

Hibajegyzék és kiegészítések a Számítógépes ábrázoló geometria alapjai könyvhöz

Sajnos minden könyvben vannak hibák és hiányosságok, akármennyire gondos az előállítás. Ebben a dokumentumban ezek találhatók, pontosabban az eddig felfedezettek, hiszen — bár ez elvi ellentmondásnak tűnik egy véges sok karaktert tartalmazó könyvben :-) – hiba és kiegészíteni való minden javítás után marad minden könyvben.

Kérem, hogy aki bármely súlyosságú további hibát is talál e könyvben, az jelezze a dolgot a kurusa@math.u-szeged.hu elektronikus levelezési címemre.

1. A hibák a Számítógépes ábrázoló geometria alapjai könyvben

A hiba helyét egy a^b vagy a_b alakú koordináta adja meg, melyek jelentése:

$$\begin{cases} a^b, & \text{az } a \text{ sorszámú oldalon felülről sorban a } b\text{-edik sorban,} \\ a_b, & \text{az } a \text{ sorszámú oldalon alulról sorban a } b\text{-edik sorban.} \end{cases}$$

Régebbi adatokkal való kompatibilitás érdekében $b < 0$ esetén $a^b := a_{-b}$.

<u>hely</u>	<u>hiba és javítása</u>
15^5	való merőleges vetítés $\rightarrow$ való párhuzamos vetítés
15^{10}	origójának a képe. $\rightarrow$ origójának a merőleges vetülete.
16^9	A rövidülésekre $\rightarrow$ Merőleges vetítéskor a rövidülésekre
16^{11}	A nyomháromszög $\rightarrow$ Merőleges vetítéskor a nyomháromszög
17^1	Legyenek az $\rightarrow$ Legyenek a síkon az
18^{-16}	Bár itt csak a ... igaz. Természetesen ... vetítésre. $\rightarrow$ törlendők, mert ez a két mondat tartalmilag <i>értelmetlen</i> ;
18^{-7}	éleinek axonometrikus képe $\rightarrow$ éleinek valamely axonometrikus képe
18^{-8}	Bizonyítás. ... $\rightarrow$ helyettesítendő a K.1. tétel bizonyításával (ami teljesen új). ■
45^{-11}	a Beziér-görbék $\rightarrow$ a Bézier-görbék
49^{-11}	a Béziér-görbék $\rightarrow$ a Bézier-görbék
59^{-4}	az $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{u_{i+2}-u_{i+1}}{u_{i+1}-u_i} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ egyenlőtlenséget teljesítő $\rightarrow$ törlendő, mert bár ez <i>igaz</i> , de nem szükséges.

- 60¹ **Bizonyítás.** ... $\blacksquare$ $\longrightarrow$ helyettesítendő a K.2. tétel bizonyításával (ami csak korrekció).
- 61⁻⁸ A ... egyenletessége. Ez ... megválasztani. Ennek ... eltekintünk.
- 61⁻⁵ Ezek a mondatok tartalmilag *értelmetlenek* $\longrightarrow$ törlendő.
- 121⁵ Összetett determináns számításával *kiegészítendő* $\longrightarrow$ K.3. Lemma.

A lista elemeit magam és segítőkész emberek találták. Köszönöm nekik, hogy nem csak felfedezték, de meg is írták nekem a hibákat.

2. Kiegészítések a Számítógépes ábrázoló geometria alapjai könyvhöz

K.1. Pohlke-tétel — az axonometria alaptétele. *Egy síkon tetszőlegesen adott általános helyzetű $\bar{O}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontokhoz létezik a térben olyan kocka, melynek az O csúcsából kiinduló OA , OB és OC élének valamely axonometrikus képe éppen $\bar{O}\bar{A}$, $\bar{O}\bar{B}$ és $\bar{O}\bar{C}$.*

Bizonyítás. Mivel itt valójában az ABC sík megfelelő vetületét keressük egy az O origót tartalmazó képsíkra, és ezek a képsíkok metszik egymást, első tételünk értelmében elegendő a merőleges vetületeket vizsgálni, majd azokból valamely origón átmenő tengelyre vontakozó tengelyes affinitással képezni a kívánt axonometrikus képet.

Vetítsük a tér $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ és $C = (0, 0, 1)$ pontjait az O origón átmenő $\mathbf{n} = (x, y, z)$ normálisú ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) síkra merőlegesen. Ez éppen egy kocka három szomszédos élének merőleges vetülete. A merőlegesen vetített pontok legyenek O , A' , B' és C' .

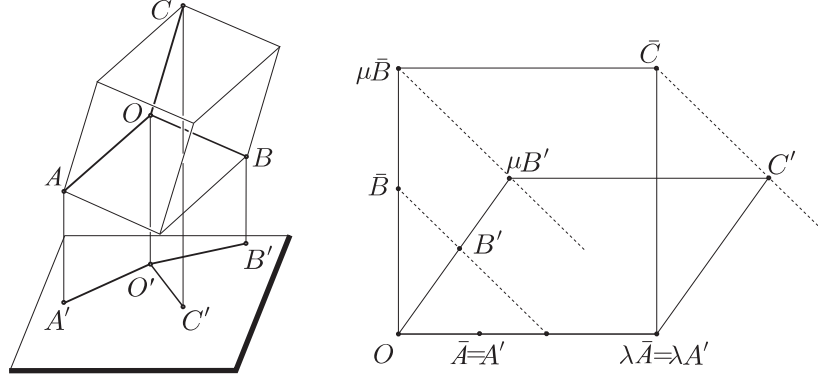
Olyan, $\mathbf{n}$ normálist keresünk, melyre $C' = \lambda A' + \mu B'$, ahol $\bar{O}\bar{C} = \lambda \bar{O}\bar{A} + \mu \bar{O}\bar{B}$, és az általános helyzet miatt $\lambda \neq 0 \neq \mu$.

Könnyű látni, hogy $A' = A - \mathbf{n}\langle \mathbf{n}, A \rangle$, $B' = B - \mathbf{n}\langle \mathbf{n}, B \rangle$, és $C' = C - \mathbf{n}\langle \mathbf{n}, C \rangle$, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jelenti a szokásos euklideszi skaláris szorzást a vektortéren. Ebből

$$A' = (1 - x^2, -xy, -xz), \quad B' = (-xy, 1 - y^2, -yz), \quad \text{és} \quad C' = (-xz, -yz, 1 - z^2),$$

amiért $xA' + yB' + zC' = 0$, vagyis az $\mathbf{n}$ normálisra a $\lambda = -x/z$ és $\mu = -y/z$ egyenletek adódnak, ha $z \neq 0$.

Ha $z = 0$, akkor C' az origóba esik, amiért az O , A' , B' és C' pontok nem általános helyzetűek. Mivel azonban az $\bar{O}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontok általános helyzetűek, a továbbiakban feltehető, hogy $z \neq 0$, és ugyanígy $x \neq 0$, $y \neq 0$.



1.3.13. ábra. Kocka és axonometrikus képe a Pohlke-tételben.

Eszerint egyenleteink $\lambda^2(1 - x^2 - y^2) = x^2$ és $\mu^2(1 - x^2 - y^2) = y^2$, vagyis $\lambda^2 = x^2(1 + \lambda^2) + \lambda^2 y^2$ és $\mu^2 = \mu^2 x^2 + y^2(1 + \mu^2)$ alakúak, aminek a megoldása

$$x^2 = \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2}, \quad y^2 = \frac{\mu^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2}, \quad \text{és} \quad z^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2 + \mu^2}.$$

Legyen tehát $\mathbf{n} = (\frac{\lambda}{1+\lambda^2+\mu^2}, \frac{\mu}{1+\lambda^2+\mu^2}, \frac{-1}{1+\lambda^2+\mu^2})$, aminek következtében $C' = \lambda A' + \mu B'$ teljesül az O, A', B' és C' képpontokra. Ekkor az $OABC$ pontok által meghatározott kockát megfelelően kicsinyítve vagy nagyítva az O pontból az O, A', B' és C' képpontokra érvényes lesz az $|\vec{O}\vec{A}| = |A'|$ egyenlőség is, és természetesen $C' = \lambda A' + \mu B'$ is érvényben marad.

Izometrikus transzformációval hozzuk most a $\vec{O}\vec{A}\vec{B}\vec{C}$ síkot a képsíkunkkal fedésbe úgy, hogy $\vec{O} = O$ és $\vec{A} = A'$ legyen, valamint $\vec{B}$ és $\vec{C}$ rendre az OA'' egyenes ugyanazon félsíkjába essen, mint B' és C' (tekintve, hogy $C' = \lambda A' + \mu B'$, ez egyértelműen lehetséges). Ekkor $O(\mu B')C'(\lambda A')$ és $O(\mu \vec{B})C(\lambda \vec{A})$ is paralelogramma, ezért a $(\mu \vec{B})(\mu B')C'\vec{B}$ is paralelogramma. A párhuzamos szelők tétele miatt $(\mu \vec{B})(\mu B') \parallel \vec{B}B'$. Vegyük az O, A', B' és C' képpontoknak az OA' és $\vec{B}B'$ tengelyekre vett O, A'', B'' és C'' affin képét úgy, hogy az OA' tengely pontonként fix — vagyis $A'' = A'$ —, a $\vec{B}B'$ tengelyen viszont az affinitás a B' pontot olyan $B'' = B$ pontba viszi. A bevezetőben jelzettek miatt ez a tengelyes affinitás — ami valójában azt jelenti, hogy a vetítés irányát nem változtatva, a képsíkot az OA' tengely körül a megfelelő mértékben elforgatjuk — egy axonometrikus képet hoz létre, vagyis $OA''B''C''$ az $OABC$ kockaélek axonometrikus képe, és $\vec{A} = A'', \vec{B} = B''$. Az affinitás tartja a paralelogrammákat, így $C'' = \lambda A'' + \mu B'' = \lambda \vec{A} + \mu \vec{B} = \vec{C}$ is teljesül, ami bizonyítja az állítást. ■

K.1'. Tétel. (Gehér György ötlete nyomán.) *Egy síkon tetszőlegesen adott általános helyzetű $\bar{O}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontokhoz létezik a térben olyan téglatest, melynek az $O = \bar{O}$ csúcsával szomszédos A , B és C csúcsainak merőleges vetülete éppen $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$.*

Bizonyítás. Legyenek adottak a képsíkon az $O = \bar{O}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontok, és legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{O\bar{A}}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{O\bar{B}}$ és $\mathbf{c} = \overrightarrow{O\bar{C}}$, valamint $\overrightarrow{O\bar{A}} = \mathbf{a} + a\mathbf{n}$, $\overrightarrow{O\bar{B}} = \mathbf{b} + b\mathbf{n}$ és $\overrightarrow{O\bar{C}} = \mathbf{c} + c\mathbf{n}$, ahol $\mathbf{n}$ az $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ képsík normálisa.

Az A , B és C pontok pontosan akkor alkotják az egyik csúcsával az O pontban elhelyezett $\mathcal{T}$ téglatest O csúcsának három szomszédos csúcsát, ha $\overrightarrow{O\bar{A}} \perp \overrightarrow{O\bar{B}} \perp \overrightarrow{O\bar{C}} \perp \overrightarrow{O\bar{A}}$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $0 = \langle \overrightarrow{O\bar{A}}, \overrightarrow{O\bar{B}} \rangle = \langle \overrightarrow{O\bar{B}}, \overrightarrow{O\bar{C}} \rangle = \langle \overrightarrow{O\bar{C}}, \overrightarrow{O\bar{A}} \rangle$. Behelyettesítve ebbe a fenti formulákat, az adódik, hogy

$$0 = ab + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = bc + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = ca + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle,$$

amiből az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok páronként nem merőlegesek, akkor

$$a^2 = \frac{-\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle}, \quad b^2 = \frac{-\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle}, \quad c^2 = \frac{-\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy létezik pontosan egy olyan, az egyik csúcsával az O pontban elhelyezett $\mathcal{T}$ téglatest, melynek O csúcsával szomszédos három csúcsa, éppen az A , B és C pontok.

Ha mondjuk $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$, vagyis $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 0$, akkor $bc = 0$, amiért $b = 0$ és $c = 0$ legalább egyike teljesül.

Ha $b = 0$ és $c = 0$ egyszerre teljesül, akkor $0 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle$, vagyis az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok páronként merőlegesek, holott egy síkban helyezkednek el, amiért egyikük nulla, vagyis az $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontok egyike egybeesik az O ponttal. Bármely csúcs is esik az O pontba, a másik két vektor merőleges, ezért nyilván végtelen sok olyan, az egyik csúcsával az O pontban elhelyezett $\mathcal{T}$ téglatest létezik, melynek O csúcsával szomszédos három csúcsának merőleges vetülete, éppen az $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontokba esik.

Ha $b = 0$ és $c \neq 0$, akkor $0 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$, vagyis az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok merőlegesek a $\mathbf{b}$ vektorra, tehát az $\bar{A}$, $\bar{C}$ és O pontok kollineárisak. Ekkor tetszőlegesen választva a c számot, pontosan egy a értékre teljesül $a0 = ca + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle$ egyenlőség, ami azt jelenti, hogy ekkor pontosan egy olyan, az egyik csúcsával az O pontban elhelyezett $\mathcal{T}$ téglatest, melynek O csúcsával szomszédos három csúcsa, éppen az A , B és C pontok.

Eszerint mindig van legalább egy olyan, az egyik csúcsával az O pontban elhelyezett $\mathcal{T}$ téglatest, melynek O csúcsával szomszédos három csúcsát a merőleges vetítés éppen az $\bar{A}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontokba viszi. ■

K.2. Tétel. Tetszőlegesen adott $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ pontokhoz, $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_n$ vektorokhoz és $u_0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n$ csomópontokhoz minden $0 \leq i \leq n-2$ esetén pontosan egy olyan $\mathbf{S}$ köbös összetett Bézier-görbe létezik, amely kétszer folytonosan differenciálható, és amelyre $\mathbf{S}(u_i) = \mathbf{p}_i$ ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$), és $\mathbf{S}'(u_n) = \mathbf{t}_n$.

Bizonyítás. Legyen a keresett $\mathbf{S}$ összetett Bézier-görbe i -dik köbös Bézier-görbéje $\mathbf{S}_i$, melynek kontrollpoligonja $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i^-, \mathbf{q}_i^+, \mathbf{p}_{i+1}\}$. Ezen Bézier-görbék végpontjaiban az első és a második derivált is egybe kell essen. Az első deriváltak egybeesnek, ha

$$\mathbf{t}_0 = 3 \frac{\mathbf{q}_0^- - \mathbf{p}_0}{u_1 - u_0}, \quad \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_{i-1}^+}{u_i - u_{i-1}} = \frac{\mathbf{q}_i^- - \mathbf{p}_i}{u_{i+1} - u_i}, \quad 3 \frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_{n-1}^+}{u_n - u_{n-1}} = \mathbf{t}_n \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

a másodikak pedig akkor egyenlőek, ha

$$\frac{\mathbf{q}_i^+ - 2\mathbf{q}_i^- + \mathbf{p}_i}{(u_{i+1} - u_i)^2} = \frac{\mathbf{p}_i - 2\mathbf{q}_{i-1}^+ + \mathbf{q}_{i-1}^-}{(u_i - u_{i-1})^2} \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Vezessük be a $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$ jelölést, és rendezzük a fenti egyenleteket úgy, hogy a keresett $\mathbf{q}_i^+$ és $\mathbf{q}_i^-$ pontokra kapjunk egyenletrendszert. A szélső esetekben a $\mathbf{p}_0 + \mathbf{t}_0 \frac{\Delta_0}{3} = \mathbf{q}_0^-$ és $\mathbf{p}_n - \mathbf{t}_n \frac{\Delta_{n-1}}{3} = \mathbf{q}_{n-1}^+$ egyenletek adódnak, amelyekből $\mathbf{q}_0^-$ és $\mathbf{q}_{n-1}^+$ egyértelműen adódik. A köztes pontok esetében a $\mathbf{q}_i^+$ és $\mathbf{q}_i^-$ pontokra való rendezés a $(2n-2) \times (2n-2)$ -es, lineáris

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i(\Delta_i + \Delta_{i-1}) &= \mathbf{q}_{i-1}^+ \Delta_i + \mathbf{q}_i^- \Delta_{i-1} \\ \mathbf{p}_i(\Delta_i^2 - \Delta_{i-1}^2) &= \mathbf{q}_i^+ \Delta_{i-1}^2 - 2\mathbf{q}_i^- \Delta_{i-1}^2 + 2\mathbf{q}_{i-1}^+ \Delta_i^2 - \mathbf{q}_{i-1}^- \Delta_i^2 \end{aligned} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

egyenletrendszerre vezet. Vezessük be az alábbi négy vektort az egyszerűbb számolás kedvéért:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^+ &= (\mathbf{q}_0^+, \dots, \mathbf{q}_{n-2}^+), \\ \mathbf{q}^- &= (\mathbf{q}_1^-, \dots, \mathbf{q}_{n-1}^-), \\ \mathbf{p}^+ &= (\mathbf{p}_1(\Delta_1 + \Delta_0), \dots, \mathbf{p}_{n-1}(\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2})), \\ \mathbf{p}^- &= (\mathbf{p}_1(\Delta_1^2 - \Delta_0^2), \dots, \mathbf{p}_i(\Delta_i^2 - \Delta_{i-1}^2), \dots, \mathbf{p}_{n-1}(\Delta_{n-1}^2 - \Delta_{n-2}^2)). \end{aligned}$$

(Ezen vektorokat persze formálisan értjük, hiszen az elemeik nem számok, hanem maguk is vektorok – pontok.) Ezen vektorokkal egyenletrendszerünk az igen egyszerű

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{p}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}^+ \\ \mathbf{q}^- \end{pmatrix}$$

alakot ölti, ahol az $(n-1) \times (n-1)$ -es A, B, C és D mátrixok elemeire

$$\begin{aligned} A : a_{i,j} &= \delta_{i,j} \Delta_i, & B : b_{i,j} &= \delta_{i,j} \Delta_{i-1}, \\ C : c_{i,j} &= 2\delta_{i,j} \Delta_i^2 + \delta_{i,j-1} \Delta_{i-1}^2, & D : d_{i,j} &= -2\delta_{i,j} \Delta_{i-1}^2 - \delta_{i,j+1} \Delta_i^2. \end{aligned}$$

(Itt a $\delta_{i,j}$ Kronecker-delta pontosan akkor 1, ha $i = j$, és minden más esetben 0.) Mivel az A és a B mátrix is diagonális, és a K.3 Lemma alapján $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB)$. A rendszer egyértelmű megoldhatósága, ami ugyanaz mint mátrixának invertálhatósága tehát pontosan akkor teljesül, ha az utóbbi, $(n-1) \times (n-1)$ -es $\det(DA - CB)$ determináns nem nulla.

Legyen $E = DA - CB$. Ekkor az E mátrix elemeire

$$E : e_{i,j} = \delta_{i,j+1} \Delta_i^2 \Delta_{i-1} + 2\delta_{i,j} \Delta_{i-1} \Delta_i (\Delta_{i-1} + \Delta_i) + \delta_{i,j-1} \Delta_{i-1}^2 \Delta_i.$$

Világos, hogy az E mátrix minden eleme pozitív, és diagonálisan domináns, hiszen

$$\begin{aligned} e_{i,i} &= 2\Delta_{i-1} \Delta_i (\Delta_{i-1} + \Delta_i) \\ &> \Delta_i^2 \Delta_{i-1} + \Delta_{i-1}^2 \Delta_i = e_{i,i-1} + e_{i,i+1} = e_{i,1} + \dots + e_{i,i-1} + e_{i,i+1} + \dots + e_{i,n-1} \end{aligned}$$

minden lehetséges i -re. Ez azt is jelenti, hogy az E mátrix invertálható (lásd a Függelékben), ami teljessé teszi tételünk bizonyítását is. ■

K.3. Lemma. *Ha C és D a diagonális A és a vele felcserélhető B négyzetes mátrixszal azonos rendű mátrixok, akkor $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB)$.*

Bizonyítás. Mivel A és B felcserélhető mátrixok, teljesül az

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & DA - CB \end{pmatrix}$$

azonosság. A determinánsok kifejtési, szorzás-, és ismét a kifejtési tétele értelmében tehát

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A^{-1} & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & DA - CB \end{pmatrix} \\ &= \det(DA - CB), \end{aligned}$$

ami igazolja az állítást. ■