

JATE TTK BOLYAI INTÉZET Geometriai tanszék

Kurusa Árpád
Szemők Árpád

SZÁMÍTÓGÉPES ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA

KÉZIRAT

SZEGED, 1994

Bevezetés

Egy jegyzethez nem feltétlenül szükséges bevezetőt írni, mégis úgy érzem, jelen esetben mind a cím megmagyarázása, mind a mögötte lévő anyag körülhatárolása érdekében ezt kell tennem, annál is inkább, mivel maga a téma, de legalábbis a második része Magyarországon új, és nálunk is csak most kezdi felváltani a klasszikus ábrázoló geometria oktatást.

Nyugodtan mondhatjuk, hogy a klasszikus ábrázoló geometria, mely tulajdonképpen e jegyzet első fejezetét alkotja, már a múlt században elérte teljes fejlettségét. E témakört, a különböző térbeli alakzatok síkbeli ábrázolásának igénye szülte, mely elsősorban a mérnöki tudományok és a művészetek irányából hatott. Természetesen, ahogy az már lenni szokott a matematikában, maga a terület a matematikának amúgy is hasznos ágává vált, és végül önállóan fejlődött tovább, belső törvényei szerint. A meglehetősen sokféle ábrázolás mindegyikénél megadták, az Euklideszi szerkesztések köréből nem kilépő térbeli szerkesztések síkbeli végrehajtásának lehetőségeit, módjait. Sem az ábrázolási módok, sem az Euklideszi szerkesztések lehetőségei nem tették lehetővé tetszőleges térbeli alakzatok ábrázolását. Az ábrázolható térbeli elemek, persze van egy kevés kivétel, csak a sík, az egyenes és a pont volt. Ezen a fejlettségi szinten az ábrázoló geometria lényegében a mérnökök gyakorlati eszközévé vált.

Természetesen a mérnöki igények ennél jóval tovább mentek, és találtak is bizonyos, matematikailag nem értékelhető megoldásokat. Az egyik legfontosabb ilyen igény a görbék ábrázolásával kapcsolatosan merült fel. Ez már akkor probléma volt, amikor hajókat terveztek, és annak például a víztörő orrát kellett megrajzolni. Ez nagyon fontos darabja volt a hajónak, mert nagyban megszabta a hajó sebességét.

A szerkesztéskor a hajó orrából már megtervezett néhány pontot kellett egy "szép" sima görbével összekötniük. Ezt még az ötvenes években is egy kis rugalmas fa-léccel, melyet az angolok "spline"-nak (ejtsd: "szplájn") neveztek, végeztek el úgy, hogy azt a megadott pontokra ráfeszítették, majd mellette meghúzták a vonalat.

Az ábrázoló geometria mint tudomány szempontjából ez az igény, illetve ez a megoldása persze nem hozhatott áttörést, már csak az Euklideszi szerkesztések ismert korlátai miatt sem. A teljes megújulást, mely magában hordozta az előbb említett igény megoldását is, egy új eszköz, és az általa állított új szempontok megjelenése hozta. Ez az eszköz a számítógép volt.

Az 1960-as évek elején, amikor a nagyobb ipari központokban már eléggé elterjedt a számítógép, a fentiekben vázolthoz igen hasonló probléma vetődött fel a számítógépet használó tervezők előtt. Már szinte minden méretezési számítást a számítógéppel végeztek, de magát a tervet mégis nekik kellett a rajzasztalon megrajzolni, és annyszor módosítani, ahányszor arra a számítások alapján szükség mutatkozott. Márpedig ez azt jelentette, hogy éppen a legnagyobb munkához nem sikerült alkalmazni a számítógépet. De más oldalról is szorított a helyzet, hiszen már kezdtek megjelenni az első számjegyvezérlésű maró- és esztergagépek, melyeknek meglehetősen kicsi volt a memóriájuk, ezért bonyolultabb munkadarok megmunkálását elég nehéz volt elvégeztetni velük.

A mérnökök egy olyan komplett számítógépes rendszerről kezdtek álmodozni, mely a tervezéssel egyidőben szolgáltatja az adatokat, a szükséges változtatásokat a mérnöki utasításoknak megfelelően önállóan elvégzi, majd a kész terv alapján levezényli a gyártást. Ezt a rendszert, amikor a tervező tényleg csak az érdemi szellemi munkára koncentrálhat, ma *CAD* (Ejtsd: 'ked') rendszernek nevezik, az angol 'Computer Aided Design', magyarul Számítógéppel Segített Tervezés, fogalom rövidítése alapján.

Az ehhez a rendszerhez vezető út egyik igen nagy akadályát az amerikai MIT (Massachusetts Institute of Technology) kutató intézetben küzdötték le, kifejlesztve az első grafikus kiviteli és beviteli perifériát a számítógéphez. Ez az 1963-ban alkotott grafikus rendszer a képernyő és a fényceruza volt. Ezután már nem csak számokat lehetett közölni a számítógéppel, hanem közvetlenül a képernyőn vizuálisan kiválasztott pontokra is rá lehetett mutatni, sőt speciális programokkal már különféle ábrákat is lehetett rajzolni.

A másik és inkább elméleti problémát Európában sikerült megoldani. A probléma az volt, hogy olyan görbékre volt szükség a fentebb már részletezett okokból, melyek aránylag kevés adattal megadhatók, de ugyanakkor elég flexibilisek ahhoz, hogy gyakorlatilag mindent le lehessen rajzolni velük. Fontos feltétel volt az is, hogy az a néhány meghatározó adat 'emberileg' is követhetően határozza meg a görbét, valamint, hogy a számítógép gyorsan, aránylag kevés művelettel tudja felrajzolni a görbét. További feltétel volt, hogy mivel a mérnöki gyakorlatban a térbeli alakzatot annak merőleges vetületével szokás ábrázolni (lásd axonometrikus és Monge-féle ábrázolás), a görbe merőleges vetületét is gyorsan lehessen számolni, rajzolni.

A megoldás a Citroën és a Renault autógyáraknál gyakorlatilag egyidőben született meg. Azt, hogy a fenti feltételek mennyire egyértelműen meghatározzák a megoldást, jól mutatja, hogy mind a két helyen azonos eredményre jutottak. A Citroënnél de Casteljau (Ejtsd: 'dökaszteljó') 1959-ben, a Renaultnál Bézier (Ejtsd: 'bezié') 1962-ben fedezte fel az új görbéket, melyeket ma már az első nyilvános közlés alapján egyértelműen Bézier görbéknek neveznek. Ezzel megszületett a *CAGD*, ami az angol 'Computer Aided Geometric Design' rövidítése, és magyarul Számítógéppel Segített Geometriai Tervezést jelent.

Tehát a CAD rendszernek a szerkesztéssel foglalkozó részét nevezik *CAGD*-nek, mely lényegében a görbék és felületek számítógépen való ábrázolásának problémakörét vizsgálja. A jegyzet címében szereplő "számítógépes" jelző éppen arra akar utalni, hogy ezzel is foglalkozunk.

* * *

Bizonyára feltűnt az olvasónak, hogy a címlapon az szerepel, hogy "kézirat". Ez azt jelenti, hogy a jegyzetben lehetnek olyan apró pontosítanivalók, amelyekre a szerzők még nem figyeltek fel a javítás során, ezek többnyire elírások, sajtóhibák, de előfordulhat, hogy egy tétel feltételei során bizonyos nagyon speciális feltételek taglalására nem került sor. Kérjük, ilyen irányú észrevételeit jutassa el a szerzőkhöz! Észrevételeit, segítségét előre is köszönjük.

Dr. Kurusa Árpád, Szemők Árpád

Tartalomjegyzék

Bevezetés	iii
Tartalomjegyzék.....	vii
1. Klasszikus ábrázoló geometria.....	1
1.1. Perspektivikus ábrázolás	1
1.1.1. Tulajdonságok	2
1.1.2. Alkalmazások és példák	6
1.1.3. Feladatok	10
1.2. Nyompáros és mérőszámok módszer	11
1.2.1. Nyompáros módszer	11
1.2.2. Mérőszámok ábrázolás	13
1.2.3. Alkalmazások és példák	14
1.3.3. Feladatok	16
1.3. Axonometrikus ábrázolás	16
1.3.1. Tulajdonságok	17
1.3.2. Alkalmazások és példák	22
1.3.3. Feladatok	23
1.4. A Monge-féle ábrázolás	24
1.4.1. Tulajdonságok, alapszerkesztések	25
1.4.2. Példaszerkesztések	31
1.5.3. Feladatok	33

1.5. Sztereografikus projekció.....	33	3.2.6. Feladatok.....	89
1.5.1. Tulajdonságok.....	34		
1.5.2. Feladatok.....	38	4. Alkalmazások.....	91
2. Görbe modellezés.....	39	4.1. Művészet.....	91
2.1. Lagrange görbék.....	41	4.1.1. A festmény ... nyitott ablak.....	92
2.1.1. Tulajdonságok.....	42	4.2. Számítástechnika.....	93
2.1.2. Feladatok.....	43	4.2.1. Példaprogramok.....	94
2.2. Bézier görbék.....	44		
2.2.1. Tulajdonságok.....	48		
2.2.2. További tulajdonságok.....	53		
2.3.3. Feladatok.....	60		
2.3. Összetett Bézier görbék.....	60		
2.3.1. Alapvető szplájn típusok.....	62		
2.4.2. Feladatok.....	69		
2.4. Racionális Bézier görbék.....	69		
2.4.1. Kúpszeletek.....	70		
2.4.2. A de Casteljau algoritmus.....	72		
2.4.3. Tulajdonságok.....	73		
2.4.4. Feladatok.....	74		
3. Felületek ábrázolása.....	75		
3.1. Bézier háromszögek.....	76		
3.1.1. Baricentrikus koordináták.....	76		
3.1.2. A de Casteljau algoritmus.....	78		
3.1.3. Bernstein polinomok.....	79		
3.1.4. Feladatok.....	80		
3.2. Bézier négyszögek.....	81		
3.2.1. A bilineáris interpoláció.....	81		
3.2.2. A de Casteljau algoritmus.....	83		
3.2.3. Tulajdonságok.....	84		
3.2.4. Deriváltak.....	84		
3.2.5. Bikubikus szplájnfelületek.....	86		