' \wedge b \S c|t' \Rightarrow \\ \Rightarrow a \S b|t' \wedge c|t' \Rightarrow /a \S b / \S c|t'$$

A kommutativitás $a \sqcup b = b \sqcup a$, $a \S b = b \S a$, az idempotencia $a \sqcup a = a$, $a \S a = a$ nyilvánvaló.

Tétel/2/: Félhálót alkot a pozitív számok halmaza a

$$\min /a, b / = \begin{cases} a, \text{ ha } a \leq b \\ b, \text{ ha } b \leq a \end{cases} = a \sqcap b, \quad \max /a, b / = \begin{cases} a, \text{ ha } a \geq b \\ b, \text{ ha } b \geq a \end{cases} = a \sqcup b$$

műveletekre.

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy algebrai struktúrákról van szó. Nyilvánvaló mindkét esetben a kommutativitás és az idempotencia is. Vizsgáljuk meg, az asszociativitást is.

$$a \sqcap (b \sqcap c) = \begin{cases} \text{ha } a \leq b, c; a \\ \text{ha } b \leq c, a; b \\ \text{ha } c \leq a, b; c \end{cases} \quad /a \sqcap b / \sqcap c = \begin{cases} \text{ha } a \leq b, c; a \\ \text{ha } b \leq c, a; b \\ \text{ha } c \leq a, b; c \end{cases}$$

Látható, hogy az eredmények megegyeznek /mindig a legkisebb/, ami azt bizonyítja, hogy a $\sqcap$ művelet asszociativ. Ugyanígy bizonyítható az asszociativitás a $\sqcup$ műveletre is, csak ott mindig a legnagyobb lesz az eredmény.

Tétel/3/: Félhálót alkotnak, a halmazok osztályára nézve a metszés és egyesítés műveletei.

Bizonyítás: Világos, hogy algebrai struktúrákról van szó. Nyilvánvaló a kommutativitás és az idempotencia is.

Az asszociativitást a következők bizonyítják:

$$\text{Ha } X = A \cap B \cap C \Rightarrow X \subseteq A \cap B \cap C \Rightarrow X \subseteq A \cdot X \subseteq B \cdot X \subseteq C \Rightarrow \\ \Rightarrow X \subseteq A \cdot X \subseteq B \cap C \Rightarrow X \subseteq A \cap B \cap C$$

$$\text{Ha } X' = A \cap B \cap C \Rightarrow X' \subseteq A \cdot X' \subseteq B \cap C \Rightarrow X' \subseteq A \cdot X' \subseteq B \cdot X' \subseteq C \Rightarrow \\ \Rightarrow X' \subseteq A \cap B \cap C$$

Tehát $X \subseteq X'$ és $X' \subseteq X$ amiből $X = X'$.⁺

$$\text{Ha } X = A \cup B \cup C \Rightarrow X \supseteq A \cup B \cup C \Rightarrow X \supseteq A \cdot X \supseteq B \cdot X \supseteq C \Rightarrow \\ \Rightarrow X \supseteq A \cdot X \supseteq B \cup C \Rightarrow X \supseteq A \cup B \cup C$$

$$\text{Ha } X' = A \cup B \cup C \Rightarrow X' \supseteq A \cdot X' \supseteq B \cup C \Rightarrow X' \supseteq A \cdot X' \supseteq B \cdot X' \supseteq C \Rightarrow \\ \Rightarrow X' \supseteq A \cup B \cup C$$

Tehát $X \supseteq X'$ és $X' \supseteq X$ amiből $X = X'$.

Ezzel a bizonyítást elvégeztük.

Könnyen látható, hogy az $(R \setminus \{0\}; +, \cdot)$ struktúra gyűrű, integritástartomány és test.

Tétel/4/: $(N_0; \square, \S)$ rendszer háló.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy az $(N_0; \square, \S)$ rendszer algebrai struktúra és $(N_0; \square)$, $(N_0; \S)$ félhálók.

Igy most csak az abszorbtivitást kell igazolni.

Ismeretes, hogy /1/ $a \square x \mid a \forall x$ -re és /2/ $a \mid a \S x \forall x$ -re.

Ez alapján a bizonyítás a következő:

$$\text{Ha } a \mid a \wedge a \mid a \S b \Rightarrow a \mid a \square a \S b / \quad \text{ebből: } a = a \square a \S b / \\ a \square a \S b \mid a$$

$$\text{Ha } a \mid a \wedge a \square b \mid a \Rightarrow a \S a \square b / \mid a \quad \text{ebből: } a = a \S a \square b / \\ a \mid a \S a \square b /$$

+ A $\cdot$ jel „és”-t jelent.

Tétel/5/: $/N_0; q, p/$ rendszer háló.

Bizonyítás: Mivel $/N_0; q, p/$ algebrai struktúra és $/N_0; q/$ és $/N_0; p/$ félháló elég igazolni az abszorbtivitást:

$$aq/apb = \begin{cases} \text{ha } a \geq b; aqa=a \\ \text{ha } a \leq b; aqb=a \end{cases} = a$$

$$ap/aqb = \begin{cases} \text{ha } a \geq b; apb=a \\ \text{ha } a \leq b; apa=a \end{cases} = a$$

Tétel/6/: Legyen a halmazok osztálya H .
 $/H; \wedge, \vee/$ rendszer háló.

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy a $/H; \wedge, \vee/$ rendszer algebrai struktúra. Tudjuk, hogy a $/H; \wedge/$, $/H; \vee/$ félháló.

Igy csak az abszorbtivitást kell igazolni.

Ehez tudnunk kell, hogy ha $A \leq X$, akkor $A \wedge X = A$, $A \vee X = X$.

Mivel $A \leq A \vee B \Rightarrow A \wedge (A \vee B) = A$

$$A \geq A \wedge B \Rightarrow A \vee (A \wedge B) = A$$

Vannak még további érdekes struktúrák pl.: kommutatív gyűrű, nem idempotens félháló stb.

A továbbiakban a hálókról és azoknak egy speciális fajtájáról a Boole algebráról lesz szó.

2. Hálók

Definíció:⁺ Hálónak nevezünk minden olyan két műveletes algebrai struktúrát, amelynek mindkét művelete asszociatív, kommutatív és abszorbtív. A két művelet legyen $\square$ és $\S$. Pontokba szedve:

$$\begin{array}{ll} /1/ & /a\square b/\square c=a\square/b\square c/ \\ /2/ & /a\S b/\S c=a\S/b\S c/ \\ /3/ & a\square b=b\square a \\ /4/ & a\S b=b\S a \\ /5/ & a\square/a\S b/=a \\ /6/ & a\S/a\square b/=a \end{array}$$

Tekintsük az $/1/-/2/$, $/3/-/4/$, $/5/-/6/$ párokat.

Eszrevehetjük, hogy ezek adódnak egymásból, ha felcseréljük a $\square$ műveletét a $\S$ műveletével. Ebből következik, ha kimondunk egy tételt, akkor abból kaphatunk még egy tételt, melyet úgy kapunk, hogy a $\square$ -t felcseréljük $\S$ -ra. Ezt nevezzük a dualitás elvének.

Tétel/1/: Az $/5/$, $/6/-$ ből következőleg mindkét művelet idempotens és bármely a, b elempárra az $a\square b=a$ egyenlőség ekvivalens az $a\S b=b$ -vel.

Bizonyítás:

$$\begin{array}{ll} /5/ \text{ miatt} & a=a\square/a\S x/ \\ & a\S a=a\S/a\square/a\S x// \\ /6/ \text{ miatt} & /a\S x=b/ \\ /8/ & a\S a=a \end{array} \quad \begin{array}{ll} /6/ \text{ miatt} & a=a\S/a\square x/ \\ & a\square a=a\square/a\S/a\square x// \\ /5/ \text{ miatt} & /a\square x=b/ \\ /7/ & a\square a=a \end{array}$$

Ezzel mindkét művelet idempotenciáját bebizonyítottuk. Most bebizonyítjuk második állításunkat:

$$\begin{array}{ll} \text{Ha } a\square b=a \Rightarrow b\S/a\square b/=a\S b & \text{Ha } a\S b=b \Rightarrow a\square/a\S b/=a\square b \\ /6/ \text{ miatt } b\S/a\square b/=b & /5/ \text{ miatt } a\square/a\S b/=a \\ \text{ezért } b=a\S b & \text{ezért } a=a\square b \end{array}$$

Tehát: $/9/ \quad a\square b=a \Leftrightarrow a\S b=b \text{ /hálóban!/}$

⁺ Ez tulajdonképpen előbbi definíciónk részletezése.

Tétel/2/: Ha egy algebrai struktúrában teljesül /1/, /2/, /3/, /4/, /9/ és /7/ vagy /8/, akkor /5/, /6/ és /8/ vagy /7/ is teljesül.

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy /7/, /9/-ből következik /8/, és /8/, /9/-ből következik /7/. Ha /9/-ben $a=b$, adódik, hogy $a \sqcap a = a \Leftrightarrow a \S a = a$, azaz /7/ $\Leftrightarrow$ /8/. Induljunk ki a következő általános egyenlőségből:

$$\begin{array}{lcl} x \S^2 / x \S y / = / x \S x / \S y = x \S y & & x \sqcap^1 / x \sqcap y / = / x \sqcap x / \sqcap y = x \sqcap y \\ x \S / x \S y / = x \S y & & x \sqcap / x \sqcap y / = x \sqcap y \\ x \sqcap / x \S y / = x & & x \S / x \sqcap y / = x \end{array}$$

Ezzel bebizonyítottuk /5/-t. Ezzel bebizonyítottuk /6/-t.

Eszrevehetjük, hogy az /1/, /2/, /3/, /4/, /7/, /8/, /9/ axiómák ekvivalensek az /1/, /2/, /3/, /4/, /5/, /6/ axiómákkal, ami lehetővé teszi, hogy újra definiáljuk a hálókat.

Definíció: Az $/S; \sqcap, \S/$ algebrai struktúrát hálónak nevezzük, ha mindkét művelete asszociatív, kommutatív és idempotens, továbbá ha a és $b \in S$, akkor $a \sqcap b = a$ ekvivalens az $a \S b = b$ egyenlőséggel.

Mint minden halmaznál, itt is felvetődik az a kérdés, hogyan lehetne rendezni egy háló elemeit.

Definíció: Legyen H olyan nem üres halmaz, amelynek bizonyos elempárjai között a $\leq$ jellel kifejezett kapcsolat áll fenn. A H elempárjai között a $\leq$ jellel létesített kapcsolatot rendezési relációnak /rendezésnek/ nevezzük, ha teljesül rá a reflexivitás, antiszimmetria, tranzitivitás. Ekkor H részben rendezett halmazt alkot a rendezési relációra nézve. Ha még az is teljesül, hogy bármely két elem össze-hasonlítható, akkor H teljesen rendezett halmazt /láncot/ alkot.

Definíció: Az $/S; \sqcap, \S/$ háló valamely a, b elemeiről akkor és csak akkor mondjuk, hogy $a \leq b$ /„a kisebb-egyenlő b”/ ha $a \sqcap b = a$ vagy -ami ezzel ekvivalens- ha $a \S b = b$.

+ Elég volna /7/ és /8/ közül az egyik.

Tétel 3/3/: Bármely háló rendezése:

reflexív: $a \leq a$
 antiszimmetrikus: $a \leq b$ és $b \leq a$ akkor $a = b$
 tranzitív: $a \leq b$ és $b \leq c$ akkor $a \leq c$
 monoton: $a \leq b$ akkor $a \square c \leq b \square c$ és $a \leq c \leq b \leq c$

Bizonyítás:

reflexivitás: mivel $a \square a = a$, $a \leq a$
 antiszimmetria: $\left. \begin{array}{l} \text{ha } a \leq b \text{ akkor } a \square b = a \\ \text{ha } b \leq a \text{ akkor } b \square a = a \square b = b \end{array} \right\} a = b$
 tranzitivitás: $\left. \begin{array}{l} \text{ha } a \leq b \text{ akkor } a \square b = a \\ \text{ha } b \leq c \text{ akkor } b \square c = b \end{array} \right\}$

A $\square$ asszociativitása miatt:

$a \square c = /a \square b / \square c = a \square /b \square c / = a \square b = a$ amiből $a \leq c$

monotonitás: ha $a \leq b$ akkor $a \square b = a$ E miatt:

$a \square c = /a \square b / \square c = /a \square b / \square /c \square c / = /a \square c / \square /b \square c /$

Vagyis $a \square c = /a \square c / \square /b \square c /$ ami épp az $a \square c \leq b \square c$ -t, a monotonitást bizonyítja. Ennek az állításnak a duálisa a $\leq$ -ra mutatja a monotonitást.

Definíció: A részben rendezett H halmaz legnagyobb /legkisebb/ elemén olyan $k \in H$ -t értünk, melyre áll, hogy bármely $x \in H$ mellett $x \leq k$ / $x \geq k$ /.

Tétel 4/: Egy algebrai struktúrában legfeljebb egy legnagyobb ill. legkisebb elem létezhet.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy k_1 és k_2 is H legnagyobb eleme. Ekkor, mivel k_1 legnagyobb elem és $k_2 \in H$, $k_2 \leq k_1$. De k_2 is legnagyobb elem, $k_1 \leq k_2$, ami a reláció antiszimmetriája miatt $k_1 = k_2$ -hez vezet. Nyilvánvaló, hogy a legkisebb elemre ezt ugyannyi lehet igazolni.

Definíció: Az olyan hálókat melyeknek van legkisebb és legnagyobb elemük, korlátos hálóknak nevezzük.

Tétel/5/: Véges háló korlátos.

Bizonyítás: Legyenek a H véges háló elemei $x_1 \dots x_n$.
Ekkor mivel H háló, $x = x_1 \square x_2 \square \dots \square x_n \in H$ és $y = x_1 \S x_2 \S \dots \S x_n \in H$.
Megmutatjuk, hogy x a háló legkisebb y a háló legnagyobb
eleme, vagyis bármely $1 \leq i \leq n$ -re $x \leq x_i \leq y$.

Vizsgáljuk meg az $x \leq x_i$ egyenlőtlenséget, ami ekvivalens
/Def. értelmében./ az $x \square x_i = x$ egyenlőséggel.

$$x \square x_i = /x_1 \square x_2 \square \dots \square x_n / \square x_i = x_1 \square \dots \square /x_i \square x_i / \square \dots \square x_n = x_1 \square x_2 \square \dots \square x_n = x.$$

Ez éppen az $x \leq x_i$ egyenlőtlenséget bizonyítja.

A másik $x_i \leq y \Leftrightarrow x_i \S y = y$ egyenlőtlenséget /egyenlőséget/
bizonyítja a következő egyenlőség sor.

$$x_i \S y = x_i \S /x_1 \S x_2 \S \dots \S x_n / = x_1 \S \dots \S /x_i \S x_i / \S \dots \S x_n = x_1 \S x_2 \S \dots \S x_n = y.$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Egyezzünk meg abban, hogy a legkisebb elemet 0 , a leg-
nagyobb elemet 1 jelenti. Látható, hogy 0 és 1 neutrális
elem, hisz bármely $x \in H$ -ra $0 \S x = x$, $1 \square x = x$. Most megmutatjuk,
hogy egy műveletre csak egy neutrális elem létezhet.

Tétel/6/: Az $/S;g/$ algebrai struktúrában legfeljebb egy
neutrális elem létezhet.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy e_1 és e_2 is neutrális eleme
 S -nek. Tekintsük $e_1 g e_2$ -t. Mivel e_1 neutrális elem $e_1 g e_2 = e_2$;
Másrészt e_2 is neutrális elem: $e_1 g e_2 = e_1$. A baloldalak egyen-
lőségéből következik, hogy $e_1 = e_2$.

Tételünk alapján kimondhatjuk a következő tételt.

Tétel/7/: Egy hálóban legfeljebb egy legnagyobb ill. leg-
kisebb elem létezhet.*

A valós számok halmazában megszoktuk, hogy minden a -hoz
található a' , hogy $a + a' = 0$. Nos, ehez hasonló fogalmat a
hálónál is bevezethetünk. Ez a fogalom a komplementumos-
ság.

De

+ Ez a tétel már következett /4/-ből is, mégis érdekes,
hogy így is adódik.

Definíció: Korlátos háló valamely x elemének komplementumán a háló olyan y elemét értjük, melyre igazak a következők: $xy=0$, $xy=i$.

Definíció: Ha egy korlátos H háló minden elemének van legalább 1 komplementuma, akkor H -t komplementumos hálónak nevezzük; ha pedig H minden elemének pontosan 1 komplementuma van, akkor H -t egyértelműen komplementumos hálónak nevezzük.

Tekintsük a következő $\{a,b,c,d,e\}; p,q$ algebrai struktúrát. p,q műveleti szabályai az 1, 2 táblázatokban van.

1. p	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	b
c	a	a	c	a	c
d	a	a	a	d	d
e	a	b	c	d	e

2. q	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	b	e	e	e
c	c	e	c	e	e
d	d	e	e	d	e
e	e	e	e	e	e

A táblázatokból látható, hogy mindkét művelet kommutatív, idempotens és $xpy=x = xqy=y$ / $x,y \in \{a,b,c,d,e\}$ /.

Az asszociativitás a következő módon bizonyítható:

A bizonyítást csak p -re végezzük el, q -ra ugyanúgy elvégezhető. Igazolnunk kell tehát, hogy $xp/ypz/=xpy/pz$. Ha $a \in \{x,y,z\}$, akkor $xp/ypz/=a=xpy/pz$. Ha $e \in \{x,y,z\}$, akkor, mivel e neutrális elem, a két oldal nyilván megegyezik. Ezért feltehetjük, hogy $x,y,z \in \{b,c,d\}$.

Ekkor ha x,y,z közt van két különböző, akkor mindkét oldal a -val lesz egyenlő, ha $x=y=z$ akkor mindkét oldal x lesz. E négy tulajdonság alapján kimondhatjuk, hogy ez az algebrai struktúra háló.

Vizsgáljuk meg ezt a hálót a disztributivitás szempontjából. A következő példa alapján kimondhatjuk, hogy a disztributivitás ebben a hálóban nem áll fenn.

$$bp/cqd/=bpe=b \neq a=aqa=/bpc/q/bpd/$$

Ebből láthatjuk, hogy a disztributivitás nem következménye háló axiómáinknak, azaz van értelme külön a disztributív hálókról beszélni.

3. Disztributív hálók

Definíció: Egy hálót disztributívnek nevezünk, ha benne mindkét művelet a másakra nézve disztributív, vagyis ha a hálóban a következő két axióma is érvényes:

$$/1/ \quad a \square b \S c = /a \square b/ \S /a \square c/$$

$$/2/ \quad a \S /b \square c/ = /a \S b/ \square /a \S c/$$

Tétel/1/: Ha egy hálóban /1/ és /2/ axiómák közül az egyik teljesül, akkor másik is.

Bizonyítás: Induljunk ki /1/-ből. Mivel /1/ igaz, $/a \S b/ \square x = /a \square x/ \S /b \square x/$. Ha x helyébe $a \S c$ -t írunk a következőt kapjuk: $/a \S b/ \square /a \S c/ = /a \square /a \S c/ \S /b \square /a \S c/$.

A $\square$ abszorbtivitása miatt $a \square /a \S c/ = a$, és /1/ miatt $b \square /a \S c/ = /b \square a/ \S /b \square c/ = /a \square b/ \S /b \square c/$, amiből:

$/a \S b/ \square /a \S c/ = a \S /a \square b/ \S /b \square c/$. A jobboldalt az asszociativitás és az abszorbtivitás alapján átalakítva:

$$a \S /a \square b/ \S /b \square c/ = /a \S a \square b/ \S /b \square c/ = a \S /b \square c/.$$

Tehát $/a \S b/ \square /a \S c/ = a \S /b \square c/$, ami épp a bizonyítandó volt.

E bizonyításnak a duálisa adja /1/ bizonyítását /2/-ből.

Mivel a disztributív hálók hámaza részhalmaza a hálóknek érvényes rájuk az, amely általában a hálókra. Viszont a disztributivitás új, általában a hálókra nem érvényes állításokat tesz igazzá, ilyen pl. a következő tétel, mely a valós számoknál megszokott egyszerűsítési szabályhoz hasonló.

Tétel/2/: Ha egy disztributív háló p, x, y, elemeire /1/ $p \square x = p \square y$ és /2/ $p \S x = p \S y$ egyenlőségek teljesülnek, akkor $x = y$.

Bizonyítás: Felhasználva az abszorbtivitást, /1/-t és a disztributivitást a következőt kapjuk:

$$x = x \S /p \square x/ = x \S /p \square y/ = /x \S p/ \square /x \S y/$$

Ugyanígy:

$$y = y \S /p \square y/ = y \S /p \square x/ = /y \S p/ \square /y \S x/$$

Mivel a jobboldalak, /2/ és a kommutativitás miatt megegyeznek, a baloldalak is egyenlők, vagyis $x = y$.

E

Ebből a tételből rögtön adódik a következő:

Tétel/3/: Korlátos, disztributív hálóban bármely elemnek legfeljebb egy komplementuma lehet.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a -nak a_1 és a_2 is a komplementuma. Ekkor:

$$a \sqcap a_1 = 0 = a \sqcap a_2 \qquad a \sqcup a_1 = 1 = a \sqcup a_2$$

Ez, előbbi tételünk értelmében azt jelenti, hogy $a_1 = a_2$.

Valós számoknál megszoktuk, hogy ha pl.: $a + a_1 = 0$ és $b + b_1 = 0$, akkor $(a+b) + (a_1+b_1) = 0$. Ehez hasonló összefüggéseket adnak meg a De Morgan-képletek.

Tétel/4/: Ha egy korlátos disztributív háló a, b elemeinek létezik komplementumuk $\bar{a}, \bar{b}$, akkor $a \sqcap b, a \sqcup b$ -nek is létezik, mégpedig $\overline{a \sqcap b} = \bar{a} \sqcup \bar{b}$, $\overline{a \sqcup b} = \bar{a} \sqcap \bar{b}$.

Bizonyítás: Előbbi tételünk értelmében, korlátos disztributív háló bármely elemének legfeljebb egy komplementuma lehet, így elég azt bizonyítanunk, hogy $\bar{a} \sqcup \bar{b}, \bar{a} \sqcap \bar{b}$ tényleg komplementuma $a \sqcap b, a \sqcup b$ -nek. Ezt a következő egyenlőségek igazolják:

$$\begin{aligned} (a \sqcap b) \sqcap (\bar{a} \sqcup \bar{b}) &= ((a \sqcap b) \sqcap \bar{a}) \sqcup ((a \sqcap b) \sqcap \bar{b}) = (b \sqcap (a \sqcap \bar{a})) \sqcup (a \sqcap (b \sqcap \bar{b})) = \\ &= (b \sqcap 0) \sqcup (a \sqcap 0) = 0 \sqcup 0 = 0 \\ (a \sqcap b) \sqcup (\bar{a} \sqcup \bar{b}) &= (a \sqcup \bar{a}) \sqcap (b \sqcup \bar{b}) = 1 \sqcap 1 = 1 \\ (a \sqcup b) \sqcap (\bar{a} \sqcup \bar{b}) &= ((a \sqcup b) \sqcap \bar{a}) \sqcup ((a \sqcup b) \sqcap \bar{b}) = (b \sqcup (a \sqcap \bar{a})) \sqcup (a \sqcup (b \sqcap \bar{b})) = \\ &= (b \sqcup 0) \sqcup (a \sqcup 0) = b \sqcup a = a \sqcup b \end{aligned}$$

Ezen bizonyításunk dualisa megadja másik állításunk bizonyítását is.

Mivel a matematika történetében nem mindig a rendszeresség érvényesül és mert célunk eléréséhez nem csak ez az út vezet, a komplementumos disztributív hálók hamarabb jelentek meg, mint ez a nevük, és mint ez a struktúra elmélet, ezért régebben elnevezték felfedezőjéről, első kutatójáról Boole -algebráknak őket.

4. A logika algebrája, elektronikus modellezése, számológépek

Az embernek sokszor kell döntenie bizonyos állítások igaz és hamis volta közt, s mivel egyelőre nincs a kezében egy megbízható ellenőrző módszer, megpróbál szabályokat keresni vizsgálatukhoz. Emlékezhetsz arra, hogy ha tudja, hogy: „A igaz, ha B vagy C igaz” és B igaz, akkor A-nak igazat ad, ha a C igaz, akkor is igazat ad A-nak, de ha sem B sem C nem igaz, akkor azt mondja A hamis. Arra is emlékezhetsz, hogy ha tudja: „A igaz, ha B és C is igaz” és a B hamis akkor A-nak nem ad igazat, ha C hamis, akkor sem ad igazat A-nak, de ha mindkettő B is, C is igaz, akkor A-nak is igazat ad. Ezután, a könnyebb leírás kedvéért a „vagy” szót „+” az „és” szót „ $\cdot$ ” jelnek felelteti meg, az igazat 1-nek a hamisat 0-nak és felírja a következőket:

$$0+0=0$$

$$0+1=1$$

$$1+0=1$$

$$1+1=1$$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

+	0	1
0	0	0
1	0	1

A táblázatból mindjárt látható, hogy mindkét művelet kommutatív, idempotens, asszociatív /a + műveletre: ha van a három elem közt 1, akkor a végeredmény 1, ha nincs akkor három darab 0/ valamint $A+B=A \Leftrightarrow A \cdot B=B$. Ebből rögtön látjuk, hogy ez az algebrai struktúra, $\{0,1\}; +, \cdot$, háló, mégpedig véges, tehát korlátos. Mivel $0+1=1$ és $0 \cdot 1=0$ komplementumos háló is. Könnyű belátni, hogy a műveletek disztributívak egymásra, hisz a műveletek definíciójából látható $1+A=1$, $1 \cdot A=A$, $0+A=A$, $0 \cdot A=0$ ha $A \in \{0,1\}$. Ezért:

$$A+B \cdot C = \begin{cases} \text{ha } A=1; 1 \\ \text{ha } A=0; B \cdot C \end{cases} = A+B / A+C = \begin{cases} \text{ha } A=1; 1+B / 1+C=1 \\ \text{ha } A=0; 0+B / 0+C=B \cdot C \end{cases}$$

$$A \cdot (B+C) = \begin{cases} \text{ha } A=1; B+C \\ \text{ha } A=0; 0 \end{cases} = A \cdot B + A \cdot C = \begin{cases} \text{ha } A=1; 1 \cdot B + 1 \cdot C = B+C \\ \text{ha } A=0; 0 \cdot B + 0 \cdot C = 0 \end{cases}$$

Tehát egy komplementumos, véges, disztributív hálóról van szó. Láthatjuk, hogy A komplementuma $\bar{A}$ épp A ellenkezője, tagadottja. Mivel $\bar{\bar{A}}=A$, a kétszeres tagadás állítás.

A De Morgan képletek alapján $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$, $\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$.

+ a $\cdot$ jel a végre hatáson valamennyi előnébb van mint a + jel

Most már csak az a kérdés, hogy ezt a sok mindent, amit most megtudtunk, mire használhatjuk. Annál is inkább, mert ezen értekezés elején azt ígértük, hogy megmutatjuk a matematika és az elektronikus áramkörök közti kapcsolatot.

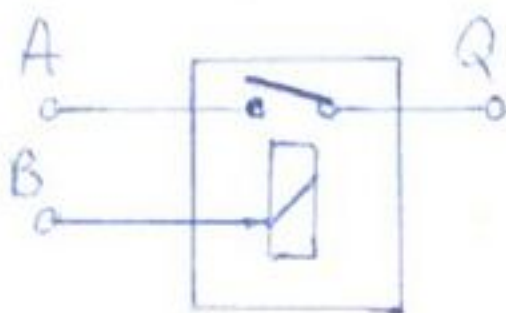
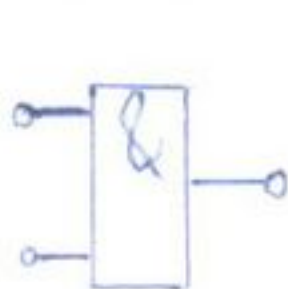
Képzeljünk el egy kis telefonközpontot, ahol még nem vezették be az automatákat. Az egyik telefonos kisasszony előtt három lámpa, A, B, C van, és egy kapcsoló. Az a dolga, hogy ha A ég és B ég és C ég, vagy A ég és B nem ég és C ég, vagy A ég és B ég és C nem ég, akkor kapcsolja be a kapcsolót. Nyilvánvaló, hogy ezt a munkát lehetne gépesíteni. De hogyan? A megoldás az elektronikus logikában van. Vegyük úgy, hogy ha egy lámpa ég értéke 1, ha nem értéke 0. Ha be van kapcsolva a kapcsoló értéke 1, ha nincs 0. Legyen a kapcsoló betűjele Q. A telefonos kisasszony dolga tehát a következő: $Q = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C}$. Ha a telefonos kisasszonynak van egy kis matematikai ismerete leegyszerűsítheti dolgát:

$$\begin{aligned} Q &= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} = /A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C / + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} = \\ &= A \cdot C \cdot \bar{B} + A \cdot C \cdot B + A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot C \cdot /B + \bar{B} / + A \cdot B \cdot /C + \bar{C} / = \\ &= A \cdot C + A \cdot B = A \cdot /B + C / + \end{aligned}$$

Mivel itt a logikában csak a 0-k és 1-k váltják egymást, elektromos impulzusokkal könnyen lehet modellezni a számított logikát. Legyen 1 ha van feszültség, 0 ha nincs feszültség.

Az „és” elem. Ez a logikai elem a „•” műveletét végzi el a vezetékein befutó jellel. Angol neve: AND.

Rajz jele: Egy megvalósítási lehetősége:



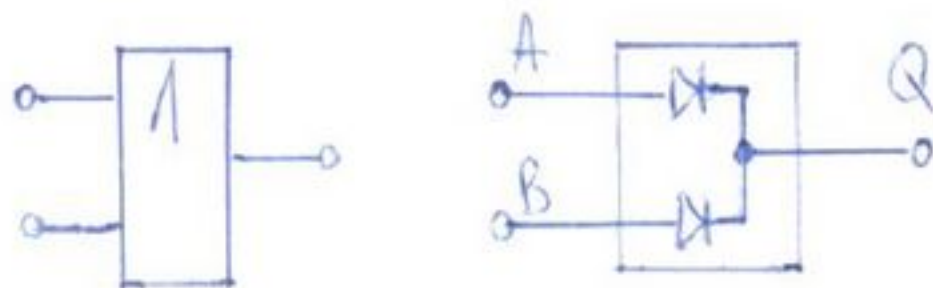
Figyeljük meg a megvalósítás működését: ha A-n van feszültség és B-n is, akkor mivel a relé behúz, Q-n is van *feszültség*. /A=1 B=1 = Q=1/ ha A-n nincs feszültség, akkor B állapota közömbös, Q-n sincs feszültség

/A=0 $\Rightarrow$ Q=0/. Ugyanigy B=0 = Q=0. Ez a három állítás ekvivalens az A B=Q-val, tehát ez az áramköri elem megfelel céljainknak.

+ az idempotencia, az asszociativitás, a disztributivitás, és a komplementumosság miatt.

A „vagy” elem. Ez a logikai elem a „+” műveletét végzi el a vezetékein befutó jellel. Angol neve: OR.

Rajz jele: Egy megvalósítási lehetősége:

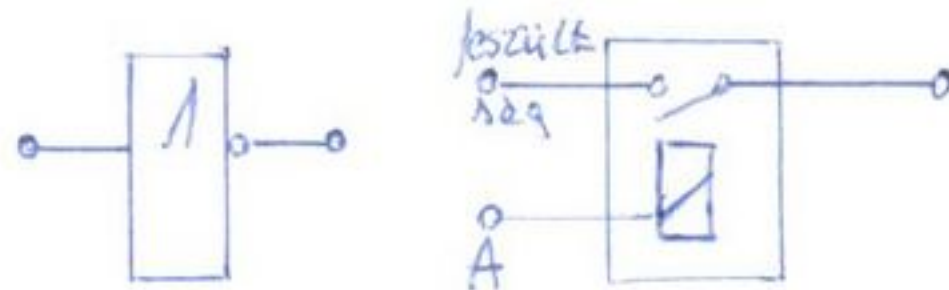


Nézzük meg hogyan működik ez az áramkör! Q nyilván csak akkor lehet 1, ha A vagy B , vagyis közülük legalább egy 1. Ez ekvivalens az $A+B=Q$ -val. Tehát ez az áramköri elem is jól működik!

A tagadó elem /komplementer képző/. Ez a logikai elem a „-” műveletét végzi el a vezetéken befutó jellel.

Angol neve: NOT.

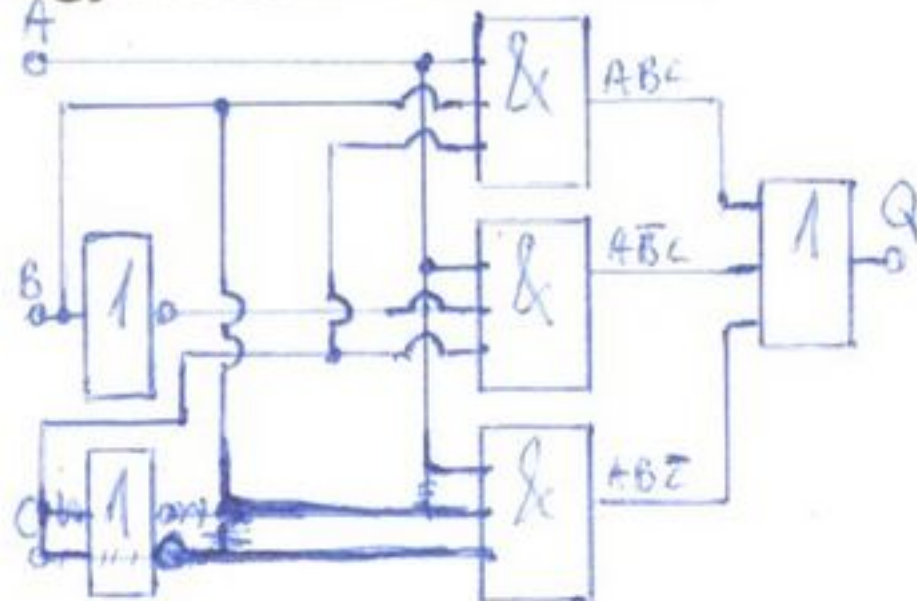
Rajz jele: Egy megvalósítási lehetősége:



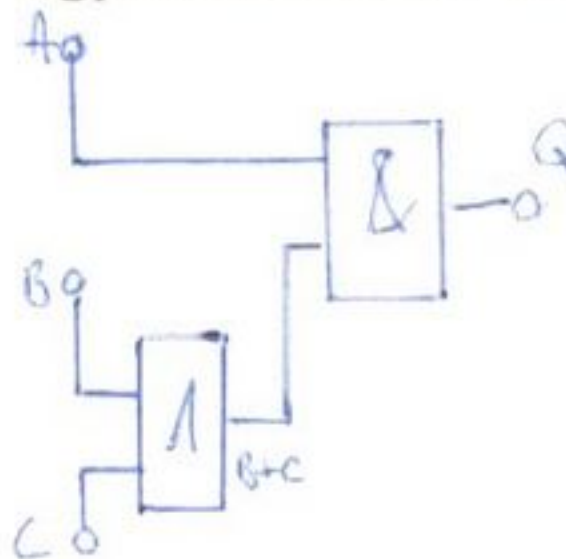
Hálózatunk most is jól működik, mert ha $A=1$, akkor a relé behúzza érintkezőjét, tehát $Q=0$. Ha $A=0$, akkor a relé elenged, érintkezője rákapcsolódik a feszültségre, tehát $Q=1$.

Most nézzük meg, milyen hálózat helyettesíthetné a telefonos kisasszonyt!

Egyszerűsítés előtt:



Egyszerűsítés után:



Nyilvánvaló/2/ egyszerűbb mint /1/. Ebből is látszik mennyire fontos szerepet játszik a logikai képletek minimalizálása.

Feltételezhetjük, hogy bármely logikai hálózat felépíthető OR, AND illetve NOT elemekből.

Tétel Bármely logikai hálózat felépíthető „nem-és”

/NAND/ kapukból /elemekből/.

Rajz jele: $\equiv$

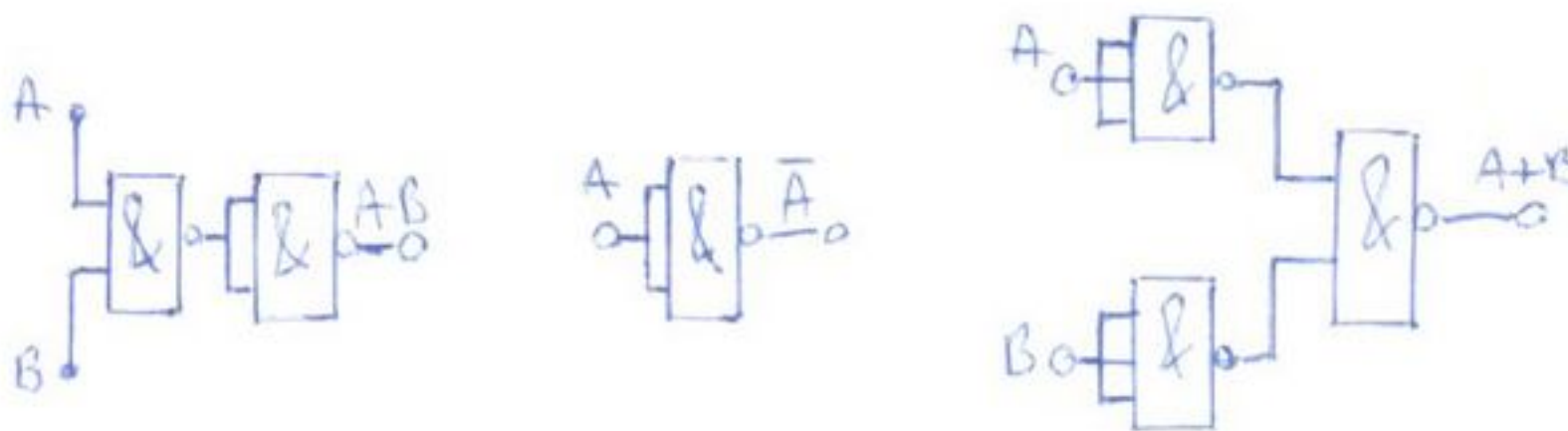
+ ha az OR ill. AND kapunak több, $A_1, A_2, \dots, A_n$ bemenete van, akkor AND: $Q = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$; OR: $Q = A_1 + A_2 + \dots + A_n$

Bizonyítás: Tudjuk, bármely logikai hálózat felépíthető OR, AND, illetve NOT kapukból, ezért elég megmutatnunk, hogy e három elem felépíthető NAND kapukból. Az AND kapu felépíthetőségét mutatja a következő egyenlőség:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \Rightarrow A \cdot B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A \cdot B. \text{ És nyilván } \overline{\overline{A}} = A. \text{ Az OR elem}$$

felépíthetősége a következő egyenlőségből adódik:

$$\overline{A \cdot A} = \overline{A} \cdot \overline{A} = \overline{A} \cdot \overline{A} = A + B. \text{ Áramkörökkel:}$$



Ugyanígy bizonyítható a következő tétel is.

Tétel: Bármely logikai hálózat felépíthető „nem-vagy” /NOR/ elemekből.

A következőkben egy igen fontos, logikai képletek minimalására használható eljárást fogunk ismertetni. E minimalizációs módszer Karnaugh-táblákat használ, melyet kidolgozójáról Karnaugh kutatóról nevezték el.

Kétváltozós tábla:

A változók mindegyike 2 állapotú lehet, ezért a lehetséges kombinációk száma 4. Ennek megfelelően Karnaugh-táblák 4 cellát tartalmaznak. Ez az ábrán látható módon valósítható meg. A cellákba mindig Q értéket írjuk be. Töltsük

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$	$A \cdot \overline{B}$
B	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot B$

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	0	1
B	0	1

ki a táblázatot ha $Q = A + A \cdot B$. Láthatjuk, hogy egymasmellé került két 1. Így, mivel azoknál A változatlanul 1, B pedig mindkét értékét felveszi, az eredmény A.

Tehát: $Q = A + A \cdot B = A$, amint azt az abszorbtivitás alapján várhattuk.

Tekintsük a következő táblákat:

/1/

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	1	1
B	0	0

/2/

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	1	0
B	1	1

/3/

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	0	1
B	1	0

Az /1/ a $\bar{B}=Q-t$, a /2/ tábla a $B+\bar{A}=Q-t$, a /3/ tábla, mivel nincs benne egymásmelletti 1, $\bar{A}\cdot B+A\cdot\bar{B}=Q-t$ definiálja. Most definiáljuk az egymásmelletti, szomszédos cellák fogalmát.

Definíció: Két cellát szomszédosnak nevezünk, ha meghatározó adataik /meghatározó adatok: betűk, és a $\bar{}$ jel/ között pontosan egy jelnyi eltérés van. Ilyen pl.: /A,B,C/ és / $\bar{A}$,B,C/, de nem ilyen a /A, $\bar{B}$,C/ és /A,B,C/.

Háromváltozós tábla:

	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A	A
$\bar{C}$	0	0	1	0
C	0	0	1	1
	$\bar{B}$	B	B	$\bar{B}$

Mivel három változó van, összesen nyolc cella kell, hogy minden kombinációt ábrázolhassunk. Töltsük ki a táblázatot a telefonos kisasszony feladatával, $Q=A\cdot B\cdot C+A\cdot\bar{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\bar{C}$

melyet a Boole-algebrával az $A\cdot(B+C)$ alakra hoztunk. A Karnaugh-tábla alapján adódik, hogy $Q=A\cdot B+A\cdot C$.

Meg kell említeni, hogy definíciónk értelmében a szélső cellák is szomszédosak. Ez a módszer több változóra is kiterjeszthető, de azzal most nem foglalkozunk.⁺

Nyilvánvaló, hogy a logikai hálózatoknak van be- ill. kimenetük. Ha feljegyezzük a kimenet reagálását a bemenet változásaira, akkor elkészítjük a hálózat un. igazságtáblázatát, amelyről könnyen leolvashatjuk a hálózat működését, sőt felírhatjuk annak logikai képletét is. Ilyen táblázatot mutat ábránk is. Nézzük, hogyan írhatjuk fel

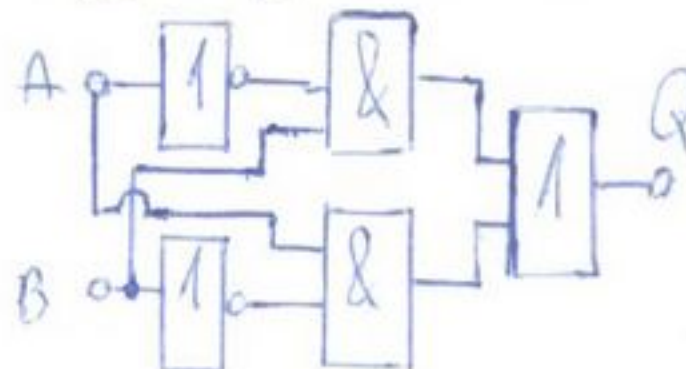
A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

az ehhez a táblázathoz tartozó logikai egyenletet; Q nyilván 1, ha /2. sor/ $\bar{A}\cdot B=1$ vagy $A\cdot\bar{B}=1$ /3. sor/ de máshol nem ~~is~~ 1, tehát $Q=\bar{A}\cdot B+A\cdot\bar{B}$. Ezt a logikai kifejezést "kizáró vagy"-nak szokták nevezni, mert csak akkor ad jelet, ha bemenő jelei különbözőek. Angol neve: exOR; képletben $A\neq B$.

Rajzjele:



Egy megvalósítási lehetősége:

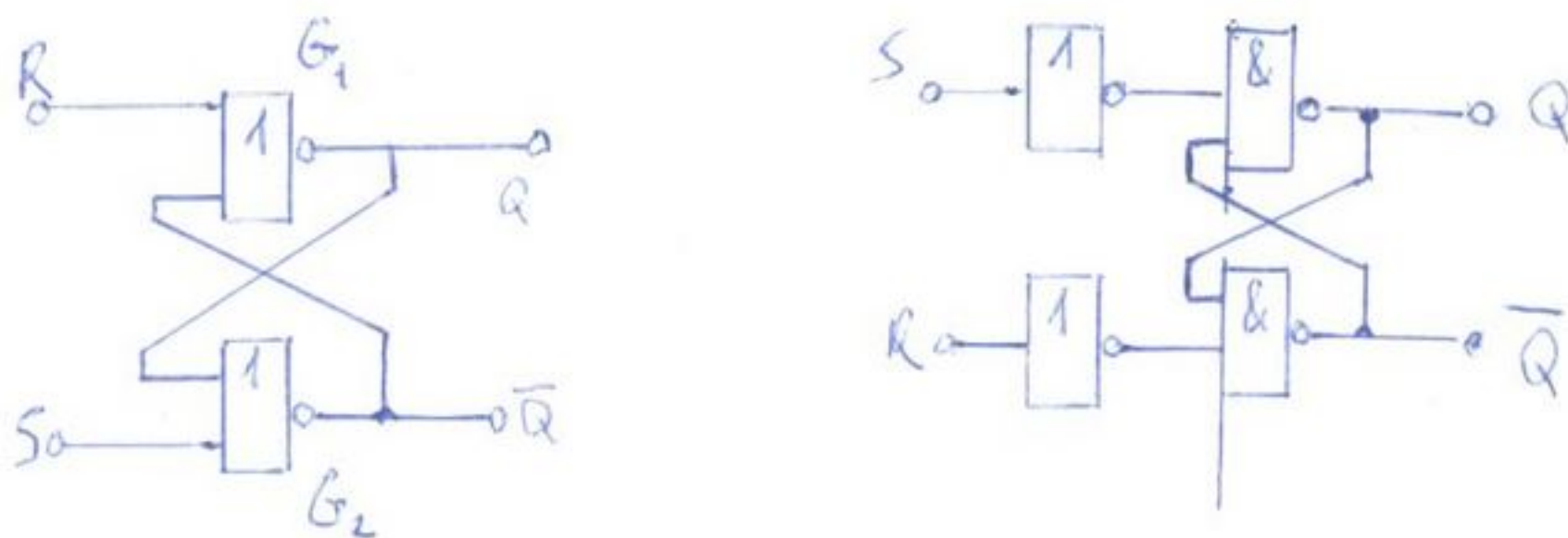


+ idézet: 1/27

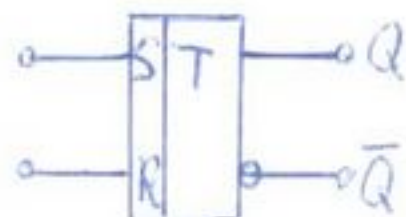
időnév módok 1/1 84. old.

Az elektronikus áramkörökben sokszor szükség van egyes adatok tárolására, ami szükségessé tette az úgynevezett „memória áramkörök” kifejlesztését. A legegyszerűbb memória áramkör az S-R tároló.

Kapcsolási rajza:



Összevont jele:



Kövessük végig a változásokat feltételezve, hogy az egyik bemenet mindig 0 szinten van, azaz egyszerre csak az egyik bemenet kerül 1 szintre. Tegyük fel, hogy R -re 1 kerül. Ekkor G_1 kimenete 0 lesz. Mivel ekkor S is 0, G_2 kimenete 1 lesz; tehát G_1 kimenete 0-án marad, ha közben R 0-ára is kerül. Tehát elég R-re egy kis impulzus is /1 szint/, akkor az S-R tároló $\bar{Q}$ kimenete 1-re Q kimenete 0-ra fog ugrani és ez így marad egész addig míg S-re nem érkezik 1 szint. A /2/ áramkör vizsgálatát az olvasóra bizzuk. Még jónéhány memória-egység ismeretes de azok számunkra nem érdekesek. A következőkben pedig megmutatjuk a logikai áramkörök közvetlen kapcsolatát az aritmetikával, a számológépekkel, amint azt megígértük.

Aritmetikai műveletek megvalósítása

Világos, hogy az elektronikus áramkörökben legegyszerűbben a 2-es számrendszer modellezhető, hisz abban csak a 0 és az 1 számjegyek szerepelhetnek.

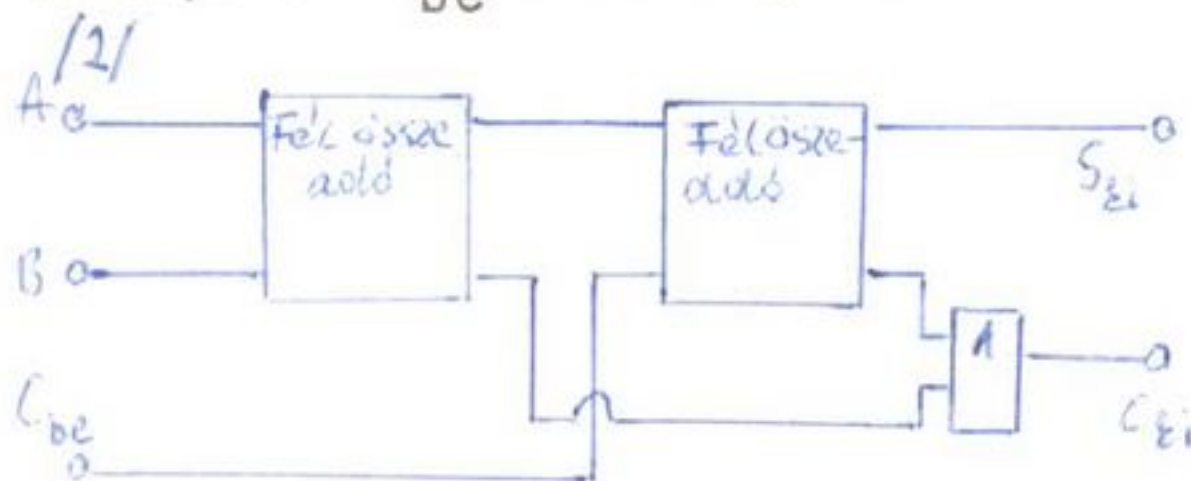
Tudjuk azt is, hogy az összeadás, szorzás, kivonás, osztás művelet teljesen gépiesen elvégezhető. E két tény arra ösztönzi az embert, hogy megpróbálja elektronikusan gépeket szerkeszteni melyek elvégzik a műveleteket, így felszabadítva az embert a robot alól. Először csak az összeadás műveletével foglalkozunk, természetesen csak a 2-es számrendszerben. Először nézzük meg két egyjegyű szám összeadását. A táblázatból látszik,

A	B	S	C
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	0	1

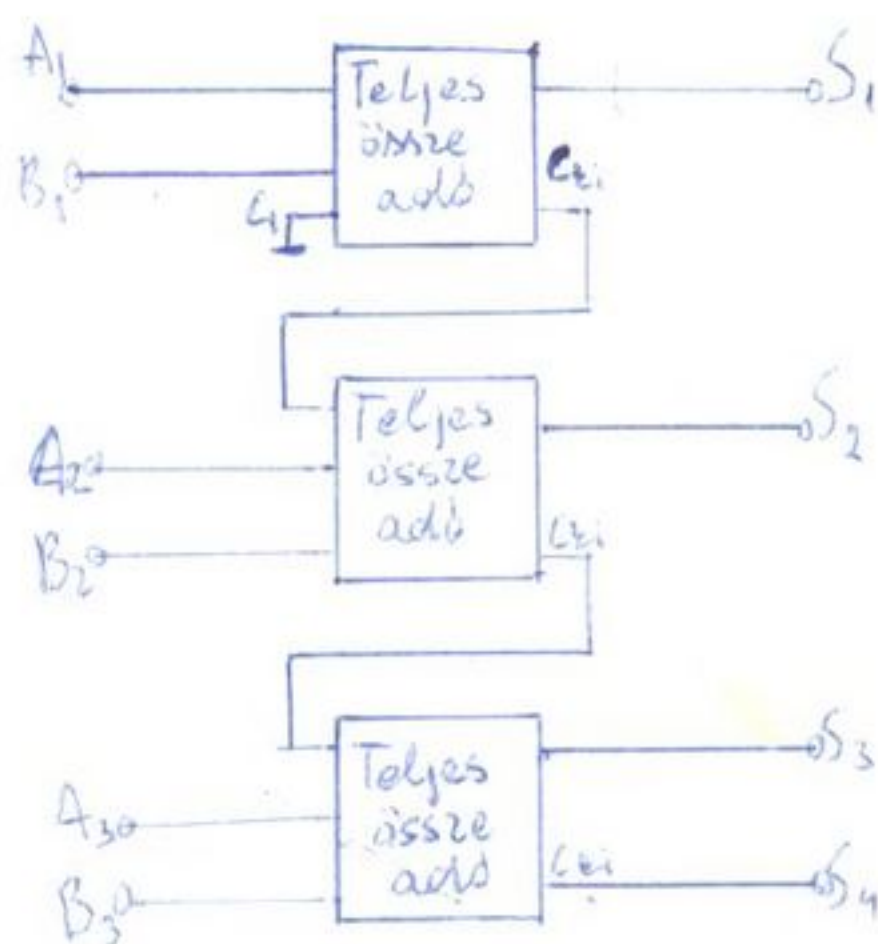


hogy ha S az összeg, akkor azt az $A \oplus B$ művelettel, ha C az átvitel, akkor azt az $A \cdot B$ /logikai / művelettel kaphatjuk meg. Az /1/ rajzon látható egységet, mely az egyjegyű számok összeadását végzi el, fél összeadónak nevezik. A nevéből is látszik, hogy ez csak félmegoldás, de nem ez adta a nevet, hanem az, hogy két fél összeadóból lehet építeni egy olyan, teljes összeadónak nevezett egységet, melyet már használhatunk sok

jegyű összeadók építésére. Lássuk mi a feladata egy teljes összeadónak. Bemenő jelei: A, B /a két összeadandó/ C_{be} /az előző egység átvitele/. Kimenő jelei: S /az összeg/ C_{ki} /az átvitel/. Az összeg nyilván A, B és C_{be} összege; C_{ki} az átvitel, akkor kell, hogy jelet adjon ha A, B és C_{be} közt legalább kettő 1 van.

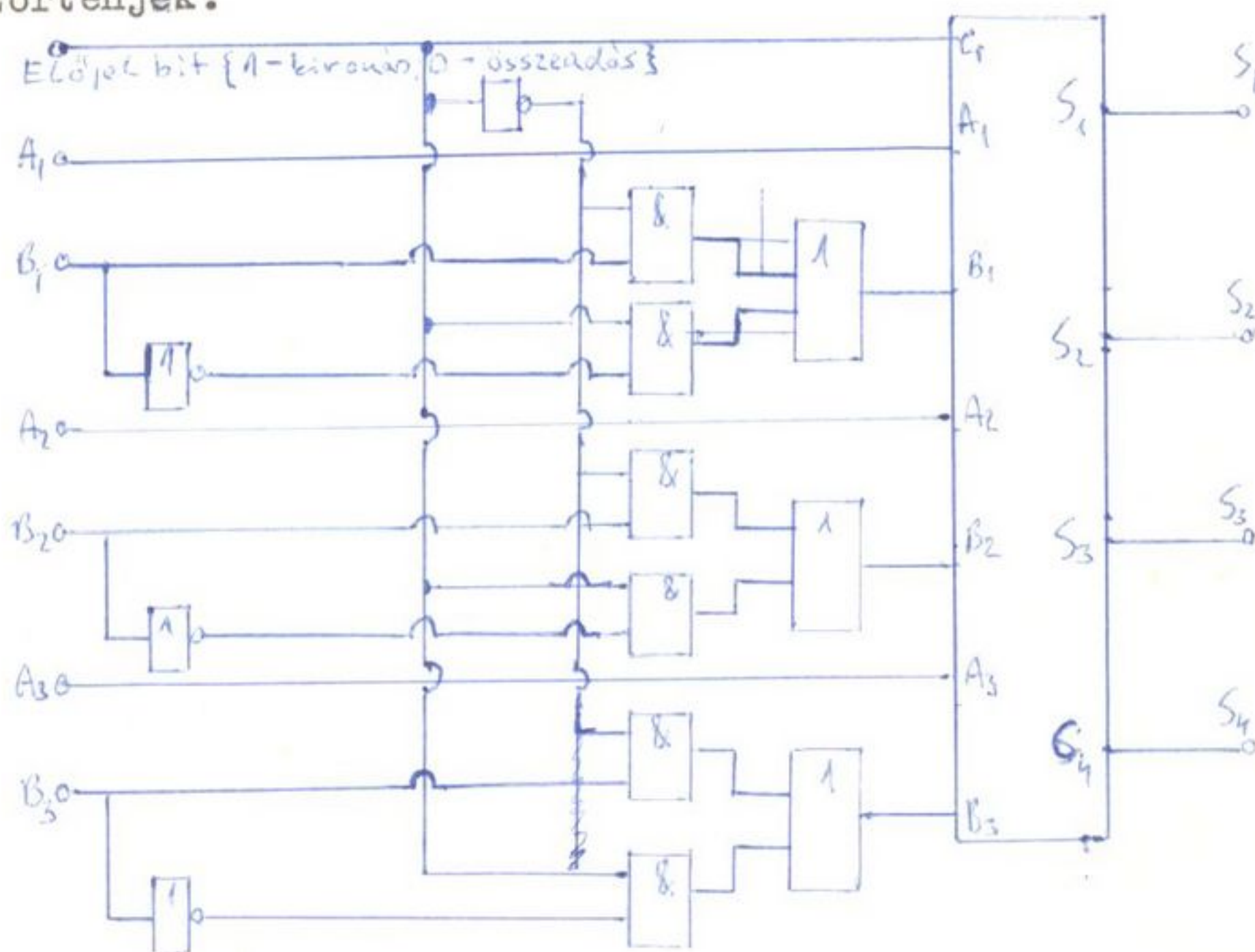


Látható, hogy a /2/ ábrán lévő egység elég tesz követelményeinknek. Rögtön össze is építhetünk egy három bites összeadó áramkört:



A kivonást vissza lehet vezetni összeadásra, mégpedig oly módon, hogy a kivonandónak képezzük a kiegészítőjét és azt adjuk hozzá a kisebbbitendőhöz. A kiegészítő képzésének módja a következő:
A számnak minden számjegyét az ellenkezőjére változtatjuk /vagyis 1 helyére 0, 0 helyére 1 kerül/ és a legkisebb helyiértékű számjegyhez hozzáadunk 1-et. Itt a szám alatt nem csak magát a számot

értjük, hanem az előtte lévő 0-kat is. Legyen A_1 az A-ból úgy kapható, hogy minden számjegyét az ellenkezőjére változtatjuk. Ekkor A_1+1 az A kiegészítője. Nyilvánvaló, hogy $A+A_1=2^{n+1}-1$, ha A n jegyű volt. /Az előtte lévő 0-kkal együtt pl.: a háromjegyű 011 kiegészítője 101/ Így $A+A_1+1=2^{n+1}$. Nekünk azt kell igazolnunk, hogy $B+A_1+1=B-A$. Ez átrendezés után a $2^n=0$ egyenlőséget adná, de ha összeadónk n jegyű, akkor a 2^n szám „túl csorog”, azaz kijelzés-ként tényleg 0-t kapunk. Ilyen módon elkészíthető az összeadó és kivonó áramkör csak gondoskodni kell egy előjel bit-ről, amely megválasztja, hogy összeadás vagy kivonás történjék.



A /4/ ábrán látható hálózat szószerint azt végzi amit elő-
irtunk neki: ha az előjel bit 1, akkor B_1 és $\bar{B}_1$ közül $\bar{B}_1$ -t
engedi az összeadóra és C_1 révén az utolsó jegyhez hozzá ad
1-t. A szorzást és az osztást mint tudjuk vissza lehet ve-
zetni az összeadásra, ill. a kivonásra.⁺ Így tulajdonkép-
pen eljutottunk végső célunkig, a számológéphez, mely ma már
mindenkinek lehet. Vegyük azonban észre ahhoz, hogy ide el-
jussunk kellett a matematika, amely már csaknem 100 éve ki-
dolgozta ezen gépek elvi működési elvét. Végig jártuk e
100 évet néhány oldalon, közben sok érdekes dolgot elhagy-
tunk, hogy utunk jobban látszon, nehogy el vesszen a sűrűben.
A továbbiakban, az ezirányú érdeklődés növelése céljából
az eddig látottaknak egy érdekes, a megszokottaktól eltérő
alkalmazását mutatjuk meg.

+ A szorzó hálózat kapcsolása a jegyzetben

5. Erdekes alkalmazás

Az utóbbi időben egyre több cikk jelenik meg, amelyek „logikusan” játékos gépekről szólnak. Az egyik legismertebb készülék az az egér, amely bármely labirintusban megtalálja a kivezető nyílást. Mi most olyan játékot fogunk ismertetni, természetesen csak elvileg, a fizikai problémákat mellőzve⁺, amely képes bármilyen emberi „játékszótársat” megverni, vagyis mindig nyer. Azonban tudnunk kell ez a gép nem gondolkodik, csak előre belé programozott szigorú algoritmus utasításait hajtja végre. A játék a közismert NIM játék. Ennek szabályai a következők: Két játékos kirak az asztalra néhány csomó gyufát. Egy játékos egyszerre csak egy csomóból vehet el gyufát de abból akár mindet is. Az nyer aki elveszi az utolsó gyufát.

A NIM játék

Feltételezzük, hogy a játék n csomóval r oszloppal folyik és egyik oszlopban sincs k elemnél több. A szabályokat, a hálózat egyszerűsítése céljából, kiegészítjük azzal, hogy egy oszlopból mindig a legfelső elemeket /gyufákat/ kell elvenni. Most megadjuk annak játékosnak a nyerő stratégiáját aki a következő feltételek mellett kapja a táblát /asztalt/:

<u>12345</u>	Átalakítva O_1 -t kettes számrendszerbe, majd O_1 alá O_{i+1} -t írva úgy, hogy az egyes helyiértékek egymás alá kerüljenek, kialakul r oszlop /az ábrán $r=5$ /, melyek között létezik olyan, amelyben páratlan számú egyes van. Ezen helyzetben a stratégia a következő:
$O_1=00101$	
$O_2=01001$	
$O_3=00100$	
$O_4=10000$	

$A=11000$

- 1./ Keressük ki a legnagyobb O_i -t; legyen ez O_k /az ábrán $k=4$ /.
- 2./ O_k -ból vonjunk ki annyit, hogy minden oszlopban páros darab 1 legyen.

Ahhoz, hogy egy gép ezt el tudja végezni, le kell fordítani neki, ami azt jelenti, hogy minél elemibb ítéleteket kívánjon meg az algoritmus.

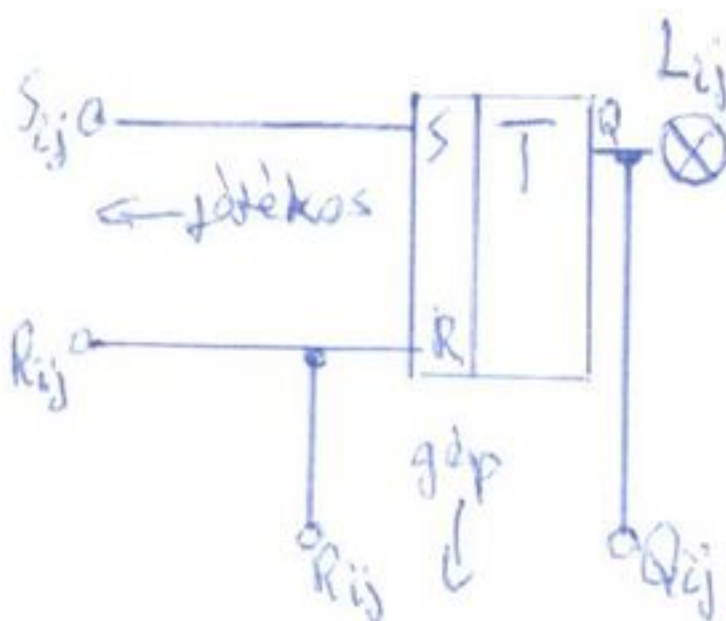
+ kifejtve a jegyzetben

Ezt a következő módon lehet megtenni:

- 1./ A játékos jelére vedd át a táblát, lépést.
- 2./ Keresd ki a legnagyobb oszlopot; legyen ez O_k
- 3./ Számold meg az oszlopokban lévő elemeket, és számukat alkítsd át a kettes számrendszerbe.
- 4./ Rendezd sorokban e számokat $/O_i$ alá $O_{i+1}/$ úgy, hogy az egyes helyiértékek egymás alá kerüljenek.
- 5./ Azon oszlopok alá /az ábrán 1,2,3,4,5/ melyekben páratlan darab 1 van, írd egy 1-t; így kapsz A sort.
- 6./ Ha A-ban van 1, akkor O_k -ból vedd el egy gyufát /elemet/ majd a 3.utasítástól folytassd.
- 7./ Ha A-ban nincs 1; akkor add át a lépést.

Látható, hogy a gépnek olyankor kell lépnie, amikor $A \neq 0$.

Hogy a játékosnak minnél nagyobb legyen az illúziója azt, hogy egy oszlopba hány elemet tesz rábizzuk, de a gépnek megengedjük, hogy első lépésekor egyáltalán ne vegyen el elemet. Először nézzük a gép kezelő szerveit. Jelöljön egy gyufaszálat, egy lámpa ha ég. Jelölje a j. oszlopban és i. sorban lévő lámpát L_{ij} . Egy ilyen lámpának a következő feltételeket kell teljesíteni; szabadon be, ill.ki lehessen kapcsolni, a játékosnak és a gépnek egyaránt.†



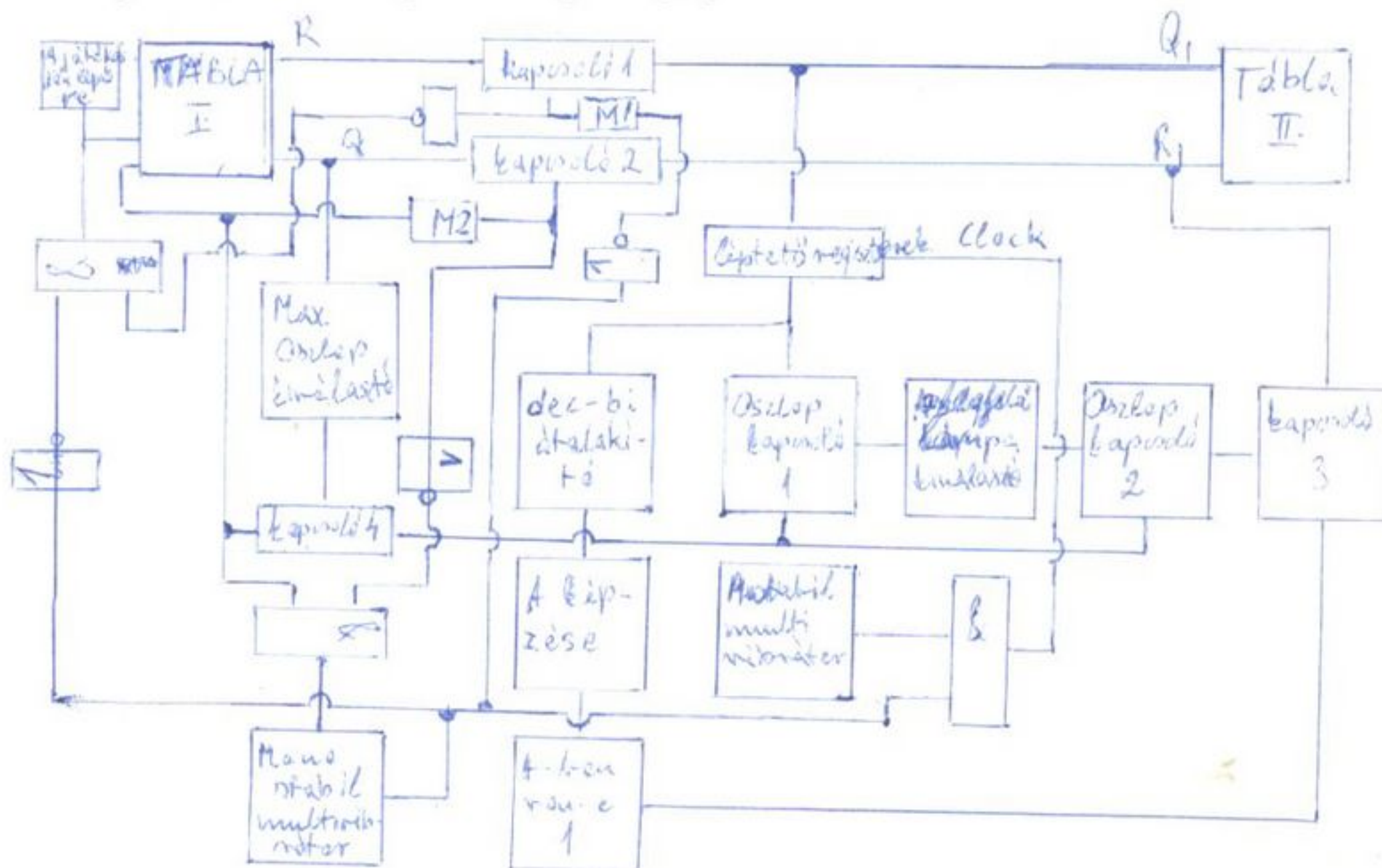
Ennek a feltételnek éppen megfelel

egy S-R taroló. Ha ugyanis a játékos kezébe egy feszültségen lévő fém pálcát adunk, akkor azt az S_{ij} -hez érintve L_{ij} égni kezd, míg R_{ij} -hez érintve, L_{ij} kialszik. Ebből látszik, hogy a gépnek az R_{ij} -re adott feszültséggel módjában áll L_{ij} -t kikapcsolni.

A gépnek szüksége van Q_{ij} -re is, hisz abból értesül L_{ij} állapotáról. Még egy kezelő szervnek lennie kell, ez egy nyomógomb, amivel a játékos jelzi, hogy a gép jön lépésre.

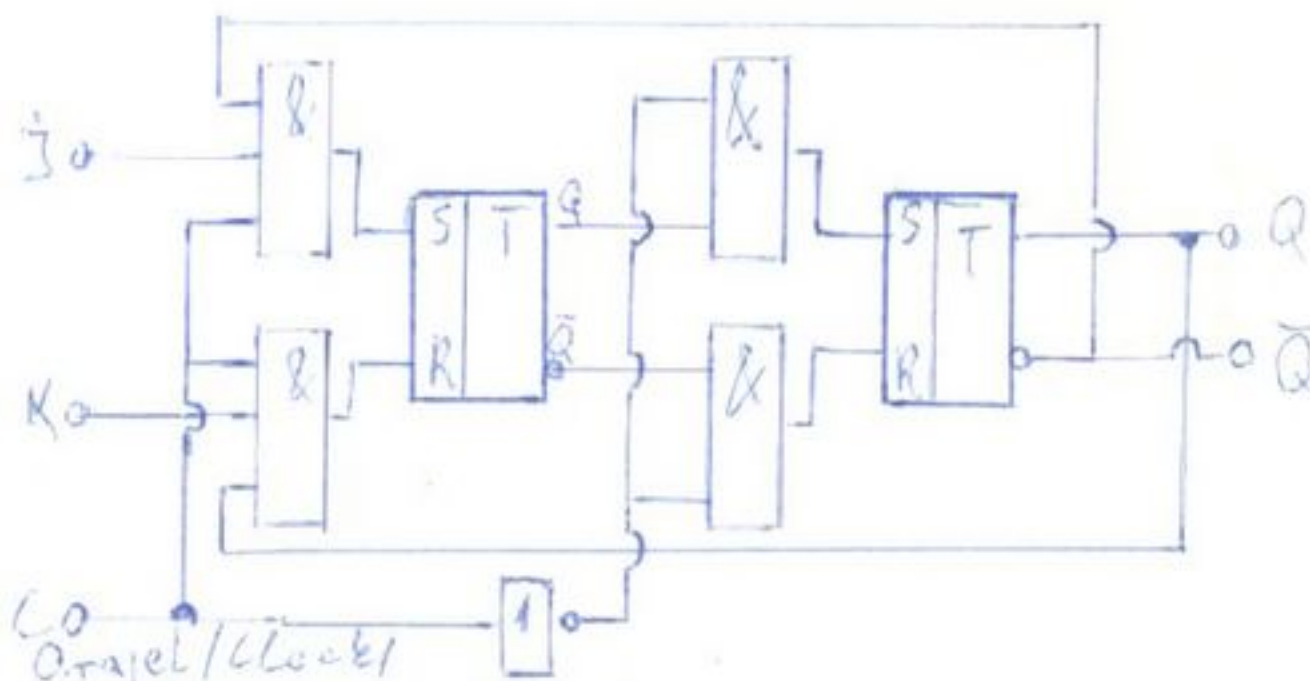
† a gépnek csak a kikapcsolási lehetőségre van szüksége.

Ezek után felrajzolhatjuk gépünk tömb vázlatát:



Rajzunkon néhány olyan tömb /elem/ is szerepel, melyeket eddig nem ismertünk: ~~multivibrátor~~, ~~frekvencia felező~~, léptető regiszter és az ~~MMI~~. ~~A multivibrátor~~^{Asztabil} meghatározott időközönként meghatározott hosszúságú jelet /feszültséget/ ad. ~~A frekvencia felező a hozzáérkező impulzusok közül csak minden másodikat enged tovább~~⁺. A léptető regiszternek egy adat, egy órajel bemenet~~el~~ és ~~adat~~^{Asztabil} kiemenete van. Ahhoz, hogy felépíthessük egy új egységgel az ún. J-K tárolóval kell megismerkednünk.

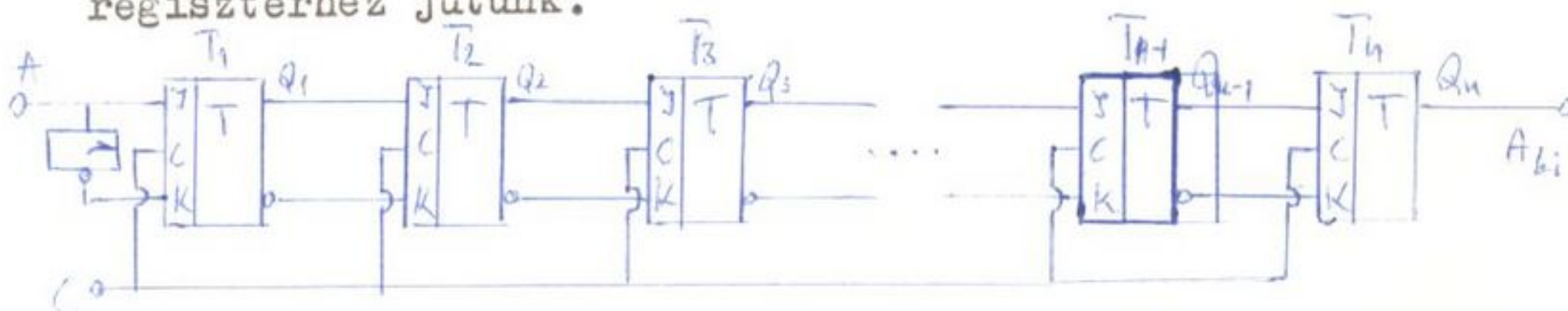
J	K	Q_{n+1}
0	0	Q_n
0	1	0
1	0	1
1	1	$\bar{Q}_n$



Q_n az órajel n . impulzusa alatti kimenőjel.

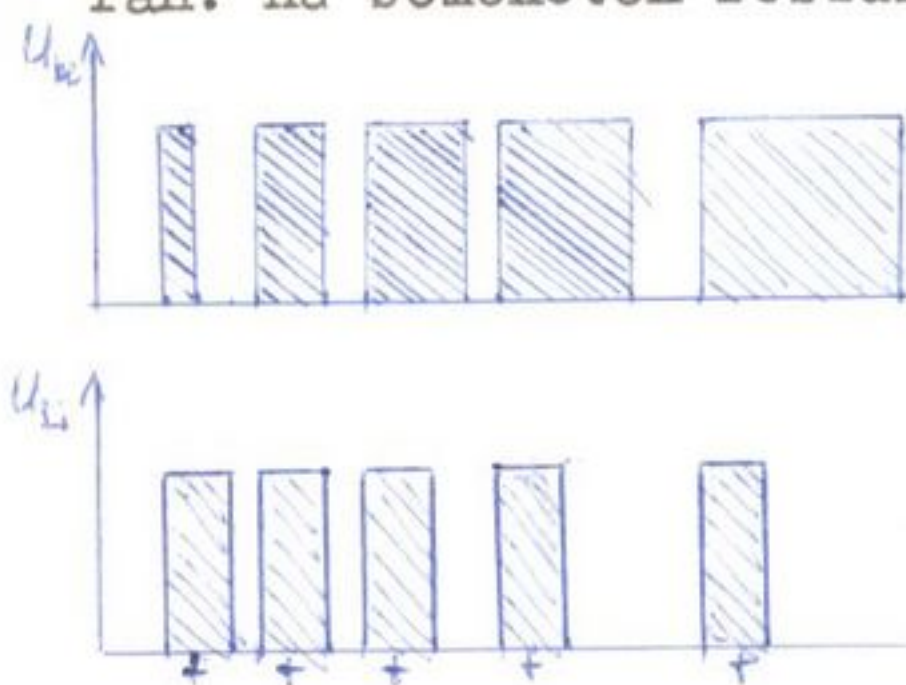
+ kapcsolása a jegyzetben

Az igazságtáblázatból könnyen látható, hogy ha $J=K=1$, akkor Q a C minden második impulzusára vált állapotot; így ez az áramkör frekvencia felezésre használható. Ha elkészítjük a következő kapcsolást, akkor a léptető regiszterhez jutunk.



Világos, hogy C n. impulzusánál A_{ki} a C első impulzusa alatti A -val egyenlő. Az A jel mint egy vándorol

$Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -n. Több vázlatunkon $n=2$. Az MM -nek csak külső jellemzőit ismertetem, mert felépítését tekintve igen bonyolult. Nézzük meg a be és ki menetek kapcsolatát az ábrán: Ha bemenetén feszültség jelenik meg, akkor a kimenetén is, de a bemenő jelnek sem az alakja, sem a hosszúsága, sem a megszűnése nem érdekli, csak a „megjelenés”. Kimenete, ha „megjelenés” volt akkor konstans t ideig szolgáltat jelet és csak a következő „megjelenés” válthatja ki ezt a t idejű jelet, újra.)



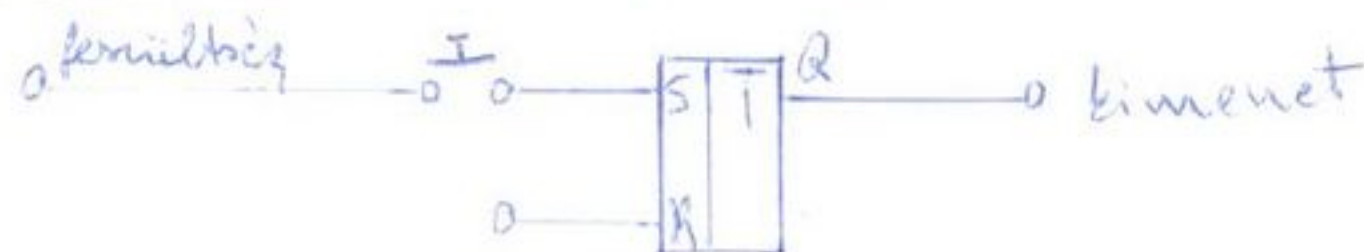
Most pedig elemzzük ki a több vázlatot, tervünket. Q kábel $n \cdot k$ vezetékből, Q_{ij} -ből $/i=1 \dots k; j=1 \dots n/$ áll, R kábel $n \cdot k$ R_{ij} -ből áll. Ha a játékos beállította a játékot /azaz lépett, néhány lámpát kikapcsolt/ megnyomja az indító gombot, amiért annak kimenetele feszültségre került; ezért t_{MM} időre megnyílik a 2 kapcsoló, ~~megnyílik az 5 kapcsoló, megnyílik a 4 kapcsoló is, ha a frekvencia felezőtől is kap jelet.~~ Így a 5 kapcsoló kimenetén, az n vezetéket tartalmazó kábelben megjelenik a legnagyobb oszlop száma /annyiadik vezetéken lesz feszültség, ahányadik a legnagyobb oszlop/; az 1. oszlop kapcsoló ez alapján az a k vezetéket kapcsolja a „legfelső lámpa kapcsolóra”, amely a legnagyobb oszlopot $/O_k/$ képviseli, /ezt azonban a gép táblájáról veszi/ A „legfelső lámpa kapcsoló” a k vezetéket úgy engedi tovább, hogy csak azon lesz feszültség, amelyik legfelül volt és feszültséggel rendelkezett.

A 2.oszlop kapcsoló ezt a jelet a legnagyobb oszlop R kábelére kapcsolja /jó sorrendbe/ ami, ha 3.kapcsoló nyitva van, kioltja a legfelső lámpát. Ez viszont attól függ, hogy a 6.kapcsoló ad-e jelet vagyis, hogy a frekvencia felező és léptető regiszter ad-e jelet. Az olvasóban bizonyára felmerül, minek ~~van~~ a 6.kapcsoló, de képzeljük el ha nem volna, azaz Q_1 és R_1 közvetlenül kapcsolódna az oszlop kapcsolókhoz. Ekkor az 1.oszlop kapcsolóból és a „legfelső lámpa kapcsoló”-ból végül a 2.oszlop kapcsolóból álló rendszer a kiválasztott oszlopból kikapcsolja a legfelsőt. Ekkor azonban újabb legfelső keletkezik, amit megint kikapcsol, és így előbb-utóbb eljut oda, hogy minden lámpát kikapcsolt. Ez nyilván helytelen működés volna. A terjedelembre való tekintettel a további vizsgálódást mellőzöm, inkább áttérek az egyes tömbök részleteire, természetesen azt is csak vázlatosan /persze a hálózatok pontosak/. Az olyan egységhez amit könnyen lehet követni, még magyarázatot sem fűzök.

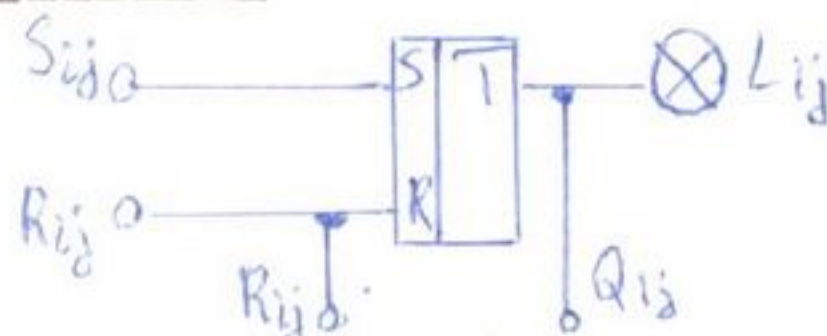
1./ I.tábla - a játékosé -

Funkciói: indítójel megadása; a játékos és a gép kapcsolási lehetőségeinek biztosítása; adatok szolgáltatása a gépnek.

Indítógomb: - R a gép kapcsolója -



Lámpa áramkör:



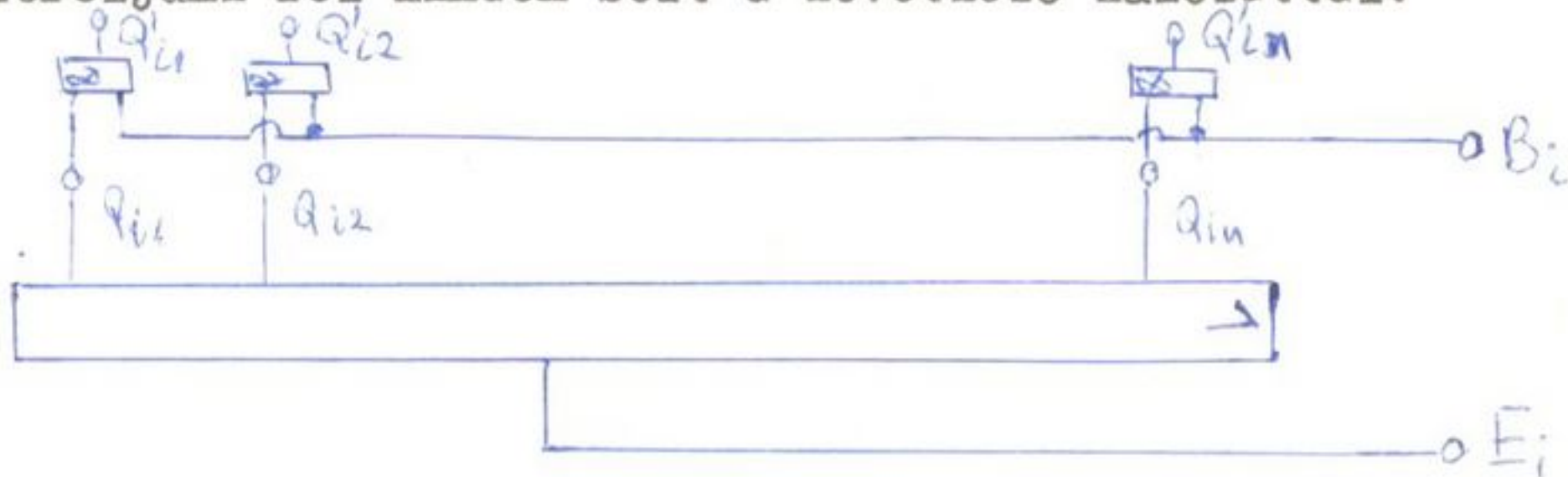
2./ II.tábla - a gépe -

Teljesen azonos az I táblával, csak S_{ij} nincs kivezelve.

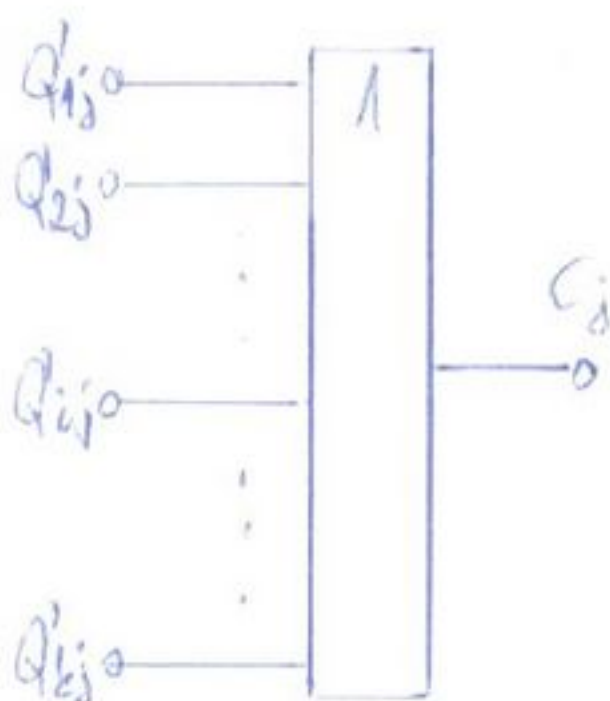
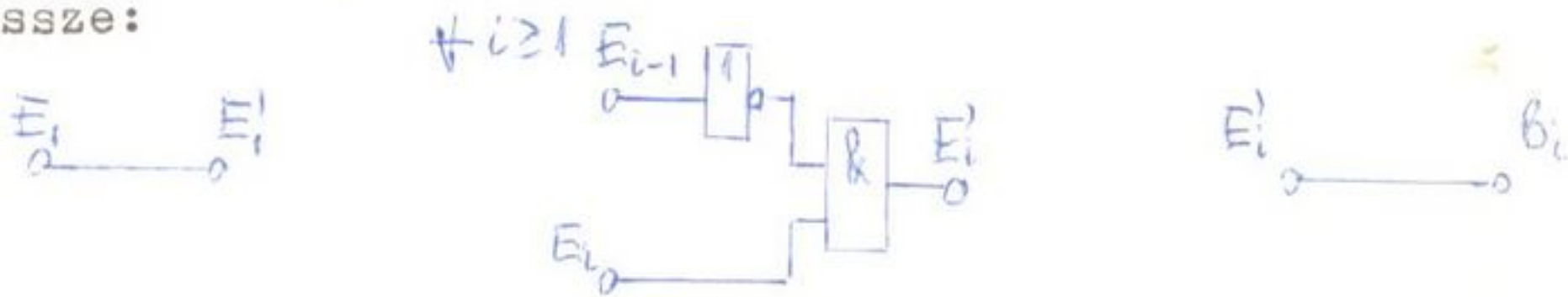
3./ A legnagyobb oszlop kiválasztó

Funkciója: Az adatkábel adatai alapján a legtöbb elemet tartalmazó oszlop kiválasztása, és ezen információ n vezetéken való továbbítása.

Szereljük fel minden sort a következő hálózattal:

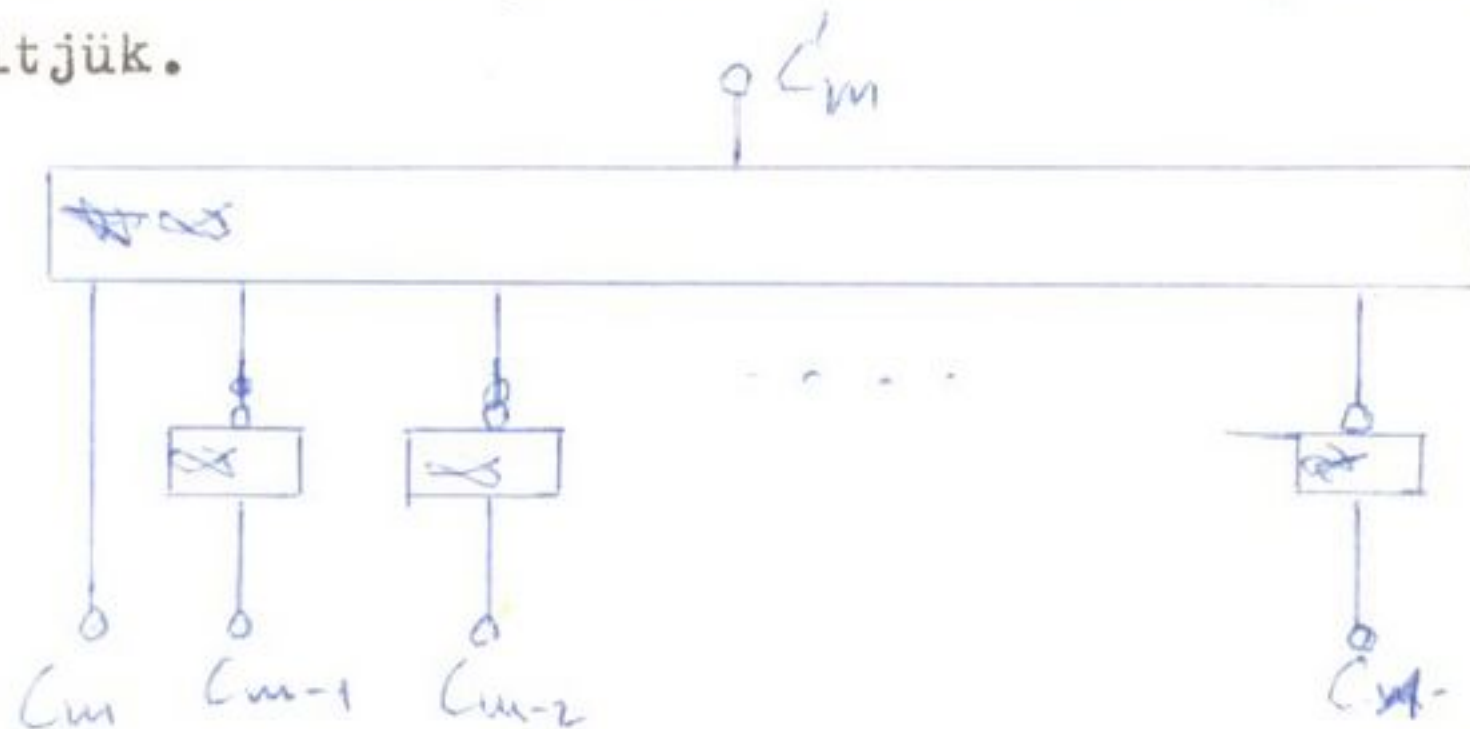


majd az így kapott új értékeket a következő módon kössük össze:



Nyilván E'_i akkor és csak akkor 1, ha $E_{i-1}=0$ és $E_i=1$ azaz ha az $i-1$. sorban nincs az i . sorban van világító lámpa. Viszont, ha az i . sorban van világító lámpa, akkor $i+1, i+2, \dots, k$. sorban is van, azaz $E_j=1$ ha $i \leq j \leq k$, de ha $E_i=1$, akkor $E'_{i+1}=0$ amiből látszik, hogy E'_i -k közül csak azon van feszültség, amelynek sora először tartalmaz világító lámpát.

Mivel $E'_i=B_i$ $Q'_{rm}=0$ ha $r \neq i$ ezért $C_j=1$, akkor a j . oszlop nem kisebb egy másik oszlopnál sem. Mivel több j -re is lehetséges, hogy $C_j=1$. ki kell választanunk ebből egyet, pl. a legkisebb indexűt. Erre jó a következő hálózat, ha minden $1 \leq m \leq k$ -ra elkészítjük.

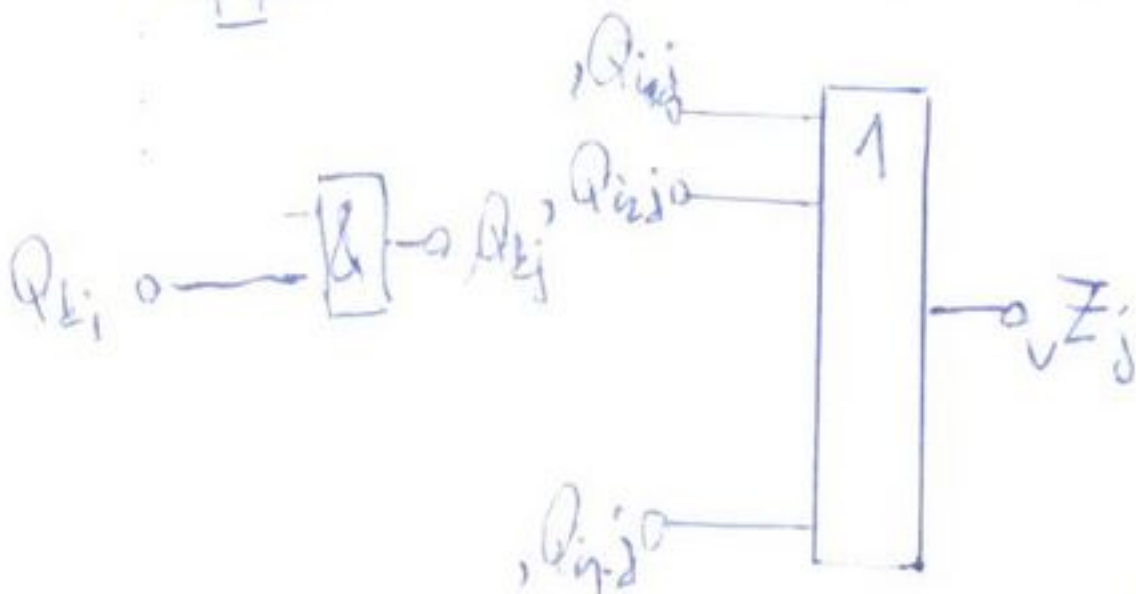
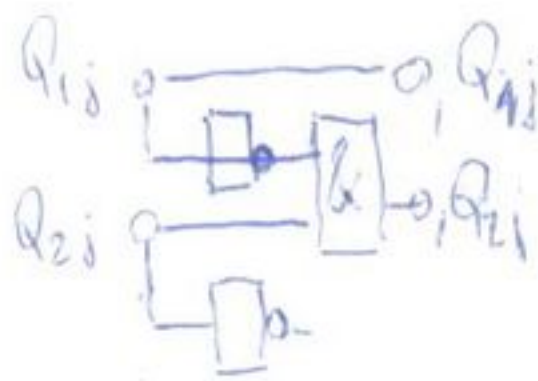


Világos, hogy C'_m csak akkor lehet 1, ha C_m a legkisebb indexű 1, mert ha nem, akkor $C_i=1$ ahol $1 \leq i \leq m$, de ekkor $\bar{C}_i=0$, ami $C'_m=0$ -t vonná maga után. Tehát a C'_i -k darab vezetése pontosan megfelel a kimenet kívánalmainak.

4./ A decimális, bináris átalakító

Funkciója: Az oszlopokban lévő égő lámpák számát ^{nek} kettes számrendszerbe alakítja.

Mivel az oszlopokban alulról számolhatjuk az elemeket /hisz fentről oltogatjuk/ az átalakítás igen egyszerűen mehet. Tegyük fel, hogy $2^p \leq k \leq 2^{p+1}$ /érdemes k -t 2 hatványának választani/. A könnyebbség kedvéért, most alulról számoljuk a sorokat, tehát az itteni i .sor, a táblán a $k-i+1$. sornak felel meg. Jelentse ${}_vZ_j$ a j .oszlop v .helyi értékű számát. A j .oszlopból az OR kapu bal oldalára az



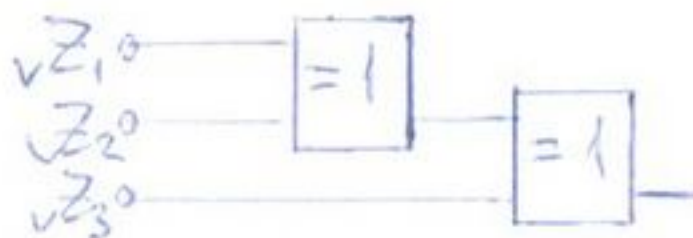
olyan Q_{ij} -ket kell bekötni, amelyre $i \equiv 2^{v-1} + s \pmod{2^v}$ ahol $0 \leq s \leq 2^{v-1}$.

Igy ${}_2O_j = {}_pZ_j {}_{p-1}Z_j \dots {}_1Z_j$ /kettes számrendszerben O_j / Tehát az „A képzése”-be p_j vezeték fut.

S.P

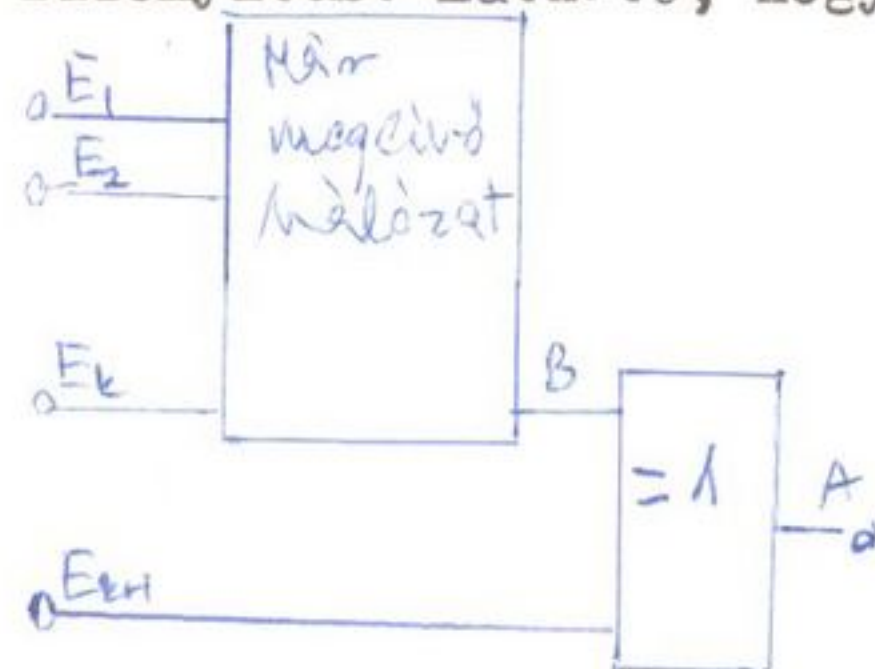
5./ A képzése

Funkciója: A képzése



Ha ezt a hálózatot mind a p oszlopra felszereljük, akkor megkapjuk A -t, hisz $A = A_p A_{p-1} A_{p-2} \dots A_1$. Ennek az áramkörnek a helyessége olyan érdekes bizonyítással mutatható meg, hogy ezt meg kell mutatnom, másrészt a bizonyítás módszere, amely teljes indukció, ismét rámutat, miért érdemes foglalkozni a matematikával.

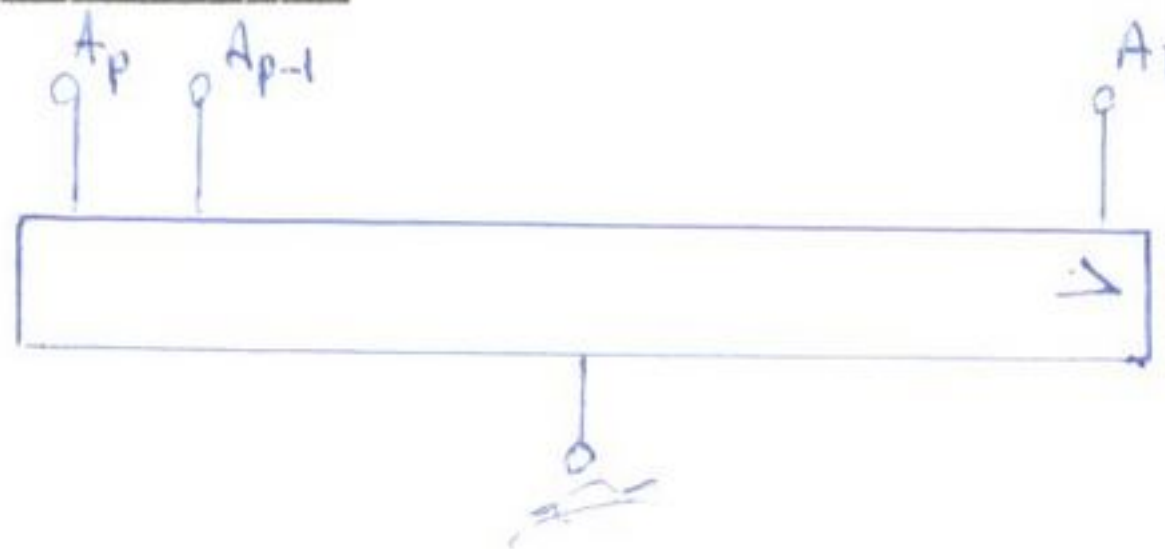
Bizonyítás: Látható, hogy 2-re hálózatunk jól működik.



Tegyük fel, hogy k -ra teljesül az, hogy az áramkör kimenetén B -n csak akkor van jel, ha bemenetein páratlan 1 van. Vegyünk egy újabb exOR egységet áramkörünkhöz. Ekkor ha $B=1$ és $E_{k+1}=1$ akkor $A=0$, $E_{k+1}=0$ akkor $A=1$. Eddig tehát jól működik a hálózat. Ha $B=0$ akkor $E_{k+1}=A$ ami

újra a jó működést bizonyítja. Tehát $p+1$ vezeték fog tovább menni a „van-e A -ban 1 ”-be.

6./ „van-e A -ban 1 ”



~~72/ Frekvencia felező /trigger/~~

8 88./ A legfelső lámpa kapcsoló

Funkciója: Az 1.oszlopkapcsoló által az $F_1 F_2 \dots F_k$ pontokra kapcsolt oszlopból a legfelső égő lámpa kiválasztása

70./ 1.oszlopkapcsoló

71./ 2.oszlopkapcsoló

100

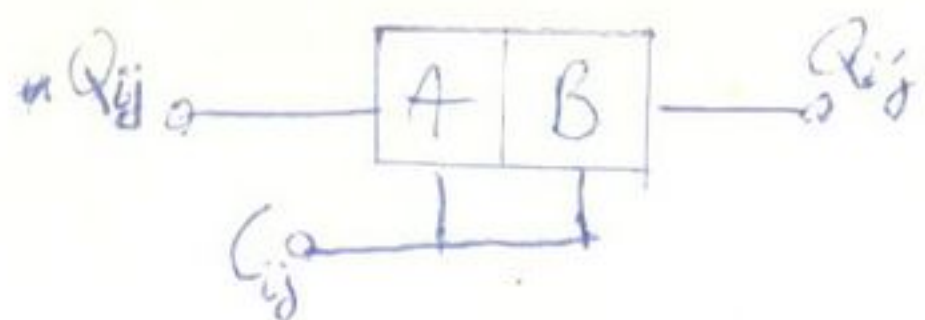
11./ Kapcsolók

Funkciójuk: Néhány vezeték kapcsolása egy jel hatására.
Annyi db. ilyen elemre van szükség ahány vezetékből áll a kapcsolandó kábel. Így az 1. 2. 3. 4. kapcsoló n.k, a 5. kapcsoló m, a 6. kapcsoló l vezetéket kapcsol.

Ezzel elkészítettük az automata matematikai modeljét.
Ha ezek után figyelembe vesszük a fizikai problémákat is, akkor megkapjuk a teljes megoldást, amit akár fel is építhetünk.

10./ Léptető regiszterek

Funkciójuk: Az instabil multivibrátor minden második jelére, a kábelben előző impulzus ideje alatt kialakult helyzet adatainak kivitele a logikához, és annak megtartása következő impulzusig.
Felőljon egy léptető regisztert a következő:



Kábel

Ha ezt a hálózatot a Q_1 ~~hálózat~~ minden csomópontjára felszereljük, megkapjuk a kívánt hálózatot