

# Szakaszok ekvioptikusai: Apollóniosz tételének általánosítása

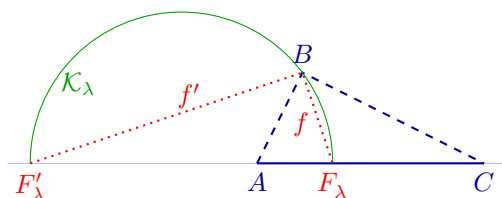
KURUSA ÁRPÁD

**Kivonat.** Az Apollóniosz-tétel szokásos bizonyítása szerint a kizárólag végpontjukban közös kollineáris szakaszok pontosan az Apollóniosz-kör pontjaiban lát-  
szódnak egyforma szög alatt. Azon pontok halmazát a síkban, melyekben a  
sík két konvex tartománya egyforma szög alatt látszik, a két tartomány ek-  
voptikusának nevezzük. E cikkben kiderítjük, hogy szakaszok ekvoptikusa  
mikor tartalmaz kört.

## 1. Bevezető

Apollóniosz tétele szerint azon  $B$  pontok halmaza, melyek valamely rögzített  $A$  és  $C$  pontoktól való távolságainak  $\delta_{AC}(B)$  aránya egy  $0 < \lambda \neq 1$  állandó, a két rögzített pont egyenesére szimmetrikus ( $\lambda$ -paraméterű) *Apollóniosz-féle* kör.

E tétel szokásos bizonyítása abból indul ki, hogy az  $ABC\triangle$  háromszög  $B$  ponton átmenő  $f$  belső és  $f'$  külső szögfelező egyenese az  $\overline{AC}$  oldal egyenesét rendre olyan  $F$  és  $F'$  pontokban metszik, melyekre  $\delta_{AC}(F) = \delta_{AC}(F')$  éppen az  $\overline{AB}$  és  $\overline{BC}$  oldalak hosszainak aránya. Mivel az ugyanazon csúchhoz tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, ebből következik, hogy azon  $B$  pontok halmaza, melyekre  $\delta_{AC}(B)$  egy  $0 < \lambda \neq 1$  állandó, éppen az  $\overline{F_\lambda F'_\lambda}$  szakaszra emelt  $\mathcal{K}_\lambda$  Thalész-kör, ahol az  $F_\lambda$  és  $F'_\lambda$  pontokat a  $\delta_{AC}(F_\lambda) = \delta_{AC}(F'_\lambda) = \lambda$  és  $F'_\lambda \notin \overline{AC} \ni F_\lambda$  feltételek határozzák meg.



AMS-klasszifikáció (2012): 0052, 0054.

Kulcsszavak és -kifejezések: látószög, Apollóniosz tétele, ekvoptikus, Apollóniosz-görbe.

A  $\mathcal{K}_\lambda$  Apollóniosz-körhöz vezető levezetésből kiolvasható e körnek az a tulajdonsága is, hogy pontjaiból az  $\overline{AF_\lambda}$  és  $\overline{F_\lambda C}$  szakaszok (és persze ugyanígy az  $\overline{AF'_\lambda}$  és  $\overline{F'_\lambda C}$  szakaszok is) azonos szög alatt látszanak. Hasonló helyzetre, vagyis ahol különböző szakaszok egy körív pontjaiból megegyező szög alatt látszanak, a látószög-tétel is példával szolgál: a látószög-tétel szerint egy húrnégyszög egyforma hosszúságú oldalai a körülírt kör ívein egyforma vagy kiegészítő (konstans) szög alatt látszanak.

A síkban két konvex tartományt azonos szög alatt látó pontok halmazának lezártját *ekviptikusnak* nevezzük. Azon pontok halmazának lezártját pedig, amelyekből a két konvex tartomány kiegészítő szögek alatt látszik, *komptikusnak* nevezzük. Az Apollóniosz-kör tehát a szakaszok ekviptikusának részhalmaza, a [3] cikk szerint pedig az origó középpontú  $\sqrt{a^2 + b^2}$  sugarú kör részhalmaza az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletű ellipszisek ekviptikusának.

E cikkben kiderítjük, hogy szakaszok ekviptikusa *pontosan* mikor tartalmaz kört vagy körívet.

## 2. Szakaszok ekviptikusai és az Apollóniosz-görbék

Világos, hogy ha két szakasz egybeesik, akkor ekviptikusuk a teljes sík, és ugyanez a helyzet, akkor is, ha mindkét szakasz elfajul. Az is nyilvánvaló, hogy ha csak az egyik szakasz elfajul, akkor az ekviptikusuk a nem elfajuló szakasz egyenesének része, ezért a továbbiakban — ha kifejezetten nem is írjuk — a *vizsgált szakaszok különbözőek és nem elfajulók*.

Egy ponthalmazt a síkban *algebrainak* nevezünk, ha pontosan azon pontok tartoznak hozzá, melyek koordinátái valamely polinom-egyenlet megoldásai. Ilyenek az egyenesek, melyek elsőfokú polinom-egyenletek megoldás-halmazai, a kúpszeletek, melyek másodfokú polinom-egyenletek megoldás-halmazai, és ilyenek a kúpszeletek izoptikusai is, melyek negyedfokú polinom-egyenletek megoldás-halmazai [3].

A továbbiakban a síkot mindig a térben, az ott adott ortogonális koordináta-rendszer  $z = 0$  egyenletű síkjaként tekintjük. Ennek a síknak a normálisa az  $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$  vektor.

**2.1. Tétel.** *Két különböző szakasz ekviptikusa két harmadrendű  $\mathcal{A}_1$  és  $\mathcal{A}_2$  algebrai görbe bizonyos íveinek uniója. Az  $\mathcal{A}_1$  és  $\mathcal{A}_2$  nem az ekviptikusához tartozó íveinek uniója a két szakasz komptikusa.*

**Bizonyítás.** A  $\times$  vektoriális szorzás és a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skaláris szorzások definíciója alapján világos, hogy az  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  szakaszok azon  $X$  pontokban látszanak egyenlő szög

alatt, melyekre

$$(2.1) \quad (\overrightarrow{XA} \times \overrightarrow{XB}) \langle \overrightarrow{XC}, \overrightarrow{XD} \rangle = \varepsilon(X) (\overrightarrow{XC} \times \overrightarrow{XD}) \langle \overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB} \rangle,$$

ahol

$$(2.2) \quad \varepsilon(X) = \begin{cases} +1, & \text{ha } |\overrightarrow{XC} \times \overrightarrow{XD}|(\overrightarrow{XA} \times \overrightarrow{XB}) = |\overrightarrow{XA} \times \overrightarrow{XB}|(\overrightarrow{XC} \times \overrightarrow{XD}), \\ -1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy az  $\varepsilon(X)$  függvény konstans  $+1$  vagy  $-1$  az  $AB$  és  $CD$  egyenesek félsíkjainak metszetein, és mindannyiszor előjelet vált, amikor az  $X$  pont az  $AB$  és  $CD$  egyenesek másik félsíkjára kerül.

Rögzítsünk most egy  $O$  pontot a síkban és legyen  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ ,  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$  és  $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XA} \times \overrightarrow{XB} &= (\mathbf{a} - \mathbf{x}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{x}) = \mathbf{x} \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \\ \langle \overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB} \rangle &= \langle \mathbf{a} - \mathbf{x}, \mathbf{b} - \mathbf{x} \rangle = |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XC} \times \overrightarrow{XD} &= (\mathbf{c} - \mathbf{x}) \times (\mathbf{d} - \mathbf{x}) = \mathbf{x} \times (\mathbf{c} - \mathbf{d}) + \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \\ \langle \overrightarrow{XC}, \overrightarrow{XD} \rangle &= \langle \mathbf{c} - \mathbf{x}, \mathbf{d} - \mathbf{x} \rangle = |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} + \mathbf{d} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle, \end{aligned}$$

amely azonosságokat az (2.1) egyenletünkbe helyezve és azt skalárisan megszorozva az  $\mathbf{m}$  normálissal az

$$\begin{aligned} &|\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} + \mathbf{d} \rangle + \\ &+ \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle \\ (2.3) \quad &= \bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) (|\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \\ &+ \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \end{aligned}$$

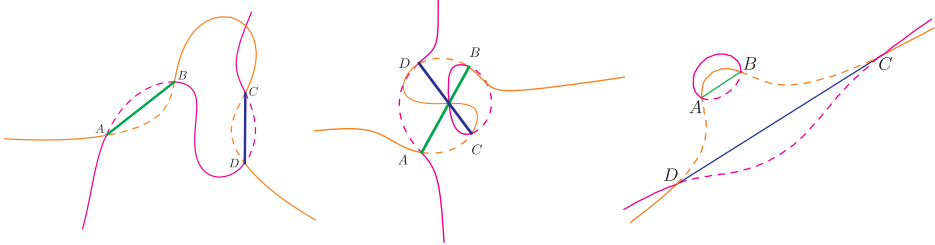
egyenlethez jutunk, ahol  $\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\varepsilon}(\overrightarrow{OX}) := \varepsilon(X)$ . Ez máris bizonyítja tételünk első állítását, hiszen elvégezve a szorzásokat, az  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$  vektor koordinátái legfeljebb harmadik hatványon fordulnak elő az (2.3) egyenletben.

A tétel második állításának bizonyításához csak azt kell észrevennünk, hogy fenti bizonyításunk ugyanúgy elvégezhető, mindössze a kiindulási (2.1) egyenlet jobboldalát annak ellentettjére kell módosítani, mert a kiegészítő szög koszinusza az eredeti szög koszinuszának ellentettje. ■

A (2.3) egyenlet megoldáshalmaza része a két

$$\begin{aligned} &|\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} + \mathbf{d} \rangle + \\ &+ \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle \\ (2.4) \quad &= \pm (|\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \\ &+ \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle), \end{aligned}$$

egyenletek megoldás-halmazának. A (2.4) egyenletek definiálják az *Apollóniosz-görbék*<sup>1</sup> nevezzük. Az ugyanazon szakaszpárhoz tartozó Apollóniosz-görbékre azt mondjuk, hogy *egymás párjai*.



Három konfiguráció két-két Apollóniosz-görbéje és egy-egy ekvi- és komppotikusa (folytonos illetve szaggatott vonalak). A jobbszélső konfiguráció  $M_0$  pontja ideális.

Tekintsük a párhuzamos egyeneseket úgy, mint amelyek egymást az ideális pontjukban metszik. Az (eszerint) esetleg ideális

$$M_0 := AB \cap CD, \quad M_+ := AC \cap BD \quad \text{és} \quad M_- := AD \cap BC$$

pontokat *ekviptikus pontoknak* nevezzük, mert természetesen az ekviptikuson vannak. Minthogy az ekviptikust és a komppotikust is zárt halmaznak definiáltuk, ugyancsak az ekviptikuson van az  $A, B, C, D$  pontok mindegyike is.

Az  $A, B, C, D$  és  $M_0$  pontok mindkét Apollóniosz-görbén rajta vannak, hiszen bármelyikbe helyezve az  $O$  pontot, a (2.3) egyenlet konstans tagja eltűnik. Az  $M_{\pm}$  pontok viszont általában pontosan egy-egy különböző Apollóniosz-görbére illeszkednek, mégpedig arra, amelyben szereplő előjel éppen a pont indexe.<sup>2</sup>

Egy Apollóniosz-görbe (2.4) egyenlete akkor és csak degenerálódik alacsonyabb rendűvé, ha a harmadrendű tagja eltűnik, vagyis

$$\langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle = \pm \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle$$

minden  $\mathbf{x}$  vektorra. Ez pontosan akkor következik be, ha  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \pm(\mathbf{c} - \mathbf{d})$ , ami azt jelenti, hogy az  $A, B, C$  és  $D$  pontok paralelogrammát alkotnak, melynek  $O$  a középpontja. A degenerálódott egyenletű Apollóniosz-görbéket *elfajultnak* mondjuk. Vegyük észre, hogy egy párnak nem lehet mindkét eleme egyszerre elfajult.

<sup>1</sup>Ezekről sok érdekes algebrai és geometriai tulajdonság szerepel a [8] és [9] cikkekben, ahol többször is *tévesen* nevezik őket izoptikusoknak.

<sup>2</sup>Vegyük észre, hogy az itt megadott előjelek, és így az  $M_{\pm}$  pontok indexelése sem invariáns a szakaszokra, hiszen az előjel a (2.4) egyenletben az  $A$  és  $B$  pontok cseréje esetén éppen az ellenkezőjére változik.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen egy elfajult Apollóniosz-görbe! Előbbiek szerint ekkor az  $ABCD$  négyszög egy paralelogramma, így az  $O$  pontot ezen paralelogramma egy átlójának felezőpontjába érdemes helyezni. Ekkor  $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b} = -\mathbf{d}$ , így a (2.4) egyenletek az

$$\begin{aligned} & |\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 + \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \\ & + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m}) + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ & = \pm (|\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 + \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \\ & + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle), \end{aligned}$$

alakot veszik fel, amiből a két görbe egyenletére

$$(-) \quad |\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0,$$

$$(+) \quad |\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle = 0$$

adódik. Mivel  $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{a}, (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times \mathbf{m} \rangle$ , összevonásokkal rendre az

$$\langle |\mathbf{x}|^2 \mathbf{a} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle \mathbf{x} + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}, (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times \mathbf{m} \rangle = 0,$$

$$\langle |\mathbf{x}|^2 \mathbf{x} + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle = 0$$

egyenletekhez jutunk. Válasszuk úgy a koordináta-tengelyeket, hogy  $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (1, 0, 0)$  és  $a_2 \geq 0$  legyen. Ekkor  $(b_1, b_2, 0) = \mathbf{b} = \mathbf{a} + (1, 0, 0) = (a_1 + 1, a_2, 0)$  és  $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times \mathbf{m} = (0, 1, 0)$ , így előbbi formuláink koordinátás alakja rendre

$$(2.5) \quad a_2(x_1^2 - x_2^2) - (2a_1 + 1)x_1x_2 + (a_1^2 + a_2^2 + a_1)a_2 = 0,$$

$$(2.6) \quad (x_1^2 + x_2^2)x_2 + (a_1^2 + a_1 - a_2^2)x_2 - (2a_1 + 1)a_2x_1 = 0.$$

**2.2. Tétel.** *Egy Apollóniosz-görbe akkor és csak akkor elfajult, ha a szakaszok egy (esetleg elfajuló) paralelogramma szemközti oldalai. Az elfajult Apollóniosz-görbe egy merőleges aszimptotájú hiperbola, mely két merőleges egyenessé fajulhat.*

**Bizonyítás.** A tétel első állítását már beláttuk, a második igazolásához a másodrendű (2.5) egyenletet kell megvizsgálunk!

Közismert [4], hogy az ilyenek megoldáshalmaza az elfajuló esetektől eltekintve kúpszelet, melynek típusát az együttthatók mátrixának szignatúrája határozza meg. Ebből adódik, hogy a megoldáshalmaz egy hiperbola, de ennél többet tudunk meg, ha az

$$\begin{aligned} s &= x_1 \sqrt{\frac{\sqrt{4a_2^2 + (2a_1 + 1)^2} + (2a_1 + 1)}{2}} + x_2 \sqrt{\frac{\sqrt{4a_2^2 + (2a_1 + 1)^2} - (2a_1 + 1)}{2}} \\ t &= x_1 \sqrt{\frac{\sqrt{4a_2^2 + (2a_1 + 1)^2} - (2a_1 + 1)}{2}} - x_2 \sqrt{\frac{\sqrt{4a_2^2 + (2a_1 + 1)^2} + (2a_1 + 1)}{2}} \end{aligned}$$

helyettesítést alkalmazva az  $-(a_1^2 + a_2^2 + a_1)a_2 = st$  alakhoz jutunk. Ez az egyenlet azt mutatja, hogy ha  $(a_1^2 + a_2^2 + a_1)a_2 \neq 0$ , akkor a hiperbola aszimptotái merőlegesek, ha pedig  $(a_1^2 + a_2^2 + a_1)a_2 = 0$ , akkor a hiperbola két merőleges egyenessé fajul. ■

**2.3. Megjegyzés.** A fenti bizonyítás szerint az elfajult Apollóniosz-görbe pontosan két esetben fajul két merőleges egyenesé:

- (1)  $a_2 = 0$ : ekkor mindkét szakasz az első koordináta-tengelyen van, és a második tengelyre nézve egymás tükörképei,
- (2)  $a_2 \neq 0$ : ekkor  $0 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ , vagyis az  $ABCD$  paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, és az Apollóniosz-görbét éppen ezen átlók egyenesei alkotják. ▼

Most vizsgáljuk meg az elfajult Apollóniosz-görbe párját!

**2.4. Tétel.** *Elfajult Apollóniosz-görbe  $\mathcal{A}$  párja nem elfajuló, és pontosan akkor áll elő alacsonyabb rendű görbék uniójaként, ha*

- (a) *a szakaszok paralelogrammája elfajuló, mely esetben*
  - (a1) *ha a szakaszok nem metszik egymást, akkor  $\mathcal{A}$  a szakaszok egyenese,*
  - (a2) *ha pedig a szakaszok metszik egymást, akkor  $\mathcal{A}$  a szakaszok egyenesének és a szakaszok paralelogrammájának középpontja körüli valamely körnek az uniója,*

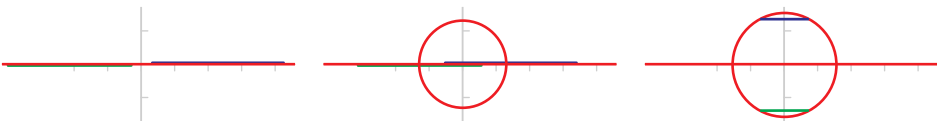
*vagy*

- (b) *a szakaszok paralelogrammája téglalap, mely esetben  $\mathcal{A}$  a téglalap köré írt körének és a szakaszokkal párhuzamos középvonalának az uniója.*

**Bizonyítás.** Az elfajult Apollóniosz-görbe egyenlete megfelelő koordináta-rendszerben (2.5), és ebben a koordináta-rendszerben az  $\mathcal{A}$  párjának egyenlete a nem degenerálódott (2.6).

Tegyük először fel, hogy a (2.6) egyenletben  $(2a_1 + 1)a_2 = 0$ . Ekkor az  $x_2((x_1^2 + x_2^2) - (a_2^2 - a_1^2 - a_1)) = 0$  egyenlethez jutunk.

Ha  $a_2 = 0$  és  $a_1 \in [-1, 0]$ , akkor az első tengely és az origó középpontú  $\sqrt{-a_1^2 - a_1}$  sugarú kör a megoldás. Ha  $a_2 = 0$  és  $a_1 \notin [-1, 0]$ , akkor csak az első tengely a megoldás. Ha  $(2a_1 + 1)a_2 = 0$  és  $a_2 \neq 0$ , akkor  $a_1 = -1/2$  és így az első tengely és az origó középpontú  $\sqrt{a_2^2 - a_1^2 - a_1} = \sqrt{a_2^2 + a_1^2}$  sugarú kör a megoldás.



Most azt tegyük fel, hogy a (2.6) egyenletben  $(2a_1 + 1)a_2 \neq 0$ .

Válasszunk egy olyan  $c > 0$  számot, melyre  $d := a_2^2 - a_1^2 - a_1 + c > 0$ . A (2.6) egyenletnek minden  $x_1$  esetén legfeljebb három és legalább egy megoldása van. Legyen ezen megoldások legnagyobbika  $x_2$  és tegyük fel, hogy  $x_2 > \sqrt{d}$ . Mivel az  $x_2^3$  együtthatója pozitív, bármely elegendően kicsi  $\varepsilon > 0$  esetén  $x_2 > \sqrt{d} + \varepsilon$  és

$$0 > (x_1^2 + (x_2 - \varepsilon)^2 + a_1^2 + a_1 - a_2^2)(x_2 - \varepsilon) - (2a_1 + 1)a_2x_1$$

teljesül, amiből  $x_2 > \varepsilon$  miatt  $0 > (x_1^2 + c)(x_2 - \varepsilon) - (2a_1 + 1)a_2x_1$ , vagyis  $x_2 < \varepsilon + (2a_1 + 1)a_2x_1/(x_1^2 + c)$  következik. Csakhogy ez biztosan nem teljesül ha  $|x_1|$  elegendően nagy és  $\varepsilon < \sqrt{d}/2$ , tehát *elegendően nagy  $x_1$  esetén feltételezésünkkel ellentétben  $|x_2| < \sqrt{d}$  teljesül.*

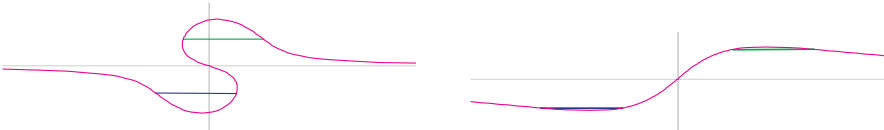
Ugyanezt a gondolatmenetet a legkisebb gyökre alkalmazva, azt kapjuk, hogy *a görbe a második koordinátában korlátos.*

Mivel a (2.6) egyenletben az  $x_2$  korlátos, azonnal látszik, hogy amennyiben  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ , az  $x_2$  nagyságából az  $x_1$  reciprokával  $(2a_1 + 1)a_2$ -arányosan tart a nullához.

Mivel a legfeljebb másodrendű görbék közül csak az egyenes, a parabola és a hiperbola nem korlátos [4], de ezek közül mindössze az egyenes férhet el egy egyenes sávban, az  $\mathcal{A}$  Apollóniosz-görbe csak egyenes lehetne. Ez az egyenes az aszimptoták miatt csakis az első koordináta-tengely lehet, de ez ellentmond annak, hogy az  $\mathcal{A}$  Apollóniosz-görbe pontosan csak az origóban metszi az első tengelyt, mert a (2.6) egyenletnek  $x_2 = 0$  mellett kizárólag  $x_1 = 0$  a megoldása.

Eszerint a  $(2a_1 + 1)a_2 \neq 0$  feltétel mellett az  $\mathcal{A}$  Apollóniosz-görbe nem tartalmazhat legfeljebb másodrendű görbét, ami tételünket bizonyítja. ■

Az  $\mathcal{A}$  Apollóniosz-görbe a második tengelyt az  $x_2(x_2^2 + a_1^2 + a_1 - a_2^2) = 0$  egyenlet megoldásaiban metszi, amiből már látható, hogy az Apollóniosz-görbe *nagyságából* a következő ábrán bemutatott két görbe egyikét mintázza az  $a_1^2 + a_1 - a_2^2$  előjelétől függően.



Világos, hogy a 2.4 tétel (a) esetében a kör (ha létezik) a komptikus része (a második tengellyel vett metszete egyben az ekvoptikusnak is része), míg a (b) esetben, a körnek a téglalap csúcsai által kijelölt négy íve közül csak a középvonalat metszők az ekvoptikus részei (a másik két ív a komptikus része).

### 3. Körívek nem elfajuló Apollóniosz-görbékben

Az elfajuló Apollóniosz-görbéket *nem* eredményező konfigurációknak az előző szakaszban végzetthez hasonló részletességű feltérképezése igen nagy munka lenne, de célunk ebben a cikkben mindössze azon konfigurációk meghatározása, amelyekhez tartozó Apollóniosz-görbék uniója körívet tartalmaz.

**3.1. Tétel.** *Ha két szakasz nem elfajuló  $\mathcal{A}$  Apollóniosz-görbéje tartalmaz egy kört, akkor  $\mathcal{A}$  ezen kör és egy egyenes uniója.*

**Bizonyítás.** Legyen a két szakasz  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$ , a kör pedig  $\mathcal{C}$ . Válasszuk a (2.4) egyenletben az  $O$  pontot úgy, hogy az a  $\mathcal{C}$  középpontjába essen, és tegyük fel, hogy a „ $-$ ” jelhez tartozó egyenlet adja az  $\mathcal{A}$  Apollóniosz-görbét. A „ $+$ ” esetén a bizonyítás analóg módon végezhető, ezért az érdeklődő olvasóra marad.

Legyen  $p_{\mathcal{A}}$  a „ $-$ ” jelhez tartozó (2.4) egyenlet nullára rendezésével nyert polinom. Ekkor a  $\mathcal{C}$  kör minden  $\mathbf{x}$  pontjára  $p_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = 0$ , amiért a

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{u}}(\lambda) &:= p_{\mathcal{A}}(\lambda \mathbf{u}) \\
 (3.1) \quad &= \lambda^3 \langle \mathbf{u}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle - \lambda^2 \langle \mathbf{u}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} + \mathbf{d} \rangle + \\
 &\quad + \lambda \langle \mathbf{u}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle + \\
 &\quad + (\lambda^3 \langle \mathbf{u}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle - \lambda^2 \langle \mathbf{u}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \\
 &\quad + \lambda \langle \mathbf{u}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle).
 \end{aligned}$$

polinomnak gyökei a  $\pm 1$  számok minden  $\mathbf{u}$  egységvektorra. Vezessük be az

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad e &= \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \\
 \mathbf{f} &= (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m},
 \end{aligned}$$

és az  $f = |\mathbf{f}|$  jelöléseket.

A (3.1) polinomra alkalmazva a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket<sup>3</sup>, azt látjuk, hogy  $e$  polinom harmadik  $\lambda_3$  gyökére  $1 \cdot (-1) \cdot (-\lambda_3) \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle = e$  teljesül.

Ha  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , akkor  $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$ , vagyis a szakaszok paralelogrammát alkotnak, így  $\mathcal{A}$  párja elfajuló, amiért tételünk állítását a 2.4 tétel igazolja.

Ha  $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ , akkor  $\lambda_3 = e / \langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle$ , amiből

$$(3.3) \quad p_{\mathbf{u}}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle - e) \quad (\text{és így } p_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = (|\mathbf{x}|^2 - 1)(\langle \mathbf{x}, \mathbf{f} \rangle - e) \text{ is})$$

következik.

---

<sup>3</sup>Viète formulák

Eszerint az  $\mathcal{A}$  Apollóniosz-görbe az origón  $\mathbf{u}$  irányba áthaladó egyenest a  $\pm \mathbf{u}$  pontokon kívül még pontosan a

$$P_{\mathcal{A}}(\mathbf{u}) := \frac{e}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle} \mathbf{u}$$

pontban metszi, kivéve az  $(\mathbf{f} \times \mathbf{m})/f$  irányt, melynek egyenesét nem metszi. Mint-hogy ezen pontokra  $\langle P_{\mathcal{A}}(\mathbf{u}), \mathbf{u}_f \rangle / f = e$  teljesül, ahol  $\mathbf{u}_f = \mathbf{f}/f$ , látható, hogy a  $P_{\mathcal{A}}$  pontok éppen az  $\mathbf{u}_f$  vektorra merőleges, a  $P_{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_f) = \frac{e}{f} \mathbf{u}_f$  ponton áthaladó egyenesre illeszkednek. Ez bizonyítja a tétel állítását. ■

**3.2. Tétel.** *Ha két szakasz nem elfajuló Apollóniosz-görbéje egy kör és egy egyenes uniója, akkor az egyenes átmegy a kör középpontján.*

**Bizonyítás.** Amennyiben a szakaszok paralelogrammát alkotnak, akkor az Apollóniosz-görbe párja elfajuló, így a 2.4 tétel szerint az (1) állítás teljesül.

A továbbiakban feltesszük, hogy a szakaszokból alkotott négyszög nem paralelogramma, amiből az is következik, hogy a másik Apollóniosz-görbék sem elfajuló.

Legyen a két szakasz  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$ , a vizsgálandó nem elfajuló Apollóniosz-görbék pedig  $\mathcal{A}$ , mely a  $\mathcal{C}$  kört és az  $\ell$  egyenest tartalmazza.

A következőkben az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontok elhelyezkedése szerinti esetekre bontva vizsgáljuk a bizonyítandó állítást. Mivel az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontok mindegyike rajta van az  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  szakaszok mindkét Apollóniosz-görbéjén, három esetet fogunk vizsgálni:

- (a) valamelyik szakasz az  $\ell$  egyenesre esik;
- (b) valamelyik szakasz végpontjai a  $\mathcal{C}$  körre esnek;
- (c) mindkét szakasz végpontjainak egyike az  $\ell$  egyenesre, másika a  $\mathcal{C}$  körre esik;

Ezek együttesen teljesen lefedik a lehetséges konfigurációkat.

- (a) *valamelyik szakasz az  $\ell$  egyenesre esik:*

Ekkor a másik szakasznak is az  $\ell$  egyenesre kell esnie, hiszen az Apollóniosz-görbe minden pontjából ugyanakkora, vagy kiegészítő szög alatt kell látszania, mint az  $\ell$  egyenesre eső szakasznak. Ez azt jelenti, hogy az  $ABCD$  négyszög szimmetrikus az  $\ell$  egyenesre, amiért a  $\mathcal{C}$  körnek is ilyennek kell lennie.

- (b) *valamelyik szakasz végpontjai a  $\mathcal{C}$  körre esnek:*

Mondjuk  $A, B \in \mathcal{C}$ . Ekkor a  $C$  és  $D$  pontoknak is a  $\mathcal{C}$  körre kell esnie, hiszen az Apollóniosz-görbe minden pontjából ugyanakkora, vagy kiegészítő szög alatt kell látszania az  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  szakaszoknak, és ez a szög a körön konstans, tehát  $\mathcal{C}$  a  $\overline{CD}$  szakasznak is látóköre.

Ez azt jelenti, hogy  $ABCD$  egy olyan húrnégyszög a  $\mathcal{C}$  körön, melyben az  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  szakaszok hossza megegyezik.

Ha az  $M_0 = AB \cap CD$  pont a  $\mathcal{C}$  körön van, akkor az  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  szakaszok egy-egy végpontja egybe esik az  $M_0$  ponttal. Amennyiben  $A = C$ , akkor  $O \in \ell$ , mert előbbi 3.1 tételünk (3.2) formulája szerint  $e = 0$ . Amennyiben  $A = D$ , akkor  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$  és (3.2) szerint  $\mathbf{f} = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} = |\mathbf{c} - \mathbf{b}| \mathbf{a}$ , valamint kicsit több számolással  $e = |\mathbf{c} - \mathbf{b}| \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ . Ez azt jelentené, hogy  $\ell = BC$ , de ez csak akkor fordulhat elő, ha a (3.3) szerinti  $p_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = 0$  egyenletben és a (2.4) képletek  $(-)$  előjelű egyenletében a megfelelő első- és másodfokú tagok együtthatói megegyeznek. Csakhogy a másodfokúak együtthatói ugyan megegyeznek, de az elsőfokúak nem, tehát ez az eset nem fordulhat elő.

Ha az  $M_0 = O$  a  $\mathcal{C}$  kör középpontja, akkor előbbi 3.1 tételünk (3.2) formulája szerint  $e = 0$ , vagyis az  $\ell$  egyenes átmegy az  $O$  ponton.

Ha  $M_0 \notin \mathcal{C} \cup \{O\}$ , akkor a konfiguráció szimmetrikus az  $OM_0$  egyenesre, ezért vagy  $\ell = OM_0$ , ami igazolja tételünk állítását, vagy  $\ell \perp OM_0$ , amit a továbbiakban feltételezünk. Ugyanakkor  $M_0 \notin \mathcal{C}$  miatt  $M_0 \in \ell$  is következik, tehát  $M_0 \in \ell \perp OM_0$ . Tekintettel a konfiguráció  $OM_0$  egyenesre való szimmetriájára, ekkor az  $M_0$  pont kis környezetében az  $\ell$  egyenes pontjaiban csakis úgy teljesülhet az  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  szakaszok látószögeinek azonossága vagy egymás kiegészítése, ha az  $AB$  és  $CD$  egyenes is merőleges az  $\ell$  egyenesre. Minthogy ez ellentmond a szakaszok különbözőségének, ez az eset nem fordulhat elő, ami teljessé teszi a tétel állításának igazolását a (b) esetben.

(c) *mindkét szakasz végpontjainak egyike az  $\ell$  egyenesre másika a  $\mathcal{C}$  körre esik:* Előbbi 3.1 tételünkéből tudjuk, hogy az  $\mathbf{f} = (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m}$  vektor merőleges az  $\ell$  egyenesre, így az

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{f} \rangle &= \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle \\ &= \langle (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{d}), \mathbf{m} \rangle = -\langle \mathbf{c} - \mathbf{d}, \mathbf{f} \rangle \end{aligned}$$

egyenlőség igazolja, hogy a szakaszok merőleges vetületei az  $\ell$  egyenesre ortogonális irányba azonos hosszúságúak.

A szakaszoknak nem az egyenesre eső végpontjait összekötő egyenes merőleges az  $\ell$  egyenesre, mert mindkét ilyen végpont  $\ell$  egyenesre eső merőleges vetületi pontjából mindkét szakasznak derékszög alatt kell látszania.

Két utóbbi megfigyelésünkéből következik, hogy a szakaszoknak azon végpontjai, melyek nem az egyenesre esnek, vagy egymásnak az egyenesre vett tükörképei, vagy egybe esnek.

Ha az  $A$  és  $C$  pontok vannak az  $\ell$  egyenesen, akkor (3.4) egyenletből nyert  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{b} + \mathbf{d}, \mathbf{f} \rangle$  egyenlőség szerint a  $B$  és  $D$  pontok az  $\ell$  egyenesnek különböző

oldalán vannak és az iménti megfigyelésünk miatt a  $\overline{BD}$  szakasz merőlegesen metszi az  $\ell$  egyenest. Tehát az  $\ell$  egyenes a  $\mathcal{C}$  kör  $\overline{BD}$  húrjának szakaszfelező merőlegese, ami igazolja a tétel állítását.

Ha az  $A$  és  $D$  pontok vannak az  $\ell$  egyenesen, akkor a (3.4) egyenletből nyert  $\langle \mathbf{a} - \mathbf{d}, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{f} \rangle$  egyenlőség szerint a  $B$  és  $C$  pontok az  $\ell$  egyenesnek ugyanazon oldalán vannak, így a vetületeik egybeesése miatt  $B = C$ . Ha a  $CD$  egyenes a  $\mathcal{C}$  és  $D$  pontoktól különböző  $C' \in CD \cap \mathcal{C}$  pontban is metszi a  $\mathcal{C}$  kört, akkor az  $\overline{AB}$  szakasz nulla vagy  $180^\circ$  fok alatt látszódik a  $C'$  pontból is, vagy  $C' \in \{A, B\}$ . Mivel  $B = C$ , előbbi esetből a két szakasz egybeesése következik, ami kizárt, tehát  $C' \in \{A, B\}$ . Minthogy  $C' \notin \{C, D\}$  és  $B = C$ , ebből  $C' = A$  adódik, és ez visszavezet a (b) pontban már vizsgált esethez. Tehát a  $CD \cap \mathcal{C} \subseteq \{C, D\}$  és ugyanezzel az indoklással  $AB \cap \mathcal{C} \subseteq \{A, B\}$ . Ha az  $AB$  és a  $CD$  egyenes is a  $\mathcal{C}$  érintője, akkor az  $AB = CD$  ellentmondásra jutunk. Ha az  $AB$  egyenes a  $\mathcal{C}$  érintője, a  $\overline{CD}$  szakasz viszont a  $\mathcal{C}$  húrja, vagy fordítva, akkor is ellentmondásra jutunk, hiszen a húrt alkotó szakasz látószöge a  $\mathcal{C}$  körön állandó, a másik szakasz látószöge viszont nem állandó, így nem lehetnek egyformák. Ha az  $\overline{AB}$  és a  $\overline{CD}$  szakasz is a  $\mathcal{C}$  húrja, akkor ismét visszajutottunk a (b) pontban már vizsgált esethez.

Ezzel a tétel állítását teljesen igazoltuk. ■

**3.3. Tétel.** *Két szakasz nem elfajuló Apollóniosz-görbéje akkor és csak akkor egy kör és egy egyenes uniója, ha a szakaszok*

- (1) *egymás tükröképei az egyenesre nézve, vagy*
- (2) *az egyenesre szimmetrikus valamely deltoid szemközti oldalai, vagy*
- (3) *az egyenesre esnek bizonyos helyzetek egyikében.*

**Bizonyítás.** Amennyiben a szakaszok paralelogrammát alkotnak, akkor az Apollóniosz-görbe párja elfajuló, így a 2.4 tétel szerint mostani állításunk (1) vagy (3) konfigurációi fordulhatnak elő. Előbbi konfiguráció konkrétan szerepel a 2.4 tételben, utóbbi részletes kalkulációját itt fogjuk megadni.

Legyen a két szakasz  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$ , a vizsgálandó nem elfajuló Apollóniosz-görbéjük pedig  $\mathcal{A}$ , mely a  $\mathcal{C}$  kört és az előbbi 3.2 tételünk szerint annak középpontján áthaladó  $\ell$  egyenest tartalmazza. Ahogy eddig, most is a  $\mathcal{C}$  kör középpontjába helyezzük az  $O$  pontot, de most rögzítsük azt a koordináta-rendszert is, melynek origója  $O$  és első („ $x$ ”-)tengelye az  $\ell$  egyenes.

Tudjuk, hogy a szakaszok végpontjai az  $\mathcal{A}$  Apollóniosz-görbén vannak. Az ezek elhelyezkedései szerinti eseteket külön-külön vizsgáljuk:

- (a) *valamelyik szakasz az  $\ell$  egyenesre esik;*
- (b) *valamelyik szakasz a  $\mathcal{C}$  körre esik;*
- (c) *mindkét szakasz végpontjainak egyike az  $\ell$  egyenesre másika a  $\mathcal{C}$  körre esik.*

Ahol szükséges, ott tovább bontjuk az eset vizsgálatát aszerint, hogy az ekvoptikus  $M_0 = AB \cap CD$  pont az  $\mathcal{A}$  Apollóniosz-görbe mely részére esik.

(a) *valamelyik szakasz az  $\ell$  egyenesre esik:*

Ekkor a másik szakasznak is az  $\ell$  egyenesre kell esnie, vagyis  $A, B, C, D \in \ell$ . Mint-hogy ekkor az  $A, B, C, D$  pontba mutató helyvektorok az  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$  egységvektor valós számmal vett többszörösei, legyenek az  $a, b, c$  és  $d$  valós számok olyanok, hogy  $\mathbf{a} = a\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{b} = b\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{c} = c\mathbf{v}$  és  $\mathbf{d} = d\mathbf{v}$ . Ezekkel a (2.4) egyenlet az

$$\begin{aligned} (a-b)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \times \mathbf{m} \rangle (|\mathbf{x}|^2 - (c+d)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + cd) \\ = \pm(c-d)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \times \mathbf{m} \rangle (|\mathbf{x}|^2 - (a+b)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + ab) \end{aligned}$$

formát ölti. Ebből világos, hogy mindkét Apollóniosz-görbének része az  $\ell$  egyenes. Ha egy Apollóniosz-görbe valamely  $X$  pontja nincs az  $\ell$  egyenesen, akkor az

$$\begin{aligned} 0 &= (a-b-(c-d))|\mathbf{x}|^2 - 2(da-bc)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + (a-b)cd - (c-d)ab \\ 0 &= (a-b+(c-d))|\mathbf{x}|^2 - 2(ac-db)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + (a-b)cd + (c-d)ab \end{aligned}$$

egyenletek egyikét teljesíti.

Ha a szakaszok hosszai megegyeznek, mondjuk  $a-b=c-d$ , akkor az egyik, jelen feltételezésünk szerint az első Apollóniosz-görbe elfajul. Ennek egyenlete emiatt  $2(a-c)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = ab-cd$  alakúvá válik, ami a szakaszok különbözősége esetén a második koordináta-tengellyel párhuzamos  $x_1 = \frac{(ab-cd)}{2(a-c)}$  egyenletű egyenest adja. A második Apollóniosz-görbe egyenlete  $0 = (a-b)(|\mathbf{x}|^2 - (c+b)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + \frac{cd+ab}{2})$  alakúvá válik, ami nem nulla hosszúságú szakaszok esetén a

$$0 = \left(x_1 - \frac{c+b}{2}\right)^2 + x_2^2 + \frac{cd+ab}{2} - \left(\frac{c+b}{2}\right)^2$$

egyenletű kört adja. Ez akkor és csak akkor esik egybe a  $\mathcal{C}$  körrel, ha  $c+b=0$  és  $-2 = cd+ab = c(d-a) = 2cd$ . Eszerint a két azonos hosszúságú szakasz egymás tükörképe az origóra, és az origó osztja őket két részre, hogy a részek hosszainak szorzata a kör sugara, vagyis  $1^4$ .

Ha a szakaszok hosszai nem egyeznek meg, akkor mindkét Apollóniosz-görbe kört tartalmaz az  $\ell$  egyenesen kívül, melyek egyenlete

$$\begin{aligned} 0 &= x_2^2 + \left(x_1 - \frac{da-bc}{h}\right)^2 + \frac{(a-b)cd - (c-d)ab}{h} - \left(\frac{da-bc}{h}\right)^2, \\ 0 &= x_2^2 + \left(x_1 - \frac{ac-db}{k}\right)^2 + \frac{(a-b)cd + (c-d)ab}{k} - \left(\frac{ac-db}{k}\right)^2, \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Ez a számítás felfogható a 2.4 tétel (a2) esete részletesebb meghatározásaként

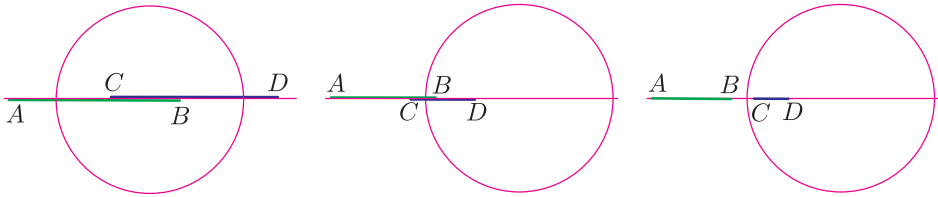
ahol  $h = a - b - (c - d)$  és  $k = a - b + (c - d)$ . Ezek akkor és csak akkor esnek egybe a  $\mathcal{C}$  körrel, ha rendre  $da - bc = 0$  és  $-h = (a - b)cd - (c - d)ab = ad(c + b) - bc(d + a) = bc(c + b - (d + a)) = -hbc$ , vagyis  $ad = bc = 1$ , illetve  $ac = bd = 1$ . Ezek a feltételek egyszerre csak nulla hosszúságú szakaszok esetén teljesülhetnek, de ezt az esetet kizártuk.

Összefoglalva a találatokat, az  $\ell$  egyenesre illeszkedő szakaszoknak az egyik Apollóniosz-görbéje pontosan akkor tartalmazza a  $\mathcal{C}$  egységkört, ha

(a.1) azonos hosszúságúak és  $ab = cd = -1$ , vagy

(a.2) különböző hosszúságúak és  $ad = bc = 1$  vagy  $ac = bd = 1$ .

Utóbbi esetben a másik Apollóniosz-görbe is az  $\ell$  egyenest, de egy másik kört tartalmaz. ( $\Rightarrow(3)$ )



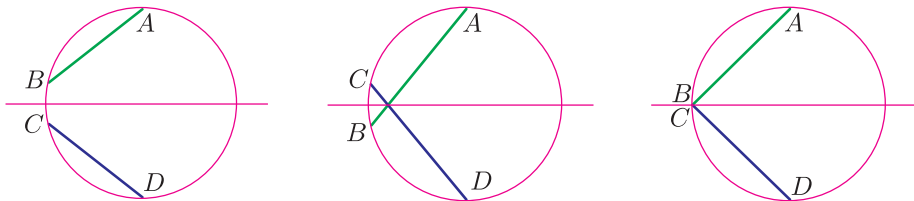
(b) valamelyik szakasz a  $\mathcal{C}$  körre esik:

Mondjuk  $A, B \in \mathcal{C}$ . Ekkor a  $C$  és  $D$  pontoknak is a  $\mathcal{C}$  körre kell esnie, hiszen az Apollóniosz-görbe minden pontjából ugyanakkora, vagy kiegészítő szög alatt kell látszania az  $\overline{AB}$  és  $\overline{CD}$  szakaszoknak, és ez a szög a kör ívein konstans, tehát  $\mathcal{C}$  a  $\overline{CD}$  szakasznak is látóköre, és a két szakasz a középpontból egyenlő szögek alatt látszik.

Előbbi, 3.2 tételünkéből tudjuk, hogy a szakaszoknak a második koordináta-tengelyre vett vetületei azonos hosszúságúak. Mivel hosszuk is egyforma, szakaszainknak az első koordináta-tengelyre vett vetületei is azonos hosszúságúak, tehát egymás tükörképei vagy az  $\ell$  egyenesre (első koordináta-tengely), vagy a  $\mathcal{C} \cap \ell$  szakaszfelező  $\ell^\perp$  merőlegesére (második koordináta-tengely), vagy a  $\mathcal{C}$  kör  $O$  középpontjára.

Ha az  $M_0$  egy ideális pont, akkor a szakaszok egymás tükörképei az  $O$  pontra. Ha  $(AB \cap \ell) \notin \{A, B\}$ , akkor a  $P := AB \cap \ell$  pontban a  $\overline{CD}$  szakasz látószöge  $0^\circ$  vagy  $180^\circ$ , amiért  $P \in \overline{CD}$ , amiből az  $AB$  és  $CD$  egyenesek párhuzamossága miatt  $AB = CD$  és így az  $\overline{AB} = \overline{CD}$  ellentmondás adódik. Tehát  $P \in \{A, B\}$  és  $Q := (CD \cap \ell) \in \{C, D\}$ , és akkor a  $\overline{PQ}$  szakasz a  $\mathcal{C}$  kör átmérője. Mondjuk  $P = B$  és  $Q = C$ . Ekkor az  $A$  és  $D$  pontok  $\ell$  egyenesre eső merőlege vetületei egybe kell essenek, ezért a  $\overline{BD}$  szakasznak  $\ell$  a felezőmerőlegese. Eszerint  $ABCD$  egy négyzet, így a 2.4 tétel bizonyítja, hogy az  $\ell$  egyenes és a  $\mathcal{C}$  kör nem tartozik a szakaszaink ugyanazon Apollóniosz-görbéjéhez, vagyis ez az eset nem fordulhat elő.

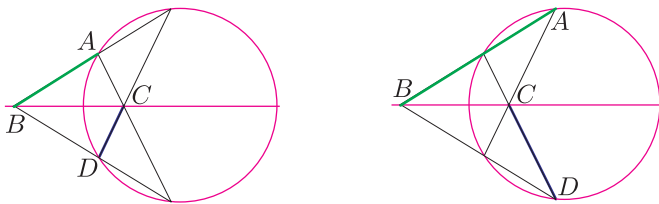
Ha  $M_0 \in \ell$ , akkor a szakaszok egymás tükörképei az  $\ell$  egyenesre.



Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor  $\ell$  és  $C$  valóban egy Apollóniosz-görbét alkot, ami a korábban már említett elfajuló esettel együtt teljesen bizonyítja tételünk állításának (1) konfigurációban leírt esetét. ( $\Rightarrow(1)$ )

Ha  $M_0 \notin \ell$ , akkor  $M_0$  a  $C$  körön van, így a két szakasz egy-egy végpontjával esik egybe. Mondjuk  $M_0 = B = C$ . Ha  $(AB \cap \ell) \notin \overline{AB}$ , akkor az  $AB \cap \ell$  pontban a  $\overline{CD}$  szakasz látószöge  $0^\circ$  vagy  $180^\circ$ , amiért  $(AB \cap \ell) \in \overline{CD}$ , és így a  $CD$  és  $AB$  egyenesek két pontban is metszik egymást, vagyis egybeesnek. Ez ellentmond a szakaszok különbözőségének, tehát  $(AB \cap \ell) \in \overline{AB}$  és  $(CD \cap \ell) \in \overline{CD}$ , vagyis  $\{A, D\} = C \cap \ell$ . Előbbi 3.2 tétel (b) pontja első esetének bizonyításából tudjuk, hogy ebben a konfigurációban az  $\ell$  egyenes és a  $C$  kör nem ugyanazon Apollóniosz-görbéhez tartozik, tehát ez az eset nem fordulhat elő.

(c) *mindkét szakasz végpontjainak egyike az  $\ell$  egyenesre másika a  $C$  körre esik:* Előbbi 3.2 tételünk szerint ekkor a szakaszok az  $\ell$  egyenesre szimmetrikus deltoid szemközti oldalai. Ebből következik, hogy az  $M_0 = AB \cap CD$  pont nem lehet az  $\ell$  egyenesen, így a  $C$  körön van. Ugyanakkor az ekvoptikus  $M_+ = AC \cap BD$  pont az  $M_0$  tükörképe az  $\ell$  egyenesre, tehát  $M_+$  is a  $C$  körre esik.



Tegyük fel először, hogy  $M_0$  nincs az  $\overline{AB}$  szakaszon. Ekkor az  $M_0$ ,  $A$ ,  $D$  és  $M_+$  pontok négy ívre bontják a  $C$  kört, melyek felváltva az ekvoptikus illetve a komptikus részei. Ennek bizonyítása minden íven hasonlóan történik, ezért itt most csak arról az  $\widehat{M_+M_0}$  körívről mutatjuk meg, hogy az ekvoptikus része, amelynek nem pontja se  $A$  se  $D$ .

Legyen  $C \cap \ell = \{S, T\}$ , ahol  $S$  a  $B$  ponthoz közelebbi metszéspont. Az  $M_0S$  egyenes felezi a  $BM_0C$  szöveget, mert az  $S$  pont felezi az  $\widehat{AD}$  ívet. Ez azt jelenti, hogy a  $C$  kör a  $\overline{BC}$  szakasz Apollóniosz-köre. Emiatt tetszőleges  $P \in \widehat{M_0M_+}$  pontra

$BPS\triangleleft = SPC\triangleleft$ , másrészt  $APS\triangleleft = SPD\triangleleft$ , hiszen az  $S$  pont felezi az  $\widehat{AD}$  ívet. Eszerint

$$APB\triangleleft = APS\triangleleft - BPS\triangleleft = SPD\triangleleft - SPC\triangleleft = CPD\triangleleft,$$

ami igazolja, hogy az  $\widehat{M_0M_-}$  körív az ekvoptikus része.

Ha  $M_0 \in \overline{AB}$ , akkor a bizonyítás a fentiekkel analóg módon végezhető. ( $\Rightarrow(2)$ )  
A bizonyítást ezzel befejeztük. ■

A bizonyítás (a.1) és (a.2) eredményének fényében felvetődik a kérdés, hogy egy  $\ell$  egyenesen lévő  $h$  és  $k$  hosszúságú szakaszok milyen elhelyezkedése mellett van olyan kör, melyről a szakaszok azonos vagy kiegészítő szög alatt látszanak. A válasz megkeresése ezúttal az érdeklődő olvasóra marad azzal az utalással, hogy az  $O$  pont jó megválasztása alapvetően könnyíti meg a munkát.

A szakaszok ekvoptikusainak vizsgálatát, a kúpszeletek ekvoptikusainak vizsgálata követheti, amely irányba tett lépésekről Odehnal [6] és [7] cikkében lehet tájékozódni.

Végül megemlíjtjük, hogy tételeink lehetővé teszik a [2] cikkben közölt eredmények analízis nélküli bizonyítását, sőt azok jelentős általánosítását is [5].

## Hivatkozások

- [1] E. BRIESKORN and H. KNÖRRER, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.
- [2] KINCSES J. és KURUSA Á., Felismerhető-e egy alakzat az árnyékképeiből?, *Polygon*, **2** (1991), 69–80.
- [3] KURUSA Á., Kúpszeletek izoptikusai, *Polygon*, **19:2** (2011), 27–46.
- [4] KURUSA Á., *Euklidészi geometria*, Polygon, Szeged, 2008.
- [5] KURUSA Á., Visual distinguishability of polygons, *Beiträge zur Alg. und Geom.* (2012), DOI: 10.1007/s13366-012-0121-7.
- [6] B. ODENHAL, Equioptic curves of conic sections, *J. Geom. Graphics*, **14:1** (2010), 29–43.
- [7] B. ODENHAL, Equioptic points of a triangle, *14th International Conference on Geometry and Graphics*, International Society for Geometry and Graphics, Kyoto, 2010.
- [8] P. PAMFILOS and A. THOMA, Apollonian cubics: An application of group theory to a problem in Euclidean geometry, *Mathematics Magazine*, **72** (1999), 356–366.
- [9] P. PAMFILOS, *Theory of Isoptic cubics*, Help in Isoptikon software, <http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/#iso> címen, 1998.

KURUSA Á., Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.; e-mail: kurusa@math.u-szeged.hu