

Korrekciók és kiegészítések az Euklidészi geometria könyvhöz

Sajnos minden könyvben vannak hibák és hiányosságok, akármennyire gondos az előállítás. Ebben a dokumentumban ezek találhatók, pontosabban az eddig felfedezettek, hiszen — bár ez elvi ellentmondásnak tűnik egy véges sok karaktert tartalmazó könyvben :-) – korrigálni és kiegészíteni való minden javítás után marad minden könyvben.

Kérem, hogy aki bármely súlyosságú további hibát is talál e könyvben, azt jelezze a kurusa@math.u-szeged.hu elektronikus levelezési címemre.

Korrekciók az Euklidészi geometria könyvben

A korrekció helyét egy a^b vagy a_b alakú koordináta adja meg, melyek jelentése:

$$\begin{cases} a^b, & \text{az } a \text{ sorszámú oldalon felülről sorban a } b\text{-edik sorban,} \\ a_b, & \text{az } a \text{ sorszámú oldalon alulról sorban a } b\text{-edik sorban.} \end{cases}$$

Régebbi adatokkal való kompatibilitás érdekében $b > 0$ esetén $a^{-b} := a_b$.

<i>hely</i>	<i>hiba</i> $\longrightarrow$ <i>javítása</i>
i ¹⁰	biztosít $\longrightarrow$ terem
2 ⁻⁵	két különböző $\longrightarrow$ egy <i>megjegyzés</i> : Lásd a K.7. tételt.
4 ⁶	P pont megelőzi a P pontot $\longrightarrow$ P pont megelőzi a Q pontot
4 ⁻¹⁴	irányításában $\longrightarrow$ irányításában
4 ⁻⁸	nyílt $\longrightarrow$ nyílt
5 ⁶	$\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}^P \longrightarrow \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}^P \setminus g$
5 ⁷	$\mathfrak{S}^P$ osztályon $\longrightarrow$ $\mathfrak{S}^P \cup g$ halmazon
5 ⁸	$\mathfrak{S}^P$ osztályon $\longrightarrow$ $\mathfrak{S}^P \cup g$ halmazon
5 ⁻¹³	$\overline{PR}$ szakaszon $\longrightarrow$ $\overline{PR}$ zárt szakaszon
5 ⁻¹⁰	$\mathcal{Q}_-$ és $\mathcal{Q}_+$ $\longrightarrow$ Q_- és Q_+
5 ⁻⁶	Tekintsük $\longrightarrow$ Valamely $Q \in \mathcal{Q}$ pontra tekintsük
7 ¹³	Ha ... hívjuk. $\longrightarrow$ <i>Törölnöd.</i>
8 ¹⁴	paralelogramma. $\longrightarrow$ paralelogramma, valamint minden nem az AB egyenesre eső Z, T pontra $BCZT$ akkor és csak akkor paralelogramma, ha $DATZ$ is paralelogramma.

- 9³** $\mathcal{S}^i$, és egy g egyenes ideális pontját g^i . $\rightarrow \mathcal{S}^i$. Egy g egyenes g^i párhuzamossági osztályát a g egyenes ideális pontjának nevezzük.
- 9¹³** g^i ideális egyenesen $\rightarrow \mathcal{S}^i$ ideális egyenesen
- 9¹⁴** g^i ideális egyenesen $\rightarrow \mathcal{S}^i$ ideális egyenesen
- 12⁹** egybeesik az S_1 és S_2 síkok $\rightarrow$ egybeesik az S_1 és S_3 síkok
- 13⁹** $\mathcal{S}_3$ egyenes metszete $\rightarrow \mathcal{S}_3$ sík metszete
- 12⁻⁷** átmegy a P ponton és párhuzamosak $\rightarrow$ átmegy a Q ponton és párhuzamos
- 14⁻⁵** affin sík $\rightarrow$ affin tér
- 16¹⁷** hiszen ez ez a pont $\rightarrow$ hiszen ez a pont
- 19⁻⁴** *értelmes beszúrni*: $\rightarrow$ Vegyük észre, hogy $(P, Q) \stackrel{P}{\sim} (R, S)$ akkor és csak akkor, ha $(P, R) \stackrel{P}{\sim} (Q, S)$.
- 24⁸** pontot a jobboldali ábrán, amelyre $\rightarrow$ pontot (nem kollineáris P, Q, R ponthármasra a jobboldali ábrán látható), amelyre
- 25^{6,7}** Q pontra és ... legyen $X_P(n, Q)$... melyre $\rightarrow$ Tetszőleges P pontra és rá illeszkedő e egyenesre legyen $X_P: \mathbb{N} \times e \rightarrow e$ olyan, hogy
- 25⁻³** $Q_{n-1}R \stackrel{P}{\sim} SQ_{n+1} \rightarrow (Q_{n-1}, R) \stackrel{P}{\sim} (S, Q_{n+1})$
- 26³** pont. Tegyük $\rightarrow$ *beszúrás*: pont, és $S \in \overline{Q_{n-1}T}$, valamint $R \in \overline{Q_{n-1}T}$, mert a Q_nSTR paralelogramma átlóinak $M = \overline{RS} \cap \overline{Q_nT}$ metszéspontja azt mutatja, hogy T és a Q_i pontokat tartalmazó, az ST egyenessel párhuzamos PQ egyenes az ST egyenes különböző oldalán vannak. Tegyük
- 27¹⁴** Az X_P monotonitása miatt ebből $P = X_P(0, R) = X_P(1, R) = \dots = X_P(n, R) = P$ következik $\rightarrow$ Az X_P első argumentuma szerinti szigorú monotonitása miatt ebből $P = X_P(0, R) \preceq X_P(n, R) = P$ következik
- 28²** X_P második $\rightarrow$ X_P első
- 29⁷** $\dots = X_P(n, Q^0)$ és $\rightarrow \dots = X_P(n, Q^0)$ valamint
- 29¹⁶** *értelmes beszúrni* $\rightarrow$ Eszerint minden nem elfajuló $\overline{PR}$ szakasz esetén pontosan egy olyan T pont van, amelyre $(P, T) \stackrel{P}{\sim} (T, R)$. Ezt a T pontot a $\overline{PR}$ szakasz *affin felezőpontjának* nevezzük. Korábban láttuk, hogy ez az a pont, amely bármely $\overline{PR}$ átlójú paralelogramma átlóinak metszete, ami lehetővé teszi, hogy a Desargues-tulajdonság feltételezése nélkül igazoljuk, hogy minden $\overline{PR}$ átlójú paralelogramma átlóinak metszete ugyanazon pont. Ez a pont tehát definiálja az affin felezőpontot a Desargues-tulajdonság feltételezése nélkül.
- 29⁻¹²** határa. $\rightarrow$ határa, ahol $\mathcal{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \mathcal{Q}_{<r} = \{X_P(q, Q) : 0 < q < \mathbb{Q}\}$.
- 31¹²** Minden $\lambda \in \mathbb{R}$, és ... $\rightarrow$ *Áthelyezés* a -12. sorba "Ez igazolja ..." elé.

- 31**¹⁴ annak tulajdonságai megmaradnak, vagyis $X_P(\lambda, Q)$ szigorúan monoton függ mind a $\lambda \in \mathbb{R}$ számtól, mind a Q ponttól, és $X_P(\lambda, X_P(\mu, Q)) = X_P(\lambda \cdot \mu, Q)$. $\rightarrow$ annak monotonitása megmarad, vagyis $X_P(\lambda, Q)$ szigorúan monoton függ mind a $\lambda \in \mathbb{R}$ számtól, mind a Q ponttól.
- 31**⁻¹² Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és ... $\rightarrow$ *Beszúrás* K.13. Tétel, és „Eredményünk érvényessé teszi következő definíciónkat.” és *módosítás*: **Definíció**. Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és ... *Új sor*.
- 31**⁻¹² Ez igazolja a következő tételt. $\rightarrow$ A korábbiak figyelembe vételével a definícióból azonnal következik a következő tétel.
- 31**⁻¹⁰ (1) ... $\rightarrow$ *Törlés*. (Bizonyítását lásd K.16. Tétel)
- 31**⁻⁹ (2) ... (3) ... $\rightarrow$ *felcserélve átsorszámozás*: (1) ... (2) ... (Bizonyítását lásd K.14. Tétel)
- 31**⁻⁷ Az eddigiek alapján ... $\rightarrow$ *Beszúrás a sor elé*: A szabad vektor valós számmal való szorzása harmadik tulajdonságának bizonyításához előbb a párhuzamos szelők tételét általánosítjuk. K.15. Tétel. K.16. Tétel
- 31**⁻⁴ a valóssal való szorzás bijektív leképezés. $\rightarrow$ a következő tétel szerint bármely $P \neq Q$ pontok esetén az $X_P(\cdot, Q): \mathbb{R} \rightarrow PQ$ leképezés, melyre $\lambda \mapsto X_P(\lambda, Q)$, bijektív.
- 33**⁵ akkor $\rightarrow$ akkor $\lambda + \mu = 1$ és
- 33**⁻⁹ $\mathcal{S}_O \dots \mathcal{T}_O \rightarrow$ *végig helyettesíteni kellene: $\mathcal{T}_O \mathcal{S} \dots \mathcal{T}_O \mathcal{T}$*
- 35**⁻¹¹ A jelölés ... egymáshoz rendelése. $\rightarrow$ *törölni a szakasz végéig*
- 36**⁻¹⁴ párhuzamosak $\rightarrow$ párhuzamos
- 36**⁻⁵ véges $\rightarrow$ *törlendő*
- 36**⁻¹ megegyezik $\rightarrow$ megegyezik
- 44**^{9,10} képe az az $a'z + b't = c' \rightarrow$ az az $a_\phi z + b_\phi t = c_\phi$
- 44**¹⁰ , mert $\rightarrow$, hiszen
- 44**¹¹ $a_\phi(z - x_0) + b_\phi(t - y_0) = c \rightarrow a_\phi(z - x_0) + b_\phi(t - y_0) = 0$
- 46**⁻⁴ tehát $f_{(x,y)}(\lambda) = \lambda \rightarrow$ tehát $f(\lambda) = \lambda$
- 47**¹¹ $\rightarrow$ *beszúrni*: Előbbi két tételünk értelmében minden koordinátatranszformáció alakja olyan, melyet előbbi tételünk állít, de ennek fordítottja is igaz. Lásd Tétel K.8.
- 51**⁻² Nyilvánvaló, hogy ... $\rightarrow$ *egész mondat átfogalmazása*: Nyilvánvaló, hogy a φ tengelyes affinitás bármely tengelyén adott $\mathbf{u}$ vektor a φ sajátvektora, melyre $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ teljesül a tengelyhez tartozó λ sajátértékre, és ez a λ legfeljebb egyetlen tengely esetében lehet nem 1.
- 52**¹ Világos, hogy ... $\rightarrow$ *egész mondat átfogalmazása*: Eszerint egy tengelyes affinitás pontosan akkor fordítja meg az irányítást, ha az egyetlen nem 1 sajátértéke negatív szám, így például az affin tükrözések is irányítást váltók.

- 52**⁵ Két origót fixen hagyó tengelyes $\rightarrow$ Két metsző tengelyű tengelyes
52⁹ Ha az origót fixen hagyó $\rightarrow$ Ha az affinitások tengelyeinek metszete az O pont, akkor válasszuk az O pontot origónak. Ha a
52⁻⁵ sor végére beszúrando: és ha
52⁻⁴ ez a sor törlendő
53⁴ Az O origót $\rightarrow$ Előző bekezdést folytatva: Az O origót
53⁵ Az O origót fixen hagyó középpontos tükrözések – ezeket rendszerint τ_O jelöli – $\rightarrow$ Új bekezdésbe: Az affin középpontos tükrözések
53⁷ transzformációk. $\rightarrow$ transzformációk. *beszúrás:* Az O pontot fixen hagyó affin középpontos tükrözéseket rendszerint τ_O jelöli.
53⁻⁵ A φ transzformációt $\rightarrow$ A φ affin transzformációt
53⁻⁴ minden R pontra $\rightarrow$ minden $R \notin PQ$ pontra
53⁻³ a tétel elé *beszúrás* $\rightarrow$ Definíciókban a φ transzformációra tett affinitási megkötés elhagyható, ha olyan pontokra is definiáljuk a φ leképezést, mely a PQ egyenesen van, például úgy, hogy $R \in PQ$ pont esetén $R' \in P'Q'$ és valamely $S \notin PQ$ pontra $RS \parallel R'S'$, ahol $S' = \varphi(S)$. Ebben az esetben bizonyítható, hogy minden $S \notin PQ$ pontra $RS \parallel R'S'$ és φ egy affinitás.
54¹³ a nullát fixen tartja $\rightarrow$ az origót fixen tartja
54¹⁴ mint elemében $\rightarrow$ minden elemében
54⁻¹⁴ típusú lesz és a sorrendtől független. $\rightarrow$ típusú és a sorrendtől független lesz.
69⁶ nevezük $\rightarrow$ nevezünk
71¹ Metrikus $\rightarrow$ Darboux-metrikus
71¹¹ és $\lambda \cdots \lambda$ miatt $\rightarrow$ és így a Darboux-tulajdonság miatt $\lambda \cdots \lambda$, amiért
71¹³ hogy minden $\rightarrow$ hogy Darboux-metrika esetén minden
71¹⁵ metrikus $\rightarrow$ Darboux-metrikus
71¹⁻¹⁷ át kell helyezni a 72. oldal aljára és elé beszúrni $\rightarrow$ Egy metrikát Darboux-tulajdonságúnak mondunk, ha tetszőleges nyílt $\overline{PR}$ szakasz esetén minden $\lambda \in (0, d(P, R))$ valós számhoz van olyan $Q \in \overline{PR}$ pont, melyre $d(P, Q) = \lambda$. Egy Darboux-tulajdonságú metrikát Darboux-metrikának is nevezünk.
71¹⁴ felezőpontja $\rightarrow$ metrikus felezőpontja
71¹⁹ nevezzünk $\rightarrow$ nevezünk
72¹ bijektíven $\rightarrow$ törlendő
72¹¹⁻¹⁴ $\rightarrow$ törlendő
72¹⁵ Ezek szerint, ha $\rightarrow$ Ha
72¹² $\cdots = d(\varphi(P), Q') \rightarrow \cdots = d'(\varphi(P), Q')$
72⁻⁹ utolsó állítás. $\rightarrow$ utolsó állítása.

- 73**¹ metrikus $\rightarrow$ Darboux-metrikus
- 73**¹³ $d(O', X'_{1-i}) = \varphi(X_i) \rightarrow X'_{1-i} = \varphi(X_i)$
- 75**¹⁸ $|\mathbf{v}| \rightarrow |\mathbf{v}|_d$
- 76**⁻¹³ definitiségnek $\rightarrow$ definitiségének
- 81**⁸ *alternatív bizonyítás* $\rightarrow$ Minthogy a nullvektor normája 0, $f(0, 0) = 0$, tehát $d = 0$. Mivel $f(x, y) = 1$ megoldáshalmaza gömbtípusú, minden az origón átmenő egyenessel pontosan két közös, egymással ellentétes pontja van, ami azt jelenti, hogy minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számra az $f(x, \lambda x) = 1$ és $f(\mu y, y) = 1$ egyenleteknek az x és y változóiban pontosan két, egymással ellentett megoldása van, vagyis ezen másodfokú egyenletek lineáris tagjainak együtthatói nullák, diszkriminánsaik pedig pozitívak. Eszerint $b + \lambda c = 0$ és $\mu b + c = 0$ minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számra, amiből $b = c = 0$ következik. Ezt felhasználva a diszkriminánsokra $0 < a_{11} + 2\lambda a_{12} + \lambda^2 a_{22}$ és $0 < \mu^2 a_{11} + 2\mu a_{12} + a_{22}$ adódik minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén. Ezekből viszont az itt megjelenő másodfokú polinomok diszkriminánsára $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ következik. Végül a $\lambda = 0 = \mu$ esetből $0 < a_{11}$ és $0 < a_{22}$ adódik.
- 81**¹⁴ Ha $f(\dots \rightarrow$ Legyen $f(\dots$
- 82**² $f(x, y) = \dots = \left(x\sqrt{a_{11}} + y\frac{a_{22}}{2\sqrt{a_{11}}}\right)^2 + \left(y\frac{\sqrt{4a_{11}a_{12}-a_{22}^2}}{2\sqrt{a_{11}}}\right)^2 \rightarrow f(x, y) = \dots = \left(x\sqrt{a_{11}} + y\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2 + \left(y\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2$
- 82**¹¹ $f(x, y) = f(\mu x_0, \mu y_0) = \mu^2 f(x_0, y_0) = \mu^2 \rightarrow f(\mu x, \mu y) = \mu^2 f(x, y)$
- 84**⁹ $\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (x_0 - x_1)^2} \rightarrow \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$.
- 88**² egyenestől. $\rightarrow$ *beszúrás*: egyenestől, de a definíció elfogadásához még igazolnunk kell, hogy $\tau_e(P)$ nem függ az O pont választásától sem. *Ez közvetlenül következik a 88. oldal utolsó bekezdésének formulájából, mely bekezdést éppen ezért érdemes lenne a 88. oldal tétele elé másolni.*
- 88**¹¹ $|(\tau_e(P))_O - (\tau_e(Q))_O| \rightarrow |(\tau_e(P))_O - (\tau_e(Q))_O|^2$
- 88**¹⁴ $|P_O - Q_O| \rightarrow |P_O - Q_O|^2$
- 92**⁻⁸ Közös egyenesre merőleges egyenesek merőlegesek. $\rightarrow$ Közös egyenesre merőleges egyenesek párhuzamosak.
- 94**⁻⁶ $X_O(\lambda, P)X_O(\lambda, P) \rightarrow X_O(\lambda, P)X_O^\perp(\lambda, P)$
- 102**² χ_λ affinitás $\rightarrow \chi_\lambda$ homotécia
- 102**⁴ azonosságot $\rightarrow (PQR) = (\varphi(P)\varphi(Q)\varphi(R))$ és $(SRQ) = (\varphi(S)\varphi(R)\varphi(Q))$ azonosságokat
- 102**⁵ *képletsor végére beszúrni* $\rightarrow \frac{d(\varphi(S), \varphi(Q))}{d(S, Q)}$
- 102**⁶ olyan állandó $\lambda_e \in \mathbb{R} \rightarrow$ olyan $\lambda_e \in \mathbb{R}$
- 102**¹¹ könnyen kiszámolhatja $\rightarrow$ könnyen felírhatja

- 102¹¹ és az $\longrightarrow$ és a
 102¹² affinitás mátrixa $\longrightarrow \varphi$ affinitás $\hat{\varphi}$ lineáris része
 102¹² behelyettesítéssel. $\longrightarrow$ behelyettesítéssel és a norma használatával,
 hiszen $\lambda_e = \frac{d(\varphi(P), \varphi(Q))}{d(P, Q)} = \frac{|\varphi(P)\varphi(Q)|}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{|\hat{\varphi}(\overrightarrow{PQ})|}{|\overrightarrow{PQ}|}$. *Megjegyzés: felvetődik a kérdés, hogy ez az $e \mapsto \lambda_e$ függvény mennyiben határozza meg magát a φ affinitást. A válasz a K.9. tételben van.*
 102⁻⁸ pontot akkor $\longrightarrow$ pontot, akkor
 103⁻⁶ $\iota = \tau_e \tau_e \tau_g \longrightarrow \iota = \tau_e \tau_f \tau_g$
 104⁶ $P = \varphi(P) \longrightarrow P \neq \varphi(P)$
 108⁻¹³ két tengelyes tükrözés $\longrightarrow$ két centrális tükrözés
 109³ $\longrightarrow$ *ide előre hozni* a lap alján lévő „egyértelmű reprezentálás” tételét és *utána beszúrni* a K.2. Tételt.
 109¹¹ ezért a fixpont-tétel értelmében $\varepsilon = \text{id}$, $\longrightarrow$ ezért a K.2. Tétel értelmében $\varepsilon = \text{id}$,
 110⁻⁸ tehát $\iota = \varepsilon$ eltolás. $\longrightarrow$ tehát $\iota = \tau_O$ centrális tükrözés.
 119³ A fixpont tétel (3) pontja $\longrightarrow$ A fixpont-tétel (4) pontja
 123⁻⁴ pozitív együtthatós dilataciókat $\longrightarrow$ pozitív λ együtthatós O_λ dilataciókat
 125³ $\frac{\lambda d(M, Q)}{\lambda d(M, Q)} \longrightarrow \frac{\lambda d(M, P)}{\lambda d(M, Q)}$
 125^{-3, -2} $\longrightarrow$ Tétel elé *beszúrás*: Az is igaz, hogy a merőlegességet tartó affinitások homotéciák. Ennek az affinitások mátrixos alakjából való bizonyítása az olvasóra marad.
 128⁴ $P_3 \neq P'_3 \longrightarrow P_3 = P'_3$
 128¹³ $\psi''' = \text{id} \longrightarrow \psi''' = \text{id}|_{\mathcal{A}}$
 130⁸ a g_+ $\longrightarrow$ a nem az f egyenesen lévő g_+
 131⁻¹² a f_+ $\longrightarrow$ az f_+
 131⁻¹³ *új sorok beszúrása* $\longrightarrow (f_+, g_+) \neq (f_+, f_-)$ és $(f_+, h_+) = (f_+, f_-)$, vagy $(f_+, g_+) = (f_+, f_+)$ és $(f_+, h_+) \in \mathcal{P}_f^+$, vagy $(f_+, g_+) \in \mathcal{P}_f^-$ és $(f_+, h_+) = (f_+, f_+)$, vagy
 131⁻⁸ a f_+ $\longrightarrow$ az f_+
 131⁻⁹ *új sorok beszúrása* $\longrightarrow (f_+, g_+) = (f_+, f_-)$ és $(f_+, h_+) \neq (f_+, f_-)$, vagy $(f_+, g_+) \in \mathcal{P}_f^+$ és $(f_+, h_+) = (f_+, f_+)$, vagy $(f_+, g_+) = (f_+, f_+)$ és $(f_+, h_+) \in \mathcal{P}_f^-$, vagy
 143⁻⁹ tétel beláttuk. $\longrightarrow$ tételt beláttuk.
 149^{ábra} hiányzik a Q pont $\longrightarrow$ a Q pontnak az $OP^\perp$ egyenesen kell lennie
 150⁻¹⁰ következménye, a következő $\longrightarrow$ következménye a következő
 151¹ továbbikban $\longrightarrow$ továbbiakban
 153⁻¹⁰ a ℓ_n $\longrightarrow$ az ℓ_n

- 155**⁴ $(k, iN) \longrightarrow (k, i \in N)$
156⁸ a bizonyításban használt $\longrightarrow$ az imént használt
156¹¹ $n\mathbb{N} \longrightarrow n \in \mathbb{N}$
160³ a a $PQ \longrightarrow$ a PQ
161⁻¹⁴ szögmértékekkel $\longrightarrow$ szögmértékek
164⁻¹ $\varphi = \sphericalangle(BFA) \longrightarrow \varphi = \sphericalangle(BA'A)$
169⁻⁹ $\longrightarrow \longrightarrow$
169⁻⁶ átmenő köröket $\longrightarrow$ átmenő minden kört
169⁻⁵ részekre $\longrightarrow$ részre
169⁻⁵ bontja $\longrightarrow$ bont
175¹⁰ transzformáció . $\longrightarrow$ transzformáció.
178¹⁴ $d \neq 0 \longrightarrow D \neq 0$
179¹⁴ Tétel. $\longrightarrow$ *törlendő*: a ψ és a χ betűk
180⁷ a Minkowski-metrikus affin $\longrightarrow$ az affin
181⁶ $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)\mathbf{BA}(\hat{x}_0) + (\hat{x}_0, \hat{y}_0)\mathbf{B}(\hat{y}_0) + d \longrightarrow (\hat{x}_0, \hat{y}_0)\mathbf{A}(\hat{x}_0) + (\hat{x}_0, \hat{y}_0)(\hat{y}_0) + d$
181⁷ $+ (\hat{x}, \hat{y})\left((\mathbf{BA} + \mathbf{AB}^T)(\hat{x}_0) + \mathbf{B}(\hat{y}_0)\right) + \longrightarrow + (\hat{x}, \hat{y})\mathbf{B}\left(2\mathbf{A}(\hat{x}_0) + (\hat{y}_0)\right) +$
181⁸ $\left((\hat{x}_0, \hat{y}_0)\mathbf{BA}(\hat{x}_0) + (\hat{x}_0, \hat{y}_0)\mathbf{B}(\hat{y}_0) + d\right) \longrightarrow \left((\hat{x}_0, \hat{y}_0)\mathbf{A}(\hat{x}_0) + (\hat{x}_0, \hat{y}_0)(\hat{y}_0) + d\right)$
181⁻⁵ egyenlet alkalmas izometrikus $\longrightarrow$ nem azonosan teljesülő egyenlet a
 belső szorzásból eredő euklidészi metrikára nézve izometrikus
182¹ *alternatív: "elemi" bizonyítás* $\longrightarrow$ K.12 tétel bizonyítása
182¹⁰ *teljes bekezdés előre mozgatása* $\longrightarrow$ *legyen a bizonyítás első bekezdése*
188⁷ — egyenletet megkapjuk $\longrightarrow$ *törlés* — megkapjuk
189^{ábra} $K \longrightarrow \mathcal{K}$
196⁷ Parabolánál $\longrightarrow$ Parabola
219¹² másika a $\mathcal{K}_1 \longrightarrow$ másika a $\mathcal{K}_3$
220⁻¹⁰ $d(M_B, M_C) = d(B, M_B) + d(M_B, M_C) - d(C, M_C) = d(B, C) = a, \longrightarrow$
 $d(M_B, N_C) = d(B, M_B) + d(M_B, N_C) - d(C, N_C) = d(B, C) = a,$
222¹⁰ paralelepipedonnak hat csúcsa $\longrightarrow$ paralelepipedonnak nyolc csúcsa
225¹¹ $(+1)^i \longrightarrow (+1)^j$
225⁻⁷ vektorhalmazhoz $\longrightarrow$ vektorhalmaz
225⁻³ $f \dots$ illetve $f \longrightarrow f \dots$ illetve F és ennek megfelelően végig javítani a
 formulákat a **228**⁷ sorig
226¹⁵ $\hat{F}_P \longrightarrow \hat{f}_P$
226⁻¹¹ függvény. ahol $\longrightarrow$ függvény, ahol
227⁻¹⁰ $f' \longrightarrow \bar{f}$ a lap végéig cserélendő
228⁻³ $f' \longrightarrow \bar{f}$ a bizonyítás végéig cserélendő
230²¹ A „lennie kell egy $\mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektornak, melyre ...” állítást a könyv nem
 bizonyítja $\longrightarrow$ K.1. tétel.

- 240²² közt van legkisebb $\rightarrow$ alsó határa pozitív (nem nulla).
 241⁵ rácst $\rightarrow$ rácok
 241⁷ $\dots\}$, csoport $\rightarrow \dots\}$ csoport
 251⁻⁷ *beszűrés* $\rightarrow$ (0) f korlátos valamely intervallumon, vagy *Ekkor a bizonyítás is módosítandó:* a szükséges bizonyítást a K.10. Tétel bizonyítása adja.
 254⁻¹² belsejéneknek $\rightarrow$ belsejének
 255² $|\mathbf{v}|_d \dots |\mathbf{v}|_d \rightarrow |\mathbf{v}| \dots |\mathbf{v}|$
 257⁻⁸ $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle$
 259¹ bázisa, akkor $\rightarrow$ bázisa, valamint
 269⁵ jelenjenek $\rightarrow$ jelennek
 269¹⁰ pontok $\rightarrow$ pont
 272⁻³ $\dim d - 1$ dimenziós $\rightarrow$ $(\dim d - 1)$ -dimenziós
 274⁹ bármely O $\rightarrow$ minden O
 276⁶ $c(\sqrt{\lambda - \mu^2}) \rightarrow f(\sqrt{\lambda - \mu^2})$
 276⁻¹¹ affintér $\rightarrow$ affin tér
 276⁻⁴ geomertián $\rightarrow$ geometrián
 278⁹ A „ha homogén és additív, vagyis ...” definíció *egyszerűbben* $\rightarrow$ „ha lineáris, vagyis ...”.
 278¹² A „minden lineáris funkcionál ilyen” állítást *a könyv nem bizonyítja* $\rightarrow$ K.1. tétel.
 283² az max $\rightarrow$ a max
 283⁶ az max $\rightarrow$ a max
 285⁶ ha $b \propto c$ esetén $\rightarrow$ ha $a \propto b$ és $b \propto c$ esetén
 286⁻⁴ $(\mathcal{H} \setminus \{0\}, \diamond) \rightarrow (\mathcal{H} \setminus \{0\}, \star)$
 286⁻² $(\mathcal{H} \setminus \{0\}, \diamond) \rightarrow (\mathcal{H} \setminus \{0\}, \star)$
 297¹⁸ A P_O és $\mathbf{v}_O$ jelölést *a könyv nem listázza.* $\rightarrow P_O, \mathbf{v}_O$ – a P ponthoz illetve $\mathbf{v}$ szabad vektorhoz az O pontnál tartozó *helyvektor*.
 297⁻¹ Az $\varepsilon_{\mathbf{u}}^t$ jelölést *a könyv nem listázza.* $\rightarrow \varepsilon_{\mathbf{u}}^t$ – az $t\mathbf{u}$ eltolásvektorhoz tartozó *eltolás*, ahol $\mathbf{u}$ egységnyi, $t \geq 0$.
 297⁻¹ A φ_O^α jelölést *a könyv nem listázza.* $\rightarrow \varphi_O^\alpha$ – az O pont körüli α forgásszöghöz tartozó *forgás*.
 300¹⁴ Gondolot $\rightarrow$ Gondolat

Bár ez nem a könyv, hanem a kiadó tévedése, azért legyen itt feljegyezve, hogy a könyv a Polygon Jegyzettár sorozatának nem a 41-edik, ahogy a belső borító mutatja, hanem a 42-edik tagja.

A fentieket magam és segítőkész emberek találták. Köszönöm nekik, hogy nem csak felfedezték, de tudatták is velem e hibákat.

Kiegészítések az Euklidészi geometria könyvhöz

K.1. Tétel. Bármely $\mathcal{V}$ euklidészi vektortéren bármely $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ nem eltűnő lineáris funkcionálhoz létezik pontosan egy olyan $\bar{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$ vektor, melyre $f(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \bar{\mathbf{w}} \rangle$ minden $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ vektorra.

Bizonyítás. Mielőtt belevágunk, jegyezzük meg, hogy a lineáris funkcionált a könyv a 278. oldalán definiálja.

Unicitás. Ha a $\mathbf{w}$ és $\mathbf{w}'$ vektorra $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = f(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}' \rangle$ minden $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ esetén, akkor $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}' - \mathbf{w} \rangle = 0$ minden $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ vektorra, így a $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ vektorra is, amiért $|\mathbf{w}' - \mathbf{w}| = 0$, és így $\mathbf{w}' - \mathbf{w} = 0$.

Egzisztencia. Legyen $\mathcal{V}' = \ker f := \{\mathbf{v} : f(\mathbf{v}) = 0\}$ a funkcionál úgynevezett magja. Ekkor bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}'$ vektorra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számra

$$f(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v}) = 0, \quad \text{és} \quad f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot f(\mathbf{0}) = 0,$$

tehát $\mathcal{V}'$ egy vektortér, vagyis $\mathcal{V}$ altere. Legyen ebben a $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k$ egy ortonormált bázis, ahol $k \in \mathbb{N}$ (ilyen a Gram–Schmidt eljárás szerint van).

Ha az f nem eltűnő, akkor van olyan $\mathbf{w}$ vektor, melyre $f(\mathbf{w}) \neq 0$, és amely eszerint nincs a $\mathcal{V}'$ altérben. Legyen $\mathbf{w}^\perp = \mathbf{w} - \sum_{i=0}^k \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$. Ekkor $\mathbf{w}^\perp$ nyilván nem nulla, nincs a $\mathcal{V}'$ altérben, és minden $0 \leq j \leq k$ esetén

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}^\perp, \mathbf{v}_j \rangle &= \left\langle \mathbf{w} - \sum_{i=0}^k \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle - \sum_{i=0}^k \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle = 0, \end{aligned}$$

hiszen $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j, \end{cases}$. Eszerint $\mathbf{w}^\perp$ ortogonális a $\mathcal{V}'$ altér minden elemére.

Legyen $\bar{\mathbf{w}} = \frac{f(\mathbf{w}^\perp)}{|\mathbf{w}^\perp|^2} \mathbf{w}^\perp$. Ez a vektor is nyilván ortogonális a $\mathcal{V}'$ minden elemére, $f(\bar{\mathbf{w}}) \neq 0$ és

$$\langle \mathbf{w}^\perp, \bar{\mathbf{w}} \rangle = \left\langle \mathbf{w}^\perp, \frac{f(\mathbf{w}^\perp)}{|\mathbf{w}^\perp|^2} \mathbf{w}^\perp \right\rangle = \frac{f(\mathbf{w}^\perp)}{|\mathbf{w}^\perp|^2} \langle \mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp \rangle = f(\mathbf{w}^\perp)$$

Tetszőleges $\mathbf{u} \notin \mathcal{V}'$ vektorra

$$f\left(\frac{1}{f(\mathbf{u})} \mathbf{u} - \frac{1}{f(\mathbf{w}^\perp)} \mathbf{w}^\perp\right) = \frac{1}{f(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}) - \frac{1}{f(\mathbf{w}^\perp)} f(\mathbf{w}^\perp) = 1 - 1 = 0,$$

vagyis $\frac{1}{f(\mathbf{u})}\mathbf{u} - \frac{1}{f(\mathbf{w}^\perp)}\mathbf{w}^\perp \in \mathcal{V}'$, amiért van olyan $\mathbf{v} \in \mathcal{V}'$ vektor, melyre $\mathbf{u} = \frac{f(\mathbf{u})}{f(\mathbf{w}^\perp)}\mathbf{w}^\perp + \mathbf{v}$, amiből

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \bar{\mathbf{w}} \rangle &= \left\langle \frac{f(\mathbf{u})}{f(\mathbf{w}^\perp)}\mathbf{w}^\perp + \mathbf{v}, \bar{\mathbf{w}} \right\rangle = \frac{f(\mathbf{u})}{f(\mathbf{w}^\perp)}\langle \mathbf{w}^\perp, \bar{\mathbf{w}} \rangle + \langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{w}} \rangle = \frac{f(\mathbf{u})}{f(\mathbf{w}^\perp)}f(\mathbf{w}^\perp) + 0 \\ &= f(\mathbf{u})\end{aligned}$$

következik. Mivel ugyanakkor minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}'$ esetén nyilván $\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{w}} \rangle = 0 = f(\mathbf{v})$, $f(\cdot) = \langle \cdot, \bar{\mathbf{w}} \rangle$ következik. ■

A bizonyítás alapján a lineáris funkcionál magjának dimenziója a vektortér dimenziójánál pontosan eggyel kisebb, vagyis $\dim \mathcal{V} = 1 + \dim \mathcal{V}'$.

K.2. Tétel. *Az identikus leképezés az egyetlen fixponttal rendelkező eltolás.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon = \tau_e \tau_f$ egy eltolás, ahol $e \parallel f$.

Ha valamely P pont a ε eltolás fixpontja, akkor a fixpont-tétel értelmében három eset lehetséges: ε az identitás, $\varepsilon = \tau_g$ egy tükrözés, melynek g tengelye átmegy a P ponton, vagy $\varepsilon = \tau_g \tau_h$, ahol $g \cap h = P$. Az első eset éppen az állítást adja, a második eset kizárt, mert két tükrözés szorzata nem lehet egy tükrözés, így elegendő a harmadik esetet vizsgálnunk.

Tegyük most fel, hogy $\varepsilon = \tau_e \tau_f = \tau_g \tau_h$, ahol $e \parallel f$ és $g \cap h = P$. A forgások egyértelmű reprezentálásának tétele értelmében a g tengely helyett választhatjuk a P pontra illeszkedő $g' \parallel e$ egyenest, melyhez $h' \ni P$ az az egyenes, melyre $\varepsilon = \tau_{g'} \tau_{h'}$ és $g' \cap h' = P$. Az eltolások egyértelmű reprezentálásának tétele értelmében az e tengely helyett választhatjuk a g' egyenest, melyhez $f' \parallel e$ az az egyenes, melyre $\varepsilon = \tau_{g'} \tau_{f'}$ és $g' \parallel f'$. Eszerint $\tau_{g'} \tau_{f'} = \tau_e \tau_f = \varepsilon = \tau_g \tau_h = \tau_{g'} \tau_{h'}$, amiért $\tau_{f'} = \tau_{h'}$, amiért $f' = h'$. Azonban $f' \parallel g'$ és $h' \cap g' = P$, így a párhuzamossági axióma miatt $f' = h' = g'$ következik, amiért ε az identitás, ahogy a tétel állítja. ■

A **32**⁻¹⁰ sorban definiált (affin) osztóviszonyról a **48**⁻³ sorban található tétel igazolja, hogy pontosan az (affin) osztóviszonyt tartó leképezések az affinitások. A **78**⁻¹⁵ sorban a Minkowski-metrikára definiált metrikus osztóviszonyról a **78**⁻⁵ sorban található tétel igazolja, hogy pontosan a metrikus osztóviszonyt tartó leképezések az affinitások. A bizonyítás azon alapszik, hogy a metrikus osztóviszonyt tartó leképezések tartják az (affin) osztóviszonyt, mert $|(PRQ)| = d(P, Q)/d(Q, R)$. Felvetődik a kérdés, hogy van-e a Minkowski-metrikáktól eltérő metrika, melyre ugyanezen egyenlőség teljesül.

K.3. Tétel. Egy $\mathfrak{G}$ affin geometrián (affin sík, vagy tér) értelmezett d metrika akkor és csak akkor Mikowski-féle, ha $|(PRQ)| = d(P, Q)/d(Q, R)$ minden kollineáris P, Q, R ponthármasra.

Bizonyítás. Az „akkor” irányt a 78⁻¹² sorában található triviális bizonyítás igazolja. Itt ennek fordítottját igazoljuk.

Legyen $R \neq O$ és $Q = X_O(\lambda, R)$.

Ha $\lambda > 1$, akkor R elválasztja az O és Q pontokat, amiért $(ORQ) < 0$ és

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} = -(ORQ) = \frac{d(O, Q)}{d(Q, R)} = 1 + \frac{d(O, R)}{d(Q, R)},$$

amiért

$$\begin{aligned} d(Q, O) &= d(Q, R) + d(R, O) = \frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda-1} - 1} d(O, R) + d(R, O) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda-1}}{\frac{\lambda}{\lambda-1} - 1} d(O, R) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - (\lambda - 1)} d(O, R) = \lambda d(O, R). \end{aligned}$$

Ha $\lambda < 0$, akkor O elválasztja az R és Q pontokat, amiért $(ORQ) < 0$ és

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} = -(ORQ) = \frac{d(O, Q)}{d(Q, R)} = 1 - \frac{d(O, R)}{d(Q, R)},$$

amiért

$$\begin{aligned} d(Q, O) &= d(Q, R) - d(R, O) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda-1}} d(O, R) - d(R, O) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda-1}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda-1}} d(O, R) \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda - 1) - \lambda} d(O, R) = -\lambda d(O, R). \end{aligned}$$

Ha $0 < \lambda < 1$, akkor Q elválasztja az R és O pontokat, amiért $(ORQ) > 0$ és

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda} = (ORQ) = \frac{d(O, Q)}{d(Q, R)} = \frac{d(O, R)}{d(Q, R)} - 1,$$

amiért

$$\begin{aligned} d(Q, O) &= d(O, R) - d(R, Q) = d(O, R) - \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}} d(O, R) = \frac{\frac{\lambda}{1-\lambda}}{1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}} d(O, R) \\ &= \frac{\lambda}{(1 - \lambda) + \lambda} d(O, R) = \lambda d(O, R). \end{aligned}$$

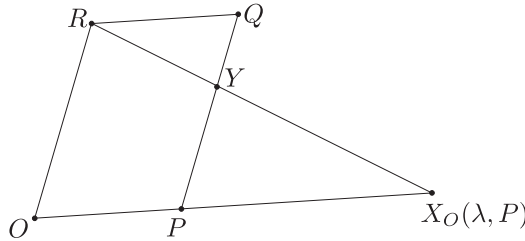
Eszerint minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $d(X_O(\lambda, R), O) = |\lambda|d(O, R)$.

Tekintsünk egy $OPQR$ paralelogrammát, annak OP oldalegyenesén az $X = X_O(\lambda, P)$ pontot, ahol $\lambda > 0$ valós és legyen $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ és $\mathbf{v} = \overrightarrow{OR}$. Ekkor $\mathbf{x} := \overrightarrow{OX} = \lambda\mathbf{u}$, valamint $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{OQ}$.

Legyen Y az a pont, melyre $\mathbf{y} := \overrightarrow{OY} = \mathbf{u} + \frac{\lambda-1}{\lambda}\mathbf{v}$. Ekkor $Y \in \overline{XR} \cap \overline{PQ}$, hiszen

$$\frac{\lambda-1}{\lambda}\overrightarrow{XR} = \frac{\lambda-1}{\lambda}(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{XY},$$

és $\lambda \rightarrow \infty$ esetén $Y \rightarrow Q$.



A párhuzamos szelők tétele szerint $(XYR) = (XPO) = \lambda$, a háromszög-egyenlőtlenségből pedig $|d(O, X) - d(R, X)| \leq d(O, R)$ következik. Eszerint

$$\frac{d(Y, R)}{d(P, O)} = \frac{d(Y, R)\lambda}{d(P, O)\lambda} = \frac{d(Y, R)(XYR)}{d(P, O)(XPO)} = \frac{d(X, R)}{d(X, O)},$$

amiért

$$\begin{aligned} \left| \frac{d(Y, R)}{d(P, O)} - 1 \right| &= \left| \frac{d(X, R)}{d(X, O)} - 1 \right| = \left| \frac{d(X, R) - d(X, O)}{d(X, O)} \right| = \frac{|d(X, R) - d(X, O)|}{d(X, O)} \\ &\leq \frac{d(O, R)}{d(X, O)} = \frac{d(O, R)}{d(P, O)} \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

amit a $\lambda \rightarrow \infty$ határátmenettel alkalmazva

$$d(Q, R) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} d(Y, R) = d(P, O) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{d(Y, R)}{d(P, O)} = d(P, O)$$

adódik. Eszerint a paralelogrammák szemközti oldalai egyforma hosszúak, tehát d egy Minkowski-metrika. ■

Ez a tétel tehát a 74⁴ sorban található indokon túli érdemi magyarázat, hogy miért érdemes a Minkowski-metrikákkal foglalkozni.

A K.3. tétel tovább élesíthető: egy affin geometrián adott metrika akkor és csak akkor Minkowski-féle, ha bármely szakasz affin felezőpontja megegyezik a szakasz metrikus felezőpontjával.

K.4. Tétel. Egy $\mathfrak{G}$ affin geometrián (affin sík, vagy tér) értelmezett d metrika akkor és csak akkor Mikowski-féle, ha $(PRQ) = 1$ esetén $d(P, Q) = d(Q, R)$ minden kollineáris P, Q, R ponthármasra.

Bizonyítás. A „csak akkor” irányú állítás nyilvánvaló.

A fordított, „akkor” irányú állítás bizonyításához tekintsünk két különböző O és P pontot és az

$$f_{O,P}(\lambda) := \frac{d(O, X_O(\lambda, P))}{d(O, P)}$$

függvényt. Világos, hogy $f_{O,P}(0) = 0$ és $f_{O,P}(1) = 1$.

Mivel $(OX_O(2, P)P) = 1$, a feltétel szerint $d(O, P) = d(P, X_O(2, P))$, amiért $f_{O,P}(2) = 2$, és teljes indukcióval a metrika additivitására építve ugyanígy belátható minden természetes $k \in \mathbb{N}$ számra, hogy $f_{O,P}(k) = k$.

Mivel $(X_O(-1, P)PO) = 1$, a feltétel szerint $d(X_O(-1, P), O) = d(O, P)$, amiért $f_{O,P}(-1) = 1$, és így megint teljes indukcióval a metrika additivitásán át minden természetes $k \in \mathbb{N}$ számra adódik, hogy $f_{O,P}(-k) = k$.

Ha $\varrho = m/n$, akkor

$$\begin{aligned} f_{O,P}(\varrho) &= \frac{d(O, X_O(\frac{m}{n}, P))}{d(O, P)} = \frac{d(O, X_O(m, X_O(\frac{1}{n}, P)))}{d(O, X_O(\frac{1}{n}, P))} \frac{d(O, X_O(\frac{1}{n}, P))}{d(O, X_O(n, X_O(\frac{1}{n}, P)))} \\ &= f_{O, X_O(\frac{1}{n}, P)}(m) \frac{1}{f_{O, X_O(\frac{1}{n}, P)}(n)} = \frac{m}{n}, \end{aligned}$$

amiből $f_{O,P}$ szigorú monotonitása alapján, az additív függvényekre a Függelékben bizonyított homogenitási tétel felhasználásával $f_{O,P}(\lambda) = |\lambda|$ következik.

Ha most P, Q és R kollineáris pontok, akkor pontosan egy $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $P = X_Q(\lambda, R)$, és így

$$\frac{d(P, Q)}{d(Q, R)} = \frac{d(Q, X_Q(\lambda, R))}{d(Q, R)} = f_{Q,R}(\lambda) = |\lambda| = |(X_Q(\lambda, R)RQ)| = |(PRQ)|.$$

Ebből a K.3. tétel alapján következik a tétel állítása. ■

Az Euklidészi-metrika definíciója a $\mathbf{82}^{-9}$ sorban a Minkowski-metrikák közül választja ki a megfelelőt, azonban erre a megszorításra nincsen igazán szükség. Ha ugyanis a metrika euklidészi, és F az $\overline{AB}$ szakasz affin felezőpontja, akkor $AFBF$ egy paralelogramma, amiért a paralelogramma-azonosság szerint $d^2(A, F) + d^2(F, B) + d^2(B, F) + d^2(F, A) = d^2(F, F) + d^2(A, B)$, amiből $d(A, F) + d(F, B) = d(A, B)$ miatt $(d(A, F) - d(F, B))^2 = 0$, vagyis $d(A, F) = d(F, B)$ adódik. Ez

azt jelenti, hogy az affin felezőpont egybeesik a metrikus felezőponttal, amiből a K.4. tétel szerint következik, hogy a metrika Minkowski-típusú. Erre az eredményre jutunk akkor is, ha csak a nem elfajuló paralelogrammákra tételezzük fel a paralelogramma-azonosságot.

K.5. Tétel. *Ha egy affin geometrián adott Darboux-metrikában minden nem elfajuló paralelogrammára érvényes, hogy oldalai hosszainak négyzetösszege megegyezik átlói hosszainak négyzetösszegével, akkor az euklidészi metrika.*

Bizonyítás. Tekintve az euklidészi metrika definícióját, elegendő bebizonyítanunk, hogy az ilyen metrika Minkowski-féle. A K.4. tétel szerint ehhez elegendő belátni, hogy minden paralelogrammában az átlók metszéspontja a szemközti csúcsoktól azonos távolságra van.

Vegyünk egy tetszőleges, nem elfajuló $ABCD$ paralelogrammát, melynek átlói az O pontban metszik egymást. Az AC egyenesen vegyünk az $X_O(\lambda, A)$ és $X_O(\lambda, C)$ pontokat, ahol $0 < \lambda < 1$. Világos, hogy az $X_O(\lambda, A)BX_O(\lambda, C)D$ négyszög is paralelogramma minden λ esetén.

Ha $\lambda \searrow 0$, akkor $X_O(\lambda, A) \searrow O$, amiért $d(X_O(\lambda, A), O) \searrow 0$, hiszen $d(X_O(\lambda, A), O)$ a λ szigorúan monoton nem negatív függvénye, így $c = \lim_{\lambda \searrow 0} d(X_O(\lambda, A), O)$ biztosan létezik, ugyanakkor nem lehet pozitív, mert akkor a $c/2$ értékhez nem létezne olyan P pont a nyílt $\overline{OA}$ szakaszon melyre $d(O, P) = c$, holott $c/2 \in (0, d(O, A))$, és ez ellentmondana a Darboux-tulajdonságnak.

A 69-edik oldal definíció előtti folytonossági megjegyzés értelmében ez azt is jelenti, hogy $d(B, X_O(\lambda, A)) \rightarrow d(B, O)$, $d(B, X_O(\lambda, C)) \rightarrow d(B, O)$, $d(D, X_O(\lambda, A)) \rightarrow d(D, O)$ és $d(D, X_O(\lambda, C)) \rightarrow d(D, O)$, így a

$$\begin{aligned} d^2(B, X_O(\lambda, A)) + d^2(B, X_O(\lambda, C)) + d^2(D, X_O(\lambda, A)) + d^2(D, X_O(\lambda, C)) \\ = d^2(B, D) + d^2(X_O(\lambda, A), X_O(\lambda, C)) \end{aligned}$$

paralelogramma-azonosság a $\lambda \rightarrow 0$ határátmenettel az

$$2d^2(B, O) + 2d^2(D, O) = d^2(B, D) + d^2(O, O) = d^2(B, D)$$

egyenletre vezet. Viszont a metrika additivitása miatt $d(B, D) = d(B, O) + d(O, D)$, így $d(B, O) = d(O, D)$ következik, ami az előbbiek miatt bizonyítja a tételt. ■

A K.4. tétel által a Minkowski-metrikára adotthoz hasonlóan „szűk” definíciót az euklidészi geometria izometriái számára is lehet adni.

K.6. Tétel. *Az euklidészi geometria (sík, tér vagy magasabb dimenziós) egy önmagába való leképezése akkor és csak akkor izometria, ha az egységnyi távolságra lévő pontpárokat egységnyi távolságra lévő pontpárokká képezi.*

Bizonyítás. A „csak akkor” irányú állítás nyilvánvaló.

A fordított, „akkor” irányú állítás bizonyítása megtalálható a következő cikkben: F. S. Beckham és D. A. Quarles: On isometries of Euclidean spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 810–815. ■

Jegyezzük meg, hogy az állítás nem igaz az euklidészi egyenesen, ahogy azt az $f: \mathbb{R} \ni x \rightarrow x + 1 - \text{sign}(x - [x]) \in \mathbb{R}$ bijektív leképezés mutatja.

Az euklidészi és a Minkowski-metrikák sem csak a paralelogrammán való viselkedésükkel definiálhatók. A 3.3 szakasz igazolja, hogy egy tükrözésre invariáns metrika éppen euklidészi, és azt is könnyű látni, hiszen bármely paralelogramma bármely oldalát eltolással a szemben lévő oldalába lehet vinni, hogy az eltolás invariáns metrikák éppen a Minkowski-metrikák.

K.7. Tétel. *Ha minden egyenes tartalmaz pontot és I_0 , I_2 és I_3 érvényes, akkor a könyvbéli I_1 következik.*

Bizonyítás. Az I_2 miatt a $P \neq R$ pontokra pontosan egy rájuk egyszerre illeszkedő egyenes van, melynek jelölése ezentúl PR .

Legyen p olyan egyenes, amin csak egy pont – mondjuk a P – van.

Az I_3 miatt tetszőleges $Q \neq P$ pontra pontosan egy olyan e_Q egyenes illeszkedik, amely nem metszi a $p = \{P\}$ egyenest, vagyis nem tartalmazza a P pontot.

Az I_0 miatt minden pont nem eshet a PQ egyenesre. Legyen $R \notin PQ$.

Az I_3 miatt a PR egyeneshez pontosan egy olyan f egyenes létezik a Q ponton át, mely nem metszi a PR egyenest. Mivel ekkor $P \notin f$, ebből $f = e_Q$ következik.

Utóbbi két bekezdés alapján a PQ egyenesen kívüli minden R pont olyan, hogy nem esik az e_Q egyenesre sem, ami azt jelenti, hogy $e_Q \subseteq PQ$. Ha e_Q két különböző pontot is tartalmazna, akkor I_2 miatt ebből $e_Q = PQ$ adódna, holott $P \notin e_Q$, tehát e_Q egyetlen pontja maga a Q pont.

Mivel mindez tetszőleges $Q \neq P$ pontra igaz, minden pontból alkotott egyelemű halmaz egyenes.

Az I_3 miatt tehát tetszőleges két különböző P és Q pont esetén a $\{P\}$ és $\{Q\}$ egyenesek az egyedüliek, amelyek elkerülik a másikat, vagyis minden $R \notin PQ$ esetén $P \in QR$ és $Q \in PR$. Csakhogy I_2 miatt utóbbiak jelentése $PQ = QR = PR$, tehát

minden pont a PQ egyenesen van. Ez ellentmond az I_0 axiómának, ami bizonyítja a tételt. ■

K.8. Tétel. *A valós affin síknak pontosan a $(x, y) \mapsto (x_0, y_0) + (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alakú leképezései koordinátatranszformációk, ahol $x_0, y_0, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ és $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.*

Bizonyítás. A koordinátatranszformációk ilyen alakúak, ezt a könyv bizonyítja a 44. oldalon.

Legyen most $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olyan, hogy $\phi(x, y) = (x_0, y_0) + (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, ahol $x_0, y_0, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ és $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Tekintsünk egy $\varphi = \chi_B \circ \xi_O: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ koordinátázást, ahol $\mathcal{B} = \{P_O, Q_O\}$ egy bázis a megfelelő helyvektorsíkban.

Tekintsük a $\varphi' = \phi \circ \varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezést. Legyen $O' = \varphi^{-1}(\phi^{-1}((0, 0)))$, $P' = \varphi^{-1}(\phi^{-1}((1, 0)))$, $Q' = \varphi^{-1}(\phi^{-1}((0, 1)))$ és $\mathcal{B}' = \{P_{O'}, Q_{O'}\}$.

Mivel ϕ és φ is egyenestartó és bijektív, O' , P' és Q' nem kollineárisak, tehát $\mathcal{B}'$ egy bázis. Emiatt a $\chi_{\mathcal{B}'} \circ \xi_{O'}$ leképezés egy koordinátázás, ugyanakkor $\chi_{\mathcal{B}'} \circ \xi_{O'}(O') = (0, 0) = \varphi'(O')$, $\chi_{\mathcal{B}'} \circ \xi_{O'}(P') = (1, 0) = \varphi'(P')$ és $\chi_{\mathcal{B}'} \circ \xi_{O'}(Q') = (0, 1) = \varphi'(Q')$, amiért $\varphi' = \chi_{\mathcal{B}'} \circ \xi_{O'}$, ami bizonyítja a tételt. ■

Minkowski-metrikus affin geometriában minden φ affinitás minden egyenesen meghatároz egy λ_e konstans, mely minden különböző $P, Q \in e$ pontra $\frac{d(\varphi(P), \varphi(Q))}{d(P, Q)}$. Mivel ekkor

$$\lambda_e = \frac{d(\varphi(P), \varphi(Q))}{d(P, Q)} = \frac{|\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}|}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{|\hat{\varphi}(\overrightarrow{PQ})|}{|\overrightarrow{PQ}|} = \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}\right) \right|,$$

valójában ez egy az indikátor határáról a valós pozitív számokba való $\tilde{\varphi}: \partial\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$ leképezés, melyre $\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) = |\hat{\varphi}(\mathbf{u})|$. Azonnal látszik, hogy minden ε eltolás és φ affinitás esetén $\tilde{\varphi} = \varepsilon \circ \varphi$.

K.9. Lemma. *Minkowski-metrikus affin geometriában minden φ affinitásra a $\tilde{\varphi}: \partial\mathcal{I} \rightarrow \partial\mathcal{I}$ leképezés, melyre $\check{\varphi}(\mathbf{u}) = \hat{\varphi}(\mathbf{u})/\tilde{\varphi}(\mathbf{u})$, bijektív és $\varphi^{-1}(\check{\varphi}(\mathbf{u}))\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) = 1$.*

Bizonyítás. *Injektivitás.* Ha $\check{\varphi}(\mathbf{u}_1) = \check{\varphi}(\mathbf{u}_2)$, akkor $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1)\tilde{\varphi}(\mathbf{u}_2) = \tilde{\varphi}(\mathbf{u}_1)\hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$, amiért $\hat{\varphi}(\tilde{\varphi}(\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 - \tilde{\varphi}(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_2) = 0$, amiből $\hat{\varphi}$ bijektivitása miatt $\tilde{\varphi}(\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 = \tilde{\varphi}(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_2$ következik. Mivel $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ az indikátor határán vannak, annak szigorú konvexitása és $\tilde{\varphi}$ pozitivitása miatt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ adódik.

Szűrjektivitás. Legyen $\mathbf{v} \in \partial\mathcal{I}$ tetszőleges, $\nu = |\hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{v})|$, és legyen $\mathbf{u} \in \partial\mathcal{I}$ olyan, hogy $\nu\mathbf{u} = \hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{v})$. Ekkor

$$\check{\varphi}(\mathbf{u}) = \frac{\hat{\varphi}(\hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{v})/\nu)}{\tilde{\varphi}(\hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{v})/\nu)} = \frac{\mathbf{v}}{\nu|\hat{\varphi}(\hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{v})/\nu)|} = \mathbf{v}.$$

Végül a formula igazolása:

$$\begin{aligned} 1 &= \widehat{\varphi^{-1}} \circ \varphi(\mathbf{u}) = |\widehat{\varphi^{-1}} \circ \varphi(\mathbf{u})| = |\widehat{\varphi^{-1}} \circ \hat{\varphi}(\mathbf{u})| = |\widehat{\varphi^{-1}}(\check{\varphi}(\mathbf{u}))|\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) \\ &= \widehat{\varphi^{-1}}(\check{\varphi}(\mathbf{u}))\tilde{\varphi}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

■

K.9. Tétel. *Minkowski-metrikus affin geometriában a φ_1 és φ_2 affinitásokra $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ izometria.*

Bizonyítás. $(\Leftarrow)$ Ha $\iota = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ izometria, akkor minden $\mathbf{u} \in \partial\mathcal{I}$ vektorra

$$\tilde{\varphi}_2(\mathbf{u}) = |\hat{\varphi}_2(\mathbf{u})| = |\hat{\iota} \circ \hat{\varphi}_2(\mathbf{u})| = |\hat{\varphi}_1(\mathbf{u})| = \tilde{\varphi}_1(\mathbf{u}),$$

ahogy a tétel állítja.

$(\Rightarrow)$ Ha $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ és $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, akkor minden $\mathbf{u} \in \partial\mathcal{I}$ vektorra

$$|\hat{\varphi}_2(\mathbf{u})| = \tilde{\varphi}_2(\mathbf{u}) = \tilde{\varphi}_1(\mathbf{u}) = |\hat{\varphi}_1(\mathbf{u})| = |\hat{\psi}(\hat{\varphi}_2(\mathbf{u}))|,$$

vagyis $1 = |\hat{\psi}(\check{\varphi}_2(\mathbf{u}))|$. Minthogy $\check{\varphi}_2$ bijektív az indikátor $\partial\mathcal{I}$ határán, ez azt jelenti, hogy $\hat{\psi}$ tartja a normát, ami igazolja, hogy ψ izometria. ■

K.10. Tétel. *Ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény additív és alulról vagy felülről korlátos valamely intervallumon, akkor f homogén is.*

Bizonyítás. Mivel $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, nyilván $f(0) = 0$. Minden x valós számra $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, tehát $f(-x) = -f(x)$ is teljesül.

Ha m tetszőleges pozitív egész szám, akkor

$$f(mx) = f(\underbrace{x + \dots + x}_m) = \underbrace{f(x) + \dots + f(x)}_m = mf(x),$$

és hasonló módon

$$f(x) = f\left(\frac{mx}{m}\right) = f\left(\underbrace{\frac{x}{m} + \dots + \frac{x}{m}}_m\right) = mf\left(\frac{x}{m}\right)$$

is fennáll, ezért minden m/n ($m > 0$) racionális számra

$$f\left(\frac{mx}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}}_m\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x).$$

Ezzel az $f(rx) = rf(x)$ azonosságot minden racionális r értékre bebizonyítottuk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ számra.

Legyen $\hat{f}(x) := f(x) - xf(1)$.

Ekkor tetszőleges $r \in \mathbb{Q}$ racionális és $x \in \mathbb{R}$ valós számra

$$\begin{aligned}\hat{f}(x+r) &= f(x+r) - (x+r)f(1) = (f(x) - xf(1)) + (f(r) - rf(1)) \\ &= f(x) - xf(1) = \hat{f}(x),\end{aligned}$$

vagyis az $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek minden racionális szám a periódusa.

Tételezzük fel, hogy valamely $[a, b]$ intervallumon f felülről korlátos, vagyis kisebb mint valamely $c \in \mathbb{R}$ szám.

Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén van olyan r racionális szám, melyre $x+r \in [a, b]$, amiért $\hat{f}(x+r) = \hat{f}(x) < c$, vagyis c az f felső korlátja a teljes számegyenesen.

Csakhogt tetszőleges $r \in \mathbb{Q}$ racionális és $x \in \mathbb{R}$ valós számokra

$$r\hat{f}(x) = r(f(x) - xf(1)) = f(rx) - rxf(1) = \hat{f}(rx) < c,$$

amiből következik, hogy $\hat{f}(x) = 0$.

Ha f valamely $[a, b]$ intervallumon nagyobb mint valamely $c \in \mathbb{R}$ szám, akkor ugyanígy kapjuk, hogy $\hat{f}(x) = 0$.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

A tétel bizonyításának első lépése bizonyos értelemben meg is fordítható.

K.11. Tétel. *A nem nulla $x, y \in \mathbb{R}$ számokhoz akkor és csak akkor létezik olyan additív f függvény, melyre $yf(x) \neq xf(y)$, ha x/y irracionális.*

Bizonyítás. Ha $x/y = r$ racionális szám, akkor előbbi bizonyításunk szerint $xf(y) = ryf(y) = yf(ry) = yf(x)$.

Legyen most $x/y = i$ egy irracionális szám. A valós számok $\mathbb{R}$ teste nyilván vektorteret alkot a racionális számok $\mathbb{Q}$ teste felett, amely vektortér bázisait *Hamel-bázisnak* nevezzük. Mivel ezen vektortérben két vektor (valós szám) pontosan akkor alkot függő rendszert, ha egyikük a másiknak racionális többszöröse, az x és y számok e vektortér független elemei. Tekintve, hogy független vektorokból álló

bármely halmazt újabb független elemek hozzáválasztásával bázissá lehet bővíteni, van olyan Hamel-bázis, amelynek x és y egy-egy eleme. Legyen $\{x, y\}_{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{R} : \exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, \text{ melyre } z = r_1x + r_2y\}$ a valós számok $\mathbb{Q}$ feletti vektorterének az x, y elemek által feszített altere, $\{x, y\}_{\mathbb{Q}}^c$ pedig ennek kiegészítő altere. Ekkor az

$$f(z) = r_1a + r_2b, \quad \text{ha } z = r_1x + r_2y \in \{x, y\}_{\mathbb{Q}}^c \text{ és } r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$$

függvény tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számokra jól definiált, hiszen ha $z = r_1x + r_2y \in \{x, y\}_{\mathbb{Q}}^c$ és $z = r_{-1}x + r_{-2}y \in \{x, y\}_{\mathbb{Q}}^c$ valamely $r_1, r_2, r_{-1}, r_{-2} \in \mathbb{Q}$ racionális számokra, akkor $-r_1x - r_2y + r_{-1}x + r_{-2}y \in \{x, y\}_{\mathbb{Q}}^c$ következik, és így $r_1 = r_{-1}$ valamint $r_2 = r_{-2}$.

Tetszőleges $z_+, z_- \in \mathbb{R}$ számokra

$$\begin{aligned} f(z_+) + f(z_-) &= (r_1 + r_{-1})a + (r_2 + r_{-2})b, \\ &\text{ahol } z_+ = r_1x + r_2y \in \{x, y\}_{\mathbb{Q}}^c \text{ és } z_- = r_{-1}x + r_{-2}y \in \{x, y\}_{\mathbb{Q}}^c, \\ &= f(z_+ + z_-), \\ &\text{hiszen } z_+ + z_- = r_1x + r_2y + r_{-1}x + r_{-2}y \in \{x, y\}_{\mathbb{Q}}^c, \end{aligned}$$

vagyis az f függvény additív. Ugyanakkor $f(x) = a$ és $f(y) = b$ különbözik, ha az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat különbözőnek választjuk.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

K.12. Tétel. (Főtengely transzformáció). *Bármely másodrendű $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + bx + cy + d = 0$ ($a_{11}, a_{12}, a_{22}, b, c, d \in \mathbb{R}$) nem azonosan teljesülő egyenlet a belső szorzásból eredő euklidészi metrikára nézve izometrikus koordináta-transzformációval az*

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{z^2}{a^2} + \frac{t^2}{b^2} &= \begin{cases} 1, & \text{(a)} \\ -1, & \text{(b)} \\ 0, & \text{(c)} \end{cases} & (2) \quad \frac{z^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} &= \begin{cases} 1, & \text{(a)} \\ 0, & \text{(b)} \end{cases} & (3) \quad t^2 &= \begin{cases} 2pz, & \text{(a)} \\ -1, & \text{(b)} \\ 0, & \text{(c)} \\ 1, & \text{(d)} \end{cases} \\ (4) \quad 1 &= \begin{cases} z, & \text{(a)} \\ 0, & \text{(b)} \end{cases} \end{aligned}$$

formák pontosan egyikévé alakítható, ahol $a, b, p \in \mathbb{R}$ pozitív számok.

Bizonyítás. Ha $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, akkor

$$0 = f(x, y) = bx + cy + d \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1, & \text{ha } b = c = 0 \text{ és } d \neq 0, \\ 1 = z, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $z = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}x + \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}y + \frac{d}{\sqrt{b^2+c^2}} + 1$ és $t = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}x - \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}y$, ami mutatja, hogy a nyilván izometrikus

$$(x, y) \mapsto (z, t) = (x, y) \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & -\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} \end{pmatrix} + \left(\frac{d}{\sqrt{b^2+c^2}} + 1, 0 \right)$$

koordináta-transzformáció (4) alakúvá formálja az egyenlet.

Innentől feltételezzük, hogy $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$.

Ha $a_{12} = 0$, akkor

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + bx + cy + d = \begin{cases} a_{11}(x + \frac{b}{2})^2 + \frac{4d-b^2}{4}, & \text{ha } a_{11} \neq 0 = a_{22} \text{ és } c = 0, \\ a_{11}(x + \frac{b}{2})^2 + c(y + \frac{4d-b^2}{4c}), & \text{ha } a_{11} \neq 0 = a_{22} \text{ és } c \neq 0, \\ a_{22}(y + \frac{c}{2})^2 + \frac{d-c^2}{4}, & \text{ha } a_{11} = 0 \neq a_{22} \text{ és } b = 0, \\ a_{22}(y + \frac{c}{2})^2 + b(x + \frac{d-c^2}{4b}), & \text{ha } a_{11} = 0 \neq a_{22} \text{ és } b \neq 0, \\ a_{11}(x + \frac{b}{2})^2 + a_{22}(y + \frac{c}{2})^2 + \frac{4d-b^2-c^2}{4}, & \text{ha } a_{11} \neq 0 \neq a_{22}, \end{cases}$$

ami mutatja, hogy a nyilván izometrikus

$$(x, y) \mapsto (z, t) = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{cases} (\frac{b}{2}, 0), & \text{ha } a_{11} \neq 0 = a_{22} \text{ és } c = 0, \\ (\frac{b}{2}, \frac{4d-b^2}{4c}), & \text{ha } a_{11} \neq 0 = a_{22} \text{ és } c \neq 0, \\ (0, \frac{c}{2}), & \text{ha } a_{11} = 0 \neq a_{22} \text{ és } b = 0, \\ (\frac{d-c^2}{4b}, \frac{c}{2}), & \text{ha } a_{11} = 0 \neq a_{22} \text{ és } b \neq 0, \\ (\frac{b}{2}, \frac{c}{2}), & \text{ha } a_{11} \neq 0 \neq a_{22}, \end{cases}$$

koordináta-transzformációk (3), illetve az utolsó esetben (1) illetve (2) alakúvá formálják az egyenlet attól függően, hogy a nem nulla a_{11} és a_{22} előjele megegyezik vagy se.

Ha $a_{12} \neq 0$, akkor tekintsük a

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{22} + a_{11})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

egyenletnek a másodrendű egyenletek megoldóképletével adódó

$$\lambda_{\pm} = \frac{a_{22} + a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

megoldásait, és legyen $\delta = \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}$, valamint $\xi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_{\pm} - a_{11})^2}}$.

Ekkor

$$\begin{aligned} (\lambda_+ - a_{11})(\lambda_- - a_{11}) &= \lambda_+ \lambda_- - (\lambda_+ + \lambda_-)a_{11} + a_{11}^2 \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - (a_{22} + a_{11})a_{11} + a_{11}^2 = -a_{12}^2, \\ \frac{1}{\xi_{\pm}^2} &= a_{12}^2 + (\lambda_{\pm} - a_{11})^2 = \frac{\delta^2 \pm (a_{22} - a_{11})\delta}{2} = \pm(\lambda_{\pm} - a_{11})\delta, \\ \delta a_{12}^2 \xi_{\pm}^2 &= \frac{\delta a_{12}^2}{\pm(\lambda_{\pm} - a_{11})\delta} = \frac{-(\lambda_+ - a_{11})(\lambda_- - a_{11})}{\pm(\lambda_{\pm} - a_{11})(\lambda_{\mp} - a_{11})} = \mp(\lambda_{\mp} - a_{11}), \end{aligned}$$

és így

$$\begin{aligned} &\lambda_-(x(\lambda_+ - a_{11})\xi_+ - ya_{12}\xi_+)^2 + \lambda_+(x(\lambda_- - a_{11})\xi_- - ya_{12}\xi_-)^2 \\ &= ((\lambda_+ - a_{11})x - a_{12}y)^2 \xi_+^2 \lambda_- + ((\lambda_- - a_{11})x - a_{12}y)^2 \xi_-^2 \lambda_+ \\ &= ((\lambda_+ - a_{11})^2 \xi_+^2 \lambda_- + (\lambda_- - a_{11})^2 \xi_-^2 \lambda_+)x^2 - \\ &\quad - 2((\lambda_+ - a_{11})\xi_+^2 \lambda_- + (\lambda_- - a_{11})\xi_-^2 \lambda_+)a_{12}xy + \\ &\quad + (\xi_+^2 \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_+)a_{12}^2 y^2 \\ &= ((\lambda_+ - a_{11})\lambda_- - (\lambda_- - a_{11})\lambda_+)\frac{x^2}{\delta} - 2(a_{12}\lambda_- - a_{12}\lambda_+)\frac{xy}{\delta} + \\ &\quad + (-(\lambda_- - a_{11})\lambda_- + (\lambda_+ - a_{11})\lambda_+)\frac{y^2}{\delta} \\ &= (a_{11}\lambda_+ - a_{11}\lambda_-)\frac{x^2}{\delta} + 2a_{12}xy + \\ &\quad + (-(a_{22}\lambda_- + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)) + (a_{22}\lambda_+ + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)))\frac{y^2}{\delta} \\ &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az $0 = f(x, y)$ egyenletet az (x, y) vektortól nem függő alkalmas $(e, f) \in \mathbb{R}^2$ vektor esetén a

$$\varphi: (x, y) \mapsto (z, t) = (x, y) \begin{pmatrix} (\lambda_+ - a_{11})\xi_+ & (\lambda_- - a_{11})\xi_- \\ -a_{12}\xi_+ & -a_{12}\xi_- \end{pmatrix} + (e, f)$$

koordináta-transzformáció (1) illetve (2) alakúvá formálja, attól függően, hogy a $\lambda_{\pm} \neq 0$ megoldások előjele megegyezik vagy se, továbbá (3) alakúvá teszi azt, amennyiben $\lambda_{\pm}$ valamelyike $0^{(*)}$. Jegyezzük, hogy jelen esetben a λ_+ és λ_- számok nem eshetnek egybe⁽⁺⁾, mert akkor $\delta = 0$, amiből $a_{12} = 0$ következne.

(*) Ez pontosan $a_{12} \neq 0$ és $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ esetben áll elő.

(+) Ez egyben azt is bizonyítja, hogy a $0 = f(x, y)$ egyenlet akkor és csak akkor ír le — esetleg üres — kört, ha $a_{12} = 0$ és $a_{11} = a_{22} \neq 0$.

A tétel teljes bizonyításához már csak annyit kell belátni, hogy a $\hat{\varphi} = \varphi - (e, f)$ affinitás izometria^(#). Legyen

$$\mathbf{u}_+ = \hat{\varphi}(1, 0) = ((\lambda_+ - a_{11})\xi_+, (\lambda_- - a_{11})\xi_-) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\xi_+}, -\frac{1}{\xi_-} \right),$$

$$\mathbf{u}_- = \hat{\varphi}(0, 1) = -a_{12}(\xi_+, \xi_-).$$

Azonnal adódik, hogy $\langle \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_- \rangle = 0$, vagyis ezen vektorok ortogonálisak egymásra, ugyanakkor

$$\langle \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_+ \rangle = \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{1}{\xi_+^2} + \frac{1}{\xi_-^2} \right) = \frac{1}{\delta} ((\lambda_+ - a_{11}) - (\lambda_- - a_{11})) = 1$$

$$\langle \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_- \rangle = -a_{12}^2(\xi_+^2 + \xi_-^2) = \frac{-1}{\delta} (-(\lambda_- - a_{11}) + (\lambda_+ - a_{11})) = 1,$$

vagyis $\{\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-\}$ ortonormált bázis, ami igazolja, hogy φ egy izometria, és ezzel a tételt beláttuk. ■

A könyv 85. oldalának alján található tétel szerint a $\hat{\varphi}$ mátrixa $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ alakú, amiért az átalakításhoz szükséges forgatás α szögére

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{12}}{\lambda_+ - a_{11}} = \frac{\lambda_- - a_{11}}{-a_{12}} = \frac{a_{22} - a_{11} - \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{-2a_{12}}.$$

K.13. Tétel. Ha $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, akkor minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\overrightarrow{PX_P(\lambda, Q)} = \overrightarrow{RX_R(\lambda, S)}$.

Bizonyítás. Defináljuk az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt azzal, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $S^{f(\lambda)} := X_R(f(\lambda), S)$ az a pont, melyre az $X_P(\lambda, Q)S^{f(\lambda)}$ egyenes párhuzamos a PR egyenessel.

Ez az f függvény szigorúan monoton, hiszen két párhuzamos egyenes bármelyike a másiknak egyetlen félsíkjaiban van.

Ha λ racionális, akkor $\overrightarrow{PX_P(\lambda, Q)} = \lambda \overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RX_R(\lambda, S)}$, amiért az f függvény a racionális számokon identikus, vagyis $f(m/n) = m/n$ minden $m, n \in \mathbb{Z}$ és $n > 0$ esetén. A monotonitás miatt ebből

$$\lambda = \limsup \{r : \mathbb{Q} \ni r < \lambda\} = \limsup \{f(r) : \mathbb{Q} \ni r < \lambda\}$$

$$\leq f(\lambda) \leq \limsup \{f(s) : \lambda < s \in \mathbb{Q}\} = \limsup \{s : \lambda < s \in \mathbb{Q}\} = \lambda$$

következik, vagyis f az identikus leképezés.

Eszerint a PR egyenessel párhuzamos $X_P(\lambda, Q)S^{f(\lambda)}$ egyenes valójában az $X_P(\lambda, Q)X_R(\lambda, S)$ egyenes, ami igazolja az állítást. ■

^(#) Spórolható pár sor, ha a $\hat{\varphi}$ mátrixának oszlopvektorait vizsgáljuk, hiszen ezekről fentebbi formuláink azonnal mutatják, hogy ortonormált rendszert alkotnak.

K.14. Tétel. Tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számok és $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ szabad vektor esetén

$$(1) (\lambda\mu)\mathbf{f} = \lambda(\mu\mathbf{f}), \text{ és}$$

$$(1) (\lambda + \mu)\mathbf{f} = \lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{f}.$$

Bizonyítás. (1) Definiáljuk az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt most úgy, hogy $f(\lambda, \mu)\mathbf{f} = \lambda(\mu\mathbf{f})$ minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor $\mathbf{f} = \overrightarrow{PQ}$ esetén $PX_P(f(\lambda, \mu), Q) = \overrightarrow{PX_P(\lambda, X_P(\mu, Q))}$, amiből $X_P(f(\lambda, \mu), Q) = X_P(\lambda, X_P(\mu, Q))$ következik. Az X_P szigorú monotonitása miatt ebből az f függvény szigorú monotonitása adódik mindkét változóban. Tudjuk továbbá, hogy racionális λ és μ esetében $f(\lambda, \mu) = \lambda\mu$, így

$$\begin{aligned} \lambda\mu &= \limsup\{f(r, s) : \mathbb{Q} \ni r < \lambda, \mathbb{Q} \ni s < \mu\} \\ &\leq f(\lambda, \mu) \leq \limsup\{f(r, s) : \lambda < r \in \mathbb{Q}, \mu < s \in \mathbb{Q}\} = \lambda\mu \end{aligned}$$

következik, vagyis $f(\lambda, \mu) = \lambda\mu$, ami az állítás volt.

(2) Definiáljuk az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $f(\lambda, \mu)\mathbf{f} = \lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{f}$ minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen $\mathbf{f} = \overrightarrow{PQ}$ és $R \notin PQ$. Végül legyen S az a pont, melyre $\mathbf{f} = \overrightarrow{RS}$, továbbá minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számra $Q^\lambda = X_P(\lambda, Q)$ és $S^\mu = X_R(\mu, S)$.

Ekkor $\overrightarrow{PQ^{f(\lambda, \mu)}} = f(\lambda, \mu)\mathbf{f} = \lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{f} = \overrightarrow{PQ^\lambda} + \overrightarrow{RS^\mu}$, ami ekvivalens az RQ^λ és $S^\mu Q^{f(\lambda, \mu)}$ egyenesek párhuzamosságával. Eszerint az $S^\mu Q^{f(\lambda, \mu)}$ egyenesek minden μ esetén párhuzamosak egymással, amiért az f függvény szigorúan monoton a második változójában, hiszen két párhuzamos egyenes bármelyike a másiknak egyetlen félsíkjában van. Ugyanakkor a szabad vektorok összeadásának kommutativitása miatt $f(\lambda, \mu) = f(\mu, \lambda)$, így az f függvény szigorú monotonitása mindkét változóra teljesül.

Tudjuk, hogy racionális λ és μ esetében $f(\lambda, \mu) = \lambda + \mu$, amiből

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= \limsup\{f(r, s) : \mathbb{Q} \ni r < \lambda, \mathbb{Q} \ni s < \mu\} \\ &\leq f(\lambda, \mu) \leq \limsup\{f(r, s) : \lambda < r \in \mathbb{Q}, \mu < s \in \mathbb{Q}\} = \lambda + \mu, \end{aligned}$$

vagyis $f(\lambda, \mu) = \lambda + \mu$ következik, ahogy az állítás szól. ■

K.15. Tétel. (Párhuzamos szelők). A nem kollineáris O, P, Q pontokra és minden $\lambda, \mu \neq 0$ valós számra legyen $P^\lambda = X_O(\lambda, P)$ és $Q^\mu = X_O(\mu, Q)$. Ekkor $PQ \parallel P^\lambda Q^\mu$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = \mu$.

Bizonyítás. Defináljuk az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $P^\lambda Q^{f(\lambda)} \parallel PQ$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra. Ekkor persze $f(1) = 1$, másrészt

$$\overrightarrow{P^\kappa P^{\kappa+\lambda}} = \overrightarrow{OP^{\kappa+\lambda}} - \overrightarrow{OP^\kappa} = (\kappa + \lambda)\overrightarrow{OP} - \kappa\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP^\lambda}$$

hiszen a valós számok összeadása felcserélhető a szabad vektorok velük való szorzásával. Eszerint $(P^\kappa, P^{\kappa+\lambda}) \stackrel{P}{\sim} (O, P^\lambda)$, így a kötött vektorokra érvényes párhuzamos szelők tétele értelmében $(Q^{f(\kappa)}, Q^{f(\kappa+\lambda)}) \stackrel{P}{\sim} (O, Q^{f(\lambda)})$ következik, amiből

$$f(\kappa + \lambda)\overrightarrow{OQ} - f(\kappa)\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{Q^{f(\kappa)}Q^{f(\kappa+\lambda)}} = \overrightarrow{OQ^{f(\lambda)}} = f(\lambda)\overrightarrow{OQ}.$$

Mivel a valós számok összeadása felcserélhető a szabad vektorok velük való szorzásával, formulánkból $f(\kappa + \lambda) = f(\kappa) + f(\lambda)$ adódik.

Az f szigorúan monoton növekvő függvény, mert ellenkező esetben Pasch axiómája miatt a $\overrightarrow{P^\lambda Q^{f(\lambda)}}$ szakaszok metszenék egymást. A függelékben megtalálható tétel értelmében így az f függvény nem csak additív, hanem homogén is, vagyis $f(\lambda) = c \cdot \lambda$ valamely $c \in \mathbb{R}$ számra. Mivel azonban $f(1) = 1$, ebből $f(\lambda) = \lambda$ következik. Ez igazolja a tétel „akkor” részét.

A fordított irányú következtetéshez csak azt kell észrevenni, hogy a most igazolt állítás szerint a $P^\lambda Q^\lambda$ egyenes párhuzamosak a PQ egyenessel, és a párhuzamossági axióma szerint a P^λ ponton keresztül csak egy párhuzamos húzható a PQ egyenessel. ■

K.16. Tétel. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ szám és $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{F}$ szabad vektorok esetén

$$(3) \quad \lambda(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \lambda\mathbf{f} + \lambda\mathbf{g}.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{f} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{g} = \overrightarrow{OQ}$, $\mathbf{f} + \mathbf{g} = \overrightarrow{OR}$ és minden $\lambda \neq 0$ valós számra $P^\lambda = X_O(\lambda, P)$, $Q^\lambda = X_O(\lambda, Q)$ valamint $R^\lambda = X_O(\lambda, R)$.

A párhuzamos szelők tétele értelmében a P^λ ponton áthaladó, az OQ egyenessel párhuzamos ℓ_P egyenes az R^λ pontban metszi az OS egyenest. Ugyanezen okból a Q^λ ponton áthaladó, az OP egyenessel párhuzamos ℓ_Q egyenes is az R^λ pontban metszi az OS egyenest.

Eszerint $OP^\lambda R^\lambda Q^\lambda$ egy paralelogramma, ami igazolja az állítást. ■