

Kúpszeletek izoptikusai

KURUSA ÁRPÁD

Absztrakt. Azon pontok halmaza, amelyekben egy görbe két érintője valamely konstans ν szög alatt metszi egymást, a görbe ν -izoptikusa, melyet $\nu = \pi/2$ esetén *ortoptikusnak* neveznek. A kúpszeletek izoptikusainak meghatározásához egy érdekes görbe-transzformációt vizsgálunk, amivel igazoljuk, hogy az ellipszis és hiperbola ortoptikusa kör, a parabola ortoptikusa egyenes. A kör minden izoptikusa kör, a parabola minden izoptikusa hiperbola, a hiperbola és elipszis nem ortoptikus izoptikusai pedig negyedrendű görbék, melyek nem feltétlenül konvexek.

1. Bevezető

Az izoptikusok meghatározása meglepően régi területe a geometriának. La Hire már 1704-ben vizsgálta a cikloidok¹⁾ izoptikusait, Chasles pedig 1837-ben tanulmányozta a kúpszeletek és epitrokloidok²⁾ izoptikusait.

Az izoptikusok 1950-ben merültek fel újra, amikor J. W. Green bizonyította [1], hogy amennyiben egy korlátos, differenciálható, konvex görbe ν -izoptikus görbéje kör, és $1 - \nu/\pi$ irracionális, vagy legegyszerűbb alakjában páros számlálójú törtszám, akkor a görbe csakis egy kör lehet. Az is kiderült, hogy ha $1 - \nu/\pi$ legegyszerűbb alakjában páratlan számlálójú törtszám, akkor számos, a körlaptól különböző korlátos konvex görbe létezik, melynek ν -izoptikus görbéje kör.³⁾ Ezek között a legérdekesebb észrevétel, hogy minden ellipszis ortoptikusa kör [6]. Ez motiválta jelen cikk vizsgálatait.

Cikkünkben a kúpszeletek⁴⁾ és konfokális kúpszeletpárok ortoptikusait egy ezen esetben elemi úton is kezelhető görbe-transzformáció vizsgálatával határozzuk

¹⁾ A cikloid egy egyenesen gördülő kör valamely pontjának nyoma.

²⁾ Az epitrokloid egy kör külsején gördülő kör valamely pontjának nyoma.

³⁾ M. S. Klamkin 38 évvel később vetette fel a kérdést [2], hogy amennyiben egy szép görbe két izoptikusa egymással koncentrikus kör, akkor következik e, hogy a test egy körlap. Ezt két évvel később J. C. C. Nitsche bizonyította be [7].

⁴⁾ Ezek itt használt tulajdonságait ismertnek tételezzük fel, de szükség esetén megtalálhatóak a [4], [6] és más publikációkban.

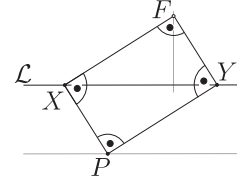
meg, majd, általánosítva e görbe-transzformációt és analitikus módszereket is bevetve, kiszámoljuk a kúpszeletek nem ortoptikus izoptikusait is.

2. A görbe-transzformáció

Legyen adott egy $\mathcal{G}$ görbe és egy nem ezen lévő F pont. Azon P pontok $T_F(\mathcal{G})$ halmazát, melyekhez van a $\mathcal{G}$ görbén olyan X és Y pont, hogy $FXPY$ téglalapot alkot, a $\mathcal{G}$ görbe *tégla-transzformáltjának* nevezzük.

2.1. Lemma. *Legyen az F pont az $\mathcal{L}$ egyenestől $c > 0$ távolságra.*

Ekkor a $T_F(\mathcal{L})$ halmaz az F ponttól $2c$ távolságra, az $\mathcal{L}$ egyenes másik oldalán, azzal párhuzamosan elhelyezkedő $\mathcal{H}$ egyenes.



Bizonyítás. Legyen a $\mathcal{H}$ egyenes az $\mathcal{L}$ egyenesnek az F középpontból vett kétszeresére nagyított képe. Az $FXPY$ téglalap átlói közül $\overline{XY}$ az $\mathcal{L}$ egyenesen van, és ez éppen felezi az $\overline{FP}$ átlót, így P az $\mathcal{L}$ egyenesnek az F középpontból vett kétszeresére nagyított $\mathcal{H}$ képén van, tehát $T_F(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{H}$. Ha a P pont a $\mathcal{H}$ egyenesen van, akkor az $\overline{FP}$ szakasz Thalesz-köre a középpontján átmenő $\mathcal{L}$ egyenest éppen kettő átlellenes pontban metszi, vagyis $P \in T_F(\mathcal{L})$, tehát $\mathcal{H} \subseteq T_F(\mathcal{L})$. Ez igazolja a tételt. ■

A kör tégla-transzformáltjának meghatározásához kell a következő.

Segédlemma. *Bármely O pont és $FXPY$ téglalap esetén*

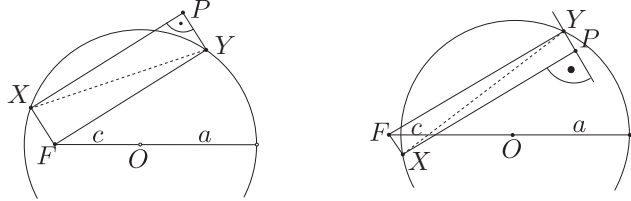
$$|\overrightarrow{OF}|^2 + |\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OX}|^2 + |\overrightarrow{OY}|^2.$$

Bizonyítás. Mivel az $FXPY$ téglalap átlói egyenlőek, oldalai pedig merőlegesek egymásra

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OF}|^2 &= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}|^2 + 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OF} \rangle = |\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY}|^2 + 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OF} \rangle \\ &= |\overrightarrow{OX}|^2 + |\overrightarrow{OY}|^2 + 2(\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OF} \rangle - \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle) \\ &= |\overrightarrow{OX}|^2 + |\overrightarrow{OY}|^2 + 2(\langle \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{FX}, \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{FX} \rangle - \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle) \\ &= |\overrightarrow{OX}|^2 + |\overrightarrow{OY}|^2 + 2(\langle \overrightarrow{YX}, \overrightarrow{FX} \rangle - \langle \overrightarrow{FX}, \overrightarrow{FX} \rangle) \\ &= |\overrightarrow{OX}|^2 + |\overrightarrow{OY}|^2 + 2\langle \overrightarrow{YF}, \overrightarrow{FX} \rangle = |\overrightarrow{OX}|^2 + |\overrightarrow{OY}|^2, \end{aligned}$$

ami⁵⁾ bizonyítja az állítást. ■

2.2. Lemma. Legyen $\mathcal{C}$ az O középpontú a sugarú kör, az F pedig egy pont az O ponttól $c \neq a$ távolságra. Ekkor $T_F(\mathcal{C})$ egy O középpontú, $\sqrt{2a^2 - c^2}$ sugarú⁶⁾ kör.



Bizonyítás. A Segédlemma értelmében $|\vec{OP}|^2 + |\vec{OF}|^2 = |\vec{OX}|^2 + |\vec{OY}|^2 = 2a^2$, amiért $|\vec{OP}| = \sqrt{2a^2 - c^2}$, tehát $T_F(\mathcal{C})$ az O középpontú, $\sqrt{2a^2 - c^2}$ sugarú kör része.

Ha a P pont rajta van az O középpontú, $\sqrt{2a^2 - c^2}$ sugarú körön, akkor az F és P pontok közül pontosan az egyik belső, a másik külső pontja a $\mathcal{C}$ körnek, és az $\overline{FP}$ szakasz fölé emelt $\mathcal{T}$ Thalesz-kör középpontja nem esik az O pontba, mert

$$\begin{aligned} |\vec{OP} + \vec{OF}|^2 &= |\vec{OP}|^2 + |\vec{OF}|^2 + 2\langle \vec{OP}, \vec{OF} \rangle \\ &\geq 2a^2 - 2c\sqrt{2a^2 - c^2} = (\sqrt{2a^2 - c^2} - c)^2 > 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{T} \cap \mathcal{C}$ pontosan kettő pontból áll, ami bizonyítja, hogy az O középpontú, $\sqrt{2a^2 - c^2}$ sugarú kör a $T_F(\mathcal{C})$ halmaz része.

Ezzel az állítást beláttuk. ■

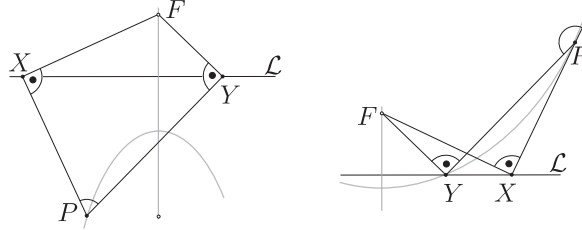
A téгла-transzformáció további görbékre való vizsgálata helyett⁷⁾ célirányosan általánosítjuk: Legyen adott egy $\mathcal{G}$ görbe és egy nem ezen lévő F pont. Azon P pontok $T_F^\nu(\mathcal{G})$ halmazát, melyekhez van a $\mathcal{G}$ görbén olyan X és Y pont, hogy $\angle PFX = \angle PFY = \pi/2$, valamint a PX és PY egyenesek által alkotott négy szögtartomány közül az F pontot tartalmazó szöge ν , a $\mathcal{G}$ görbe ν -téгла-transzformáltjának nevezzük. Világos, hogy a $(\pi/2)$ -téгла- és a téгла-transzformáció ugyanazt jelenti.

⁵⁾ E cikkben a manapság megszokott $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jelet használjuk a skaláris szorzás jelölésére.

⁶⁾ Ha $c > a\sqrt{2}$, akkor $T_F(\mathcal{C})$ üres halmaz.

⁷⁾ Később, az 5.1 tételben, a konfokális kúpszeletek vizsgálatakor még visszatérünk a téгла-transzformációra.

2.3. Tétel. Legyen az F pont az $\mathcal{L}$ egyenestől $c > 0$ távolságra, és $\nu \in (0, \pi)$ nem $\pi/2$. Ekkor $T_F^\nu(\mathcal{L})$ az $(F, \mathcal{L})$ fókusz-vezéregyenes pároshoz tartozó hiperbolának az ága, amelynek az F pont a konvex részébe esik vagy se aszerint, hogy $\nu > \pi/2$ vagy $\nu < \pi/2$.



Bizonyítás. Legyen T az F merőleges vetülete az $\mathcal{L}$ egyenesre. A $T_F^\nu(\mathcal{L})$ minden P pontjához legyen X_P és Y_P az $\mathcal{L}$ egyenes két olyan pontja, melyre $\angle X_P F P = \angle Y_P F P = \pi/2$. Ezeket sorrendtől eltekintve egyértelműen meghatározza az $\overline{FP}$ szakaszra szerkesztett Thalesz-kör.

A pontoknak a Thalesz-körön való elhelyezkedéseit vizsgálva az alábbiak adódnak:

- (ℓ_1) Ha $\nu > \pi/2$ és az X_P és Y_P pontok az FP egyenes különböző oldalaira esnek, akkor az $\overline{FP}$ szakasz metszi az $\mathcal{L}$ egyenest, amiért az $\angle X_P P Y_P$ négyszög konvex, így $\angle X_P F Y_P = \pi - \nu < \pi/2$. Ekkor a P pont az $\mathcal{L}$ egyenesnek az F ponttal ellentétes oldalára (ezt a továbbiakban $\mathcal{L}_F$ jelöli) esik.
- (ℓ_2) Ha $\nu > \pi/2$ és az X_P és Y_P pontok az FP egyenes ugyanazon oldalára esnek, akkor az $\overline{FP}$ szakasz nem metszi az $\mathcal{L}$ egyenest, amiért az $\angle X_P P Y_P$ négyszög konkáv, így $\angle X_P F Y_P = \pi - \nu < \pi/2$. Ekkor a P pont az $\mathcal{L}$ egyenesnek az F ponttal azonos oldalára (ezt a továbbiakban $\mathcal{L}^F$ jelöli) esik.
- (ℓ_3) Ha $\nu < \pi/2$ és az X_P és Y_P pontok az FP egyenes különböző oldalaira esnek, akkor az $\overline{FP}$ szakasz metszi az $\mathcal{L}$ egyenest, amiért az $\angle X_P P Y_P$ négyszög konvex, így $\angle X_P F Y_P = \pi - \nu > \pi/2$. Ekkor $P \in \mathcal{L}_F$.
- (ℓ_4) Ha $\nu < \pi/2$ és az X_P és Y_P pontok az FP egyenes ugyanazon oldalára esnek, akkor az $\overline{FP}$ szakasz nem metszi az $\mathcal{L}$ egyenest, amiért az $\angle X_P P Y_P$ négyszög konkáv, így $\angle X_P F Y_P = \pi - \nu > \pi/2$, ami lehetetlen, mert az X_P és Y_P pontok az FP egyenes ugyanazon oldalára esnek. Ilyen P pont tehát nincs.

Ezek szerint, ha $P \in T_F^\nu(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}$, vagyis a P egybeesik az X_P és Y_P pontok egyikével, miközben az X_P és Y_P pontok másika a T pontba esik, akkor $\nu > \pi/2$ és $\angle X_P F Y_P = \pi - \nu < \pi/2$. A T csúcsánál derékszögű $FTP\Delta$ háromszögnek tehát két lehetséges elhelyezkedése van, vagyis a $T_F^\nu(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}$ metszetnek két eleme van, mondjuk a Z_{-1} és Z_{+1} pont, melyek $c \operatorname{tg}(\pi - \nu) = c |\operatorname{tg} \nu|$ távolságra vannak a T

ponttól. (Ha $\nu \rightarrow \pi/2$, akkor eszerint e metszéspontok az $\mathcal{L}$ egyenes végtelen távoli „végei” felé tartanak.)

Elsőként a $\nu < \pi/2$ esetet vizsgáljuk. Ilyenkor $T_F^\nu(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}_F$ és $T_F^\nu(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Ebben az esetben az X_P , Y_P és P pontok bármelyike meghatározza a másik kettőt.

Válasszuk úgy a koordinátázást, hogy $F = (c, 0)$, az $\mathcal{L}$ egyenes az y -tengely, $X_P = (0, s)$ és $Y_P = (0, t)$. Ekkor az FX_P egyenes irányvektora $(-c, s)$, az FY_P egyenes irányvektora pedig $(-c, t)$. Minthogy e két egyenes $\pi - \nu$ szöget zár be, azt kapjuk, hogy

$$(2.1) \quad -\cos \nu = \cos(\pi - \nu) = \frac{\langle (-c, s), (-c, t) \rangle}{\sqrt{c^2 + s^2} \sqrt{c^2 + t^2}} = \frac{c^2 + st}{\sqrt{c^2 + s^2} \sqrt{c^2 + t^2}}.$$

Az X_PP és Y_PP egyenesek normálisai éppen az FX_P és FY_P egyenesek irányvektorai, amiért egyenleteik rendre

$$\begin{aligned} -cx + sy &= \langle (-c, s), (x, y) \rangle = \langle (-c, s), (0, s) \rangle = s^2, \\ -cx + ty &= \langle (-c, t), (x, y) \rangle = \langle (-c, t), (0, t) \rangle = t^2. \end{aligned}$$

Ezek közös megoldása a $P = (x, y)$ pont, amiből különbség képzéssel $(s - t)y = s^2 - t^2$, vagyis $y = s + t$ adódik⁸⁾, amiért $x = st/c$.

A (2.1) egyenletet négyzetre emelve, majd megszorozva a $(c^2 + s^2)(c^2 + t^2)$ szorzattal adódik, hogy

$$(c^2 + s^2)(c^2 + t^2) \cos^2 \nu = (c^2 + st)^2,$$

ahonnan a szorzásokat elvégezve, és utána a $\cos^2 \nu + \sin^2 \nu = 1$ azonosságot használva

$$c^2(s^2 + t^2) \cos^2 \nu = (c^4 + s^2 t^2) \sin^2 \nu + 2c^2 st (\cos^2 \nu + \sin^2 \nu),$$

következik, amit átrendezés után mindkét oldalon teljes négyzetté alakítva az

$$(2.2) \quad c^2(s - t)^2 \cos^2 \nu = (c^2 + st)^2 \sin^2 \nu,$$

egyenlethez jutunk.

A $P = (x, y)$ pont koordinátáinak az s és t paraméterekből való kifejezése, valamint a (2.2) egyenlet segítségével az

$$\begin{aligned} (2.3) \quad (y^2 - 4cx) \operatorname{ctg}^2 \nu &= \left((s + t)^2 - 4c \frac{st}{c} \right) \frac{(c^2 + st)^2}{c^2 (s - t)^2} = \frac{(c^2 + st)^2}{c^2} \\ &= \left(c + \frac{st}{c} \right)^2 = (c + x)^2 \end{aligned}$$

⁸⁾ $s \neq t$, hiszen X_P és Y_P az FP különböző oldalán van!

egyenlet adódik. Ebből egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$\left(\frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} c + x\right)^2 - \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \nu} = 4c^2 \frac{\cos^2 \nu}{\sin^4 \nu},$$

vagyis ez egy hiperbola egyik ága.

Ennek az x -tengellyel vett metszeteiben

$$x = \pm 2c \frac{\cos \nu}{\sin^2 \nu} - \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} c = -c \frac{1 + \cos^2 \nu \mp 2 \cos \nu}{\sin^2 \nu} = -c \frac{(1 \mp \cos \nu)^2}{\sin^2 \nu}$$

(ezek közül a vizsgált ágra $x = -c \frac{(1 + \cos \nu)^2}{\sin^2 \nu}$), amiért középpontjának koordinátája az x -tengelyen $-c \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu}$, melyen átmenő aszimptotáinak meredeksége $\pm \operatorname{tg} \nu$. A hiperbola nagytengelyének fele $a = 2c \frac{\cos \nu}{\sin^2 \nu}$, kistengelyének fele $b = \frac{2c}{\sin \nu}$, fókuszainak távolsága a középpontjától

$$f = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2c}{\sin \nu} \sqrt{\frac{\cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} + 1} = \frac{2c}{\sin \nu} \frac{1}{\sin \nu} = \frac{2c}{\sin^2 \nu},$$

vagyis fókuszainak koordinátája az x -tengelyen

$$-c \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} \pm \frac{2c}{\sin^2 \nu} = c \frac{-1 - \cos^2 \nu \pm 2}{\sin^2 \nu} = \begin{cases} c, & \text{ha } +, \\ -c \frac{3 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu}, & \text{ha } -. \end{cases}$$

Ez igazolja, hogy a hiperbola egyik fókusza F . Mivel a hiperbolaág minden (x, y) pontjára

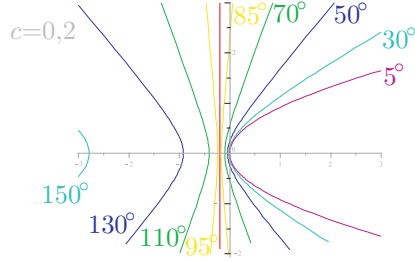
$$\begin{aligned} \frac{y^2 + (x - c)^2}{(x + c)^2} &= \frac{((\frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} c + x)^2 - 4c^2 \frac{\cos^2 \nu}{\sin^4 \nu}) \operatorname{tg}^2 \nu + (x - c)^2}{(x + c)^2} \\ &= \frac{c^2 (\operatorname{tg}^2 \nu + 1) + x^2 (\operatorname{tg}^2 \nu + 1) + 2xc (\frac{1 + \cos^2 \nu}{\cos^2 \nu} - 1)}{(x + c)^2} = \frac{1}{\cos^2 \nu}, \end{aligned}$$

az $x = -c$ egyenes az F fókuszhoz tartozó vezéregyenes, ahogy a tétel állítja.

Következő esetünkben $\nu > \pi/2$. Ekkor a $T_F^\nu(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}^F$ és a $T_F^\nu(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}^F$ ponthalmazban lévő P pontokra is $X_P F Y_P \lhd = \pi - \nu$, amiért előbbi esetben elvégzett számításaink ugyanúgy működnek jelen feltételek mellett is, csak most $\cos \nu < 0$ miatt a hiperbola másik ágát kapjuk, melynek x -tengellyel vett metszetében $x = -c \frac{(1 - \cos \nu)^2}{\sin^2 \nu}$.

Ezzel a tételt beláttuk. ■

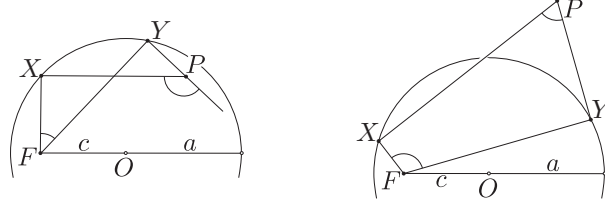
Figyeljük meg, hogy a (2.3) egyenlet megerősíti a $\pi/2$ esetre vonatkozó tételünket, mely szerint $T_F^{\pi/2}(\mathcal{C})$ az $x = -c$ egyenes.



Az ábrán az egyenes ν -téglá-transzformáltjai különféle szögekre láthatóak. Jól látszik, hogy a hiperbola ágak ugyanazon fókuszhoz és vezéregyeneshez tartoznak.

2.4. Tétel. Legyen az F pont az a sugarú $\mathcal{C}$ kör O középpontjától $c \neq a$ távolságra, és legyen $\nu \in (0, \pi)$ nem $\pi/2$. Ekkor egy olyan ortonormált koordinátázásban, ahol $O = (0, 0)$ és $F = (c, 0)$, a $T_F^\nu(\mathcal{C})$ egyenlete

$$(x^2 + y^2 - 2a^2 + c^2)^2 = 4((a^2 - c^2)(x^2 - a^2) + a^2 y^2) \operatorname{ctg}^2 \nu.$$



Bizonyítás. A $T_F^\nu(\mathcal{C})$ görbe minden P pontjához legyen X_P és Y_P pont a $\mathcal{C}$ kör két olyan pontja, melyre $\angle X_P F P = \angle Y_P F P = \pi/2$. Ezeket sorrendtől eltekintve egyértelműen meghatározza az $\overline{FP}$ szakaszra szerkesztett Thalesz-kör.

A pontoknak a Thalesz-körön való elhelyezkedéseit vizsgálva az alábbiak adódnak:

- (k_1) Ha $\nu > \pi/2$ és az X_P és Y_P pontok az FP egyenes különböző oldalaira esnek, akkor az $\overline{FP}$ szakasz metszi az $\overline{X_P Y_P}$ szakaszt, amiért az $FX_P P Y_P$ négyszög konvex, így $\angle X_P F Y_P = \pi - \nu < \pi/2$.
- ($k_{1.1}$) Ha F a $\mathcal{C}$ körön belül van, akkor a $\mathcal{C}$ körnek az $X_P Y_P$ egyenes őt tartalmazó oldalára eső ívén az $\overline{X_P Y_P}$ szakasz látószöge kisebb mint $\pi - \nu$, ezért a $\mathcal{C}$ másik ívén az $\overline{X_P Y_P}$ szakasz látószöge nagyobb mint ν , ezért a P pont a $\mathcal{C}$ körön kívül esik.

- ($k_{1.2}$) Ha F a $\mathcal{C}$ körön kívül van, akkor a $\mathcal{C}$ körnek az $X_P Y_P$ egyenes őt tartalmazó oldalára eső ívén az $\overline{X_P Y_P}$ szakasz látószöge nagyobb, mint $\pi - \nu$, ezért a $\mathcal{C}$ másik ívén az $\overline{X_P Y_P}$ szakasz látószöge kisebb, mint ν , ezért a P pont a $\mathcal{C}$ körön belül esik.

Tehát a $T_F^\nu(\mathcal{C})$ minden pontja a $\mathcal{C}$ körön kívül illetve belül esik aszerint, hogy az F pont azon belül vagy kívül van.

- (k_2) Ha $\nu > \pi/2$ és az X_P és Y_P pontok az FP egyenes ugyanazon oldalára esnek, akkor az $\overline{FP}$ szakasz nem metszi az $\overline{X_P Y_P}$ szakaszt, amiért az $FX_P PY_P$ négyszög konkáv, így $X_P FY_P \angle = \pi - \nu < \pi/2$,
 ($k_{2.1}$) Ha F a $\mathcal{C}$ körön belül van, akkor a $\mathcal{C}$ körnek az $X_P Y_P$ egyenes őt tartalmazó oldalára eső ívén az $\overline{X_P Y_P}$ szakasz látószöge kisebb, mint $\pi - \nu$, ezért a P pont a $\mathcal{C}$ körön belül esik.
 ($k_{2.2}$) Ha F a $\mathcal{C}$ körön kívül van, akkor a $\mathcal{C}$ körnek az $X_P Y_P$ egyenes őt tartalmazó oldalára eső ívén az $\overline{X_P Y_P}$ szakasz látószöge nagyobb, mint $\pi - \nu$, ezért P pont a $\mathcal{C}$ körön kívül esik.

Tehát a $T_F^\nu(\mathcal{C})$ minden pontja a $\mathcal{C}$ körön kívül illetve belül esik aszerint, hogy az F pont azon kívül vagy belül van.

- (k_3) Ha $\nu < \pi/2$ és az X_P és Y_P pontok az FP egyenes különböző oldalaira esnek, az $\overline{FP}$ szakasz metszi az $\overline{X_P Y_P}$ szakaszt, amiért az $FX_P PY_P$ négyszög konvex, így $X_P FY_P \angle = \pi - \nu > \pi/2$. Az (ℓ_1) eredménye alapján tehát a $T_F^\nu(\mathcal{C})$ minden pontja a $\mathcal{C}$ körön kívül illetve belül esik aszerint, hogy az F pont azon belül vagy kívül van.
 (k_4) Ha $\nu < \pi/2$ és az X_P és Y_P pontok az FP egyenes ugyanazon oldalára esnek, akkor az $\overline{FP}$ szakasz nem metszi az $\overline{X_P Y_P}$ szakaszt, amiért az $FX_P PY_P$ négyszög konkáv, így $X_P FY_P \angle = \pi - \nu > \pi/2$, ami lehetetlen, mert az X_P és Y_P pontok az FP egyenes ugyanazon oldalára esnek. Ilyen P pont tehát nincsen.

Világos, hogy a tételben állított formula ugyanaz a ν és a $\pi - \nu$ szögekre, ami ezen megfontolásaink alapján azt jelenti, hogy rögzített ν esetén a képlet megoldáshalmaza két, egymástól idegen görbét ír le, melyek egyike – belső F pont esetén a tompa, külső F pont esetén a hegyes szöghöz tartozó – a körön kívül, másika – külső F pont esetén a tompa, belső F pont esetén a hegyes szöghöz tartozó – a körön belül van.

Mivel $|\overline{OX_P}| = |\overline{OY_P}| = a$, pontosan egy olyan ξ és ψ szög van, melyre $X_P = (a \cos \xi, a \sin \xi)$, $Y_P = (a \cos \psi, a \sin \psi)$. Ekkor az $\overrightarrow{FX_P} = (a \cos \xi - c, a \sin \xi)$ és $\overrightarrow{FY_P} = (a \cos \psi - c, a \sin \psi)$ vektorok $\pi - \nu$ szöget zárnak be, ezért

$$\begin{aligned} -\cos \nu |\overrightarrow{FX_P}| |\overrightarrow{FY_P}| &= \langle (a \cos \xi - c, a \sin \xi), (a \cos \psi - c, a \sin \psi) \rangle \\ &= c^2 + a^2 \cos(\psi - \xi) - ac(\cos \xi + \cos \psi) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\sin \nu |\overrightarrow{FX_P}| |\overrightarrow{FY_P}| &= |(a \cos \xi - c, a \sin \xi) \times (a \cos \psi - c, a \sin \psi)| \\ &= |(a \cos \xi - c)a \sin \psi - a \sin \xi(a \cos \psi - c)|,\end{aligned}$$

amiért

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}^2 \nu &= \frac{(c^2 + a^2 \cos(\psi - \xi) - ac(\cos \xi + \cos \psi))^2}{(a^2 \sin(\psi - \xi) - ac(\sin \psi - \sin \xi))^2} \\ &= \frac{(c^2 - a^2 + 2a \cos \frac{\psi - \xi}{2} (a \cos \frac{\psi - \xi}{2} - c \cos \frac{\psi + \xi}{2}))^2}{4a^2 \sin^2 \frac{\psi - \xi}{2} (a \cos \frac{\psi - \xi}{2} - c \cos \frac{\psi + \xi}{2})^2},\end{aligned}$$

Az $\overrightarrow{FX_P}$ és $\overrightarrow{FY_P}$ vektorok rendre az $X_P P$ és $Y_P P$ egyenesek normálisai, amiért ezen egyenesek egyenletei rendre

$$\begin{aligned}(a \cos \xi - c)x + a \sin \xi y &= \langle (a \cos \xi - c, a \sin \xi), (a \cos \xi, a \sin \xi) \rangle = a^2 - ca \cos \xi, \\ (a \cos \psi - c)x + a \sin \psi y &= \langle (a \cos \psi - c, a \sin \psi), (a \cos \psi, a \sin \psi) \rangle = a^2 - ca \cos \psi,\end{aligned}$$

Ezek közös megoldása a $P = (x, y)$ pont, amiből

$$\begin{aligned}x &= \frac{(a^2 - ca \cos \xi) \sin \psi - (a^2 - ca \cos \psi) \sin \xi}{(a \cos \xi - c) \sin \psi - (a \cos \psi - c) \sin \xi} = a \frac{a(\sin \psi - \sin \xi) - c \sin(\psi - \xi)}{a \sin(\psi - \xi) - c(\sin \psi - \sin \xi)} \\ &= a \frac{a \cos \frac{\psi + \xi}{2} - c \cos \frac{\psi - \xi}{2}}{a \cos \frac{\psi - \xi}{2} - c \cos \frac{\psi + \xi}{2}}, \\ y &= \frac{(a \cos \xi - c)(a^2 - ca \cos \psi) - (a \cos \psi - c)(a^2 - ca \cos \xi)}{(a \cos \xi - c)a \sin \psi - (a \cos \psi - c)a \sin \xi} \\ &= \frac{(c^2 - a^2)(\cos \psi - \cos \xi)}{a \sin(\psi - \xi) - c(\sin \psi - \sin \xi)} = \frac{(c^2 - a^2) \sin \frac{\psi + \xi}{2}}{a \cos \frac{\psi - \xi}{2} - c \cos \frac{\psi + \xi}{2}}.\end{aligned}$$

Eszerint az $\alpha = \frac{\psi - \xi}{2} \neq 0$ és $\beta = \frac{\psi + \xi}{2}$ változókat bevezetve

$$\begin{aligned}&4((a^2 - c^2)(x^2 - a^2) + a^2 y^2) \operatorname{ctg}^2 \nu (a \cos \alpha - c \cos \beta)^4 \sin^2 \alpha \\ &= [(a^2 - c^2)((a \cos \beta - c \cos \alpha)^2 - (a \cos \alpha - c \cos \beta)^2) + (c^2 - a^2)^2 \sin^2 \beta] \times \\ &\quad \times (c^2 - a^2 + 2a \cos \alpha (a \cos \alpha - c \cos \beta))^2 \\ &= (c^2 - a^2)^2 \sin^2 \alpha (c^2 - a^2 + 2a \cos \alpha (a \cos \alpha - c \cos \beta))^2\end{aligned}$$

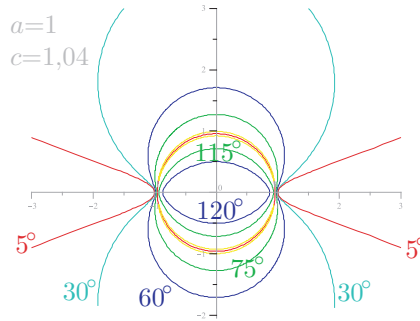
és

$$\begin{aligned}&(x^2 + y^2 - 2a^2 + c^2)^2 (a \cos \alpha - c \cos \beta)^4 \sin^2 \alpha \\ &= [a^2 (a \cos \beta - c \cos \alpha)^2 + (c^2 - a^2)^2 \sin^2 \beta - \\ &\quad - (2a^2 - c^2)(a \cos \alpha - c \cos \beta)^2]^2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [a^2(a^2 - c^2)(\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha) + (c^2 - a^2)^2 \sin^2 \beta - \\
&\quad - (a^2 - c^2)(a \cos \alpha - c \cos \beta)^2] \sin^2 \alpha \\
&= (a^2 - c^2)^2 [a^2(\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha) - (c^2 - a^2) \sin^2 \beta - (a \cos \alpha - c \cos \beta)^2] \sin^2 \alpha \\
&= (a^2 - c^2)^2 [a^2 - a^2 \cos^2 \alpha - c^2 \sin^2 \beta - (a \cos \alpha - c \cos \beta)^2] \sin^2 \alpha \\
&= (a^2 - c^2)^2 [a^2 - c^2 - 2a^2 \cos^2 \alpha + 2ac \cos \alpha \cos \beta] \sin^2 \alpha
\end{aligned}$$

Ez igazolja a tételt. ■

Figyeljük meg, hogy $\nu = \pi/2$ esetén formulánk megerősíti a $\pi/2$ esetre vonatkozó tételt, mely szerint $T_F^{\pi/2}(\mathcal{C})$ az origó körüli $\sqrt{2a^2 - c^2}$ sugarú kör. A formulából az is látszik, hogy a $T_F^\nu(\mathcal{C})$ görbe kizárólag a $\nu = \pi/2$ esetben kúpszelet, amit az alábbi ábra is jól demonstrál.



Az ábrán a kör ν -téglá-transzformáltjai láthatók különféle szögekre. Az is megfigyelhető rajta, hogy a transzformált görbe nem feltétlenül konvex.

Ha $P \in T_F^\nu(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}$, akkor $x^2 + y^2 = 2a^2 - c^2$ miatt tételünkéből $(c^2 - a^2)^2 = 4(a^2 - x^2)c^2 \operatorname{ctg}^2 \nu$ következik, aminek megoldhatósága miatt $4c^2 a^2 \operatorname{ctg}^2 \nu \geq (c^2 - a^2)^2$ adódik. Ebből átrendezéssel a

$$\sin \nu \leq \frac{2}{c/a + a/c} \quad (< 1!)$$

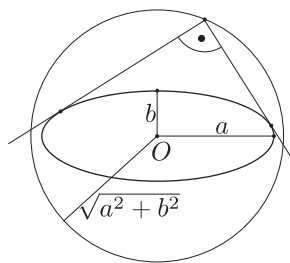
egyenlőtlenséghez jutunk. Ez azt jelenti, hogy $T_F^\nu(\mathcal{C})$ akkor és csak akkor metszi a $\mathcal{C}$ kört, ha ν elegendően messze van a $\pi/2$ szögtől – a $\pi/2$ szögnek mindig van olyan környezete, hogy az abban lévő ν szögekre $T_F^\nu(\mathcal{C})$ nem metszi a $\mathcal{C}$ kört.

3. Kúpszeletek ortoptikusai

Az ortoptikus görbék meghatározása felé tett első lépésként vegyük észre, hogy ezek Thalesz tételének általánosításaként is felfoghatók, hiszen ha egy szakaszt elfajult (eltűnő kistengelyű) ellipszisként fogunk fel, akkor Thalesz tétele⁹⁾ éppen a következő állításunk speciális eseteként jelenik meg.

3.1. Tétel. *Az a nagy- és b kistengelyű ellipszis ortoptikusa a középpontja körüli $\sqrt{a^2 + b^2}$ sugarú kör.*

Bizonyítás. Legyen az ellipszisünk két fókusza F_1 és F_2 . Az F_1 fókusz bármely érintőre vett tükörképe éppen az F_2 fókusz körüli $2a$ sugarú körre¹⁰⁾ esik.



Eszerint az F_1 fókuszhoz az érintőkre vett merőleges vetületei ennek a $2a$ sugarú körnek az F_1 középponttal vett $1/2$ arányú kicsinyített $\mathcal{C}$ képén vannak. E $\mathcal{C}$ kör sugara nyilván a , középpontja pedig az ellipszis O középpontja (a tengelyek metszéspontja), hiszen O felezi az $\overline{F_1 F_2}$ szakaszt. (Ezt az O középpontú a sugarú kört az ellipszis *főkörének* szokás nevezni.)

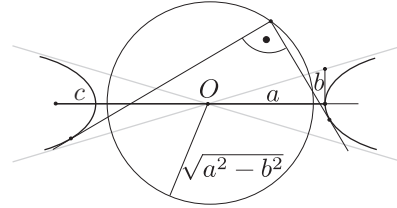
Tekintsünk most egy olyan P pontot, melyen keresztül az ellipszishez húzott e és f érintők merőlegesek egymásra. Legyen az F fókusz (ez F_1 vagy F_2) távolsága az O középponttól c , merőleges vetületei pedig az e és f érintőkre legyenek rendre F_e és F_f . Ekkor FF_ePF_f egy olyan téglalap, melynek F_e és F_f pontja a $\mathcal{C}$ körre esik, így a 2.1. lemma következtében $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, vagyis az ellipszis ortoptikusa tényleg a tételben állított kör. ■

A hiperbolának nincs mindig ortoptikusa, hiszen ha aszimptotái nem hegyes szöget zárnak be, akkor az üres síknegyedekből hegyesszög, az ágakat tartalmazó síknegyedekből pedig tompaszög alatt látszanak. Alábbi tételünkben ez meg is jelenik a kis- és nagytengely viszonyában.

⁹⁾ Thalesz tétele szerint egy szakasz ortoptikusa olyan kör, melynek egy átmérője az adott szakasz.

¹⁰⁾ Ez az ellipszis egy vezérköre.

3.2. Tétel. Az a nagy- és b kistengelyű kétágú hiperbolának csak akkor van ortoptikusa, ha $b \leq a$. Ebben az esetben az ortoptikusa a középpontja körüli $\sqrt{a^2 - b^2}$ sugarú kör.



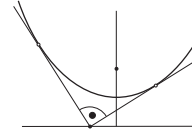
Bizonyítás. Legyen a hiperbolánk két fókusz F_1 és F_2 . Az F_1 fókusz bármely érintőre vett tükörképe éppen az F_2 fókusz körüli $2a$ sugarú körre¹¹⁾ esik.

Eszerint az F_1 fókuszhoz az érintőkre vett merőleges vetületei ennek a $2a$ sugarú körnek az F_1 középponttal vett $1/2$ arányú kicsinyített $\mathcal{C}$ képén vannak. E $\mathcal{C}$ kör sugara nyilván a , középpontja pedig a hiperbola O középpontja (az aszimptoták metszéspontja), hiszen O felezi az $\overline{F_1 F_2}$ szakaszt.

Tekintsünk most egy olyan P pontot, melyen keresztül a hiperbolához húzott e és f érintők merőlegesek egymásra. Legyen az F fókusz (ez F_1 vagy F_2) távolsága az O középponttól c . Az F merőleges vetületei az e és f érintőkre legyenek F_e és F_f . Ekkor FF_ePF_f egy olyan téglalap, melynek F_e és F_f pontja a $\mathcal{C}$ körre esik, így a 2.1. lemma következtében $|\vec{OP}| = \sqrt{2a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$, vagyis a hiperbola ortoptikusa valóban a tételben mondott kör.

■

3.3. Tétel. Bármely parabola ortoptikusa éppen a vezéregyenes.



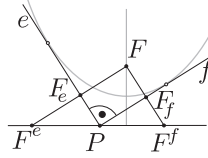
Bizonyítás. Legyen a parabolánk fókusz F . Az F bármely érintőre vett tükörképe éppen a parabola $\mathcal{V}$ vezéregyenesére esik.

Eszerint az F fókuszhoz az bármely érintőre vett merőleges vetületei a $\mathcal{V}$ vezéregyenesnek az F középpontból vett $1/2$ arányban kicsinyített $\mathcal{L}$ képén vannak. Az $\mathcal{L}$ nyilván egy egyenes, amely párhuzamos a vezéregyenessel, és éppen fele akkora távolságra van az F fókuszról, mint a $\mathcal{V}$ vezéregyenes.

Tekintsünk most egy olyan P pontot, melyen keresztül a parabolához húzott

¹¹⁾ Ez a hiperbola egy vezérköre.

e és f érintők merőlegesek egymásra.



Ekkor az F fókuszhoz az e és f érintőkre vett F_e és F_f vetületeivel az FF_ePF_f négyszög egy téglalap, így a 2.2. lemma szerint P a $\mathcal{V}$ vezéregyenesen van, továbbá $\mathcal{V}$ minden pontjából a parabola $\pi/2$ szög alatt látszik. ■

4. Kúpszeletek izoptikusai

Néhány esetben már tudjuk, hogy a nem ortoptikus izoptikus is kör:

- (a) Az r sugarú kör ν -izoptikus görbéje a vele koncentrikus $r/\sin \nu$ sugarú kör;
- (b) A h hosszúságú szakasz ν -izoptikus görbéje a felezőmerőlegesén tőle $h/2/\tan \nu$ távolságra lévő pontok körüli $h/2/\sin \nu$ sugarú köröknek a középpontjuk félsíkjaiba eső íve;

Más esetekben az izoptikus még csak nem is feltétlenül konvex.

4.1. Tétel. *Parabola nem ortoptikus ν -izoptikusa a vele egyező fókusszal és vezéregyenessel rendelkező hiperbola azon ágának fókuszából vett kétszeres nagysítottja, mely $\nu < \pi/2$ esetén nem, $\nu > \pi/2$ esetén viszont tartalmazza a fókuszt.*

Az $y = x^2/p$ parabola ν -izoptikus görbéje

$$y = -p \frac{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \nu}{4} - \frac{\operatorname{ctg} \nu}{2 \sin \nu} \sqrt{p^2 + 4x^2 \sin^2 \nu}.$$

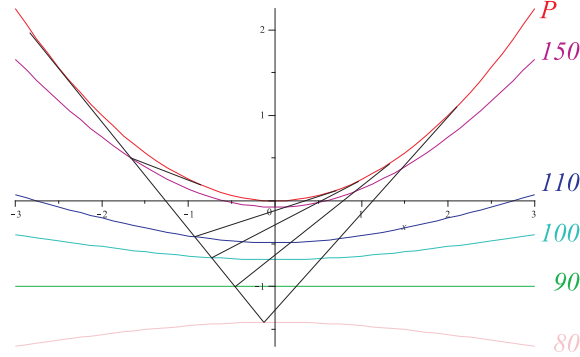
Bizonyítás. Az $y = x^2/p$ parabola fókusza az $F = (0, p/4)$ pont, $\mathcal{V}$ vezéregyenes az $y = -p/4$ egyenes.¹²⁾

Az F bármely érintőre vett tükörképe éppen a parabola vezéregyenesére esik, ezért az F bármely érintőre vett merőleges vetülete a vezéregyenesnek az F középpontból vett $1/2$ arányban kicsinyített $\mathcal{L}$ képén van, ami éppen az x -tengely.

Tekintsünk most egy olyan P pontot, melyen keresztül a parabolához húzott érintők ν -szöget zárnak be. A 2.3. Tétel értelmében az ilyen P pontok $T_F^\nu(\mathcal{L})$ halmaza az F fókuszhoz és $y = -p/4$ vezéregyeneshez tartozó hiperbolának az az

¹²⁾ Mivel $d((x, x^2/p), (0, p/4)) = d((x, x^2/p), (x, -p/4))$.

ága, amelynek az F pont a konvex részében van vagy se aszerint, hogy $\nu > \pi/2$ vagy $\nu < \pi/2$.



Ez bizonyítja az első állítást.

Jelen formulával megadott parabola fókusza és vezéregyenese a (2.3) egyenletnél vizsgált helyzethez képest $\pi/2$ szöggel az óra járásával ellentétesen van elforgatva, így (2.3) egyenletből a $c = p/4$ felhasználásával

$$(x^2 - py) \operatorname{ctg}^2 \nu = (y + p/4)^2$$

adódik, amit az y változóra alkalmazott másodfokú megoldóképletbe helyettesítve nyerjük a tétel formuláját. ■

A kúpszeletek izoptikusai általában nem kúpszeletek és nem is feltétlenül konvexek, amit az ellipszis és hiperbola izoptikusainak meghatározásával igazolunk.

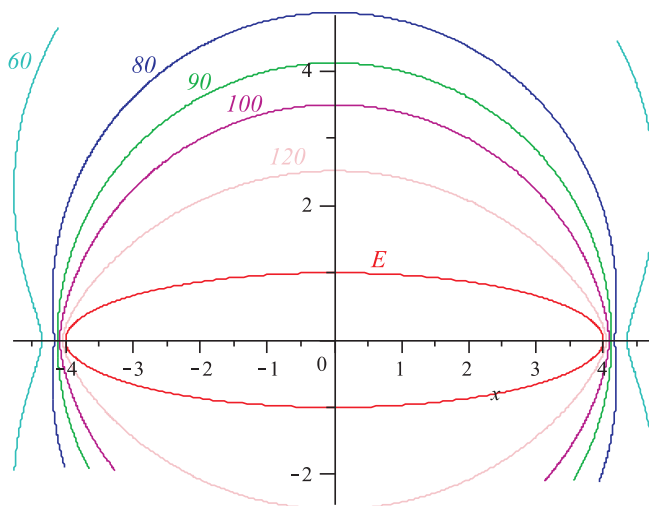
4.2. Tétel. *Az a nagy- és b kistengelyű*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipszis ν -izoptikusa

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = 4(a^2 y^2 + b^2(x^2 - a^2)) \operatorname{ctg}^2 \nu.$$

Bizonyítás. Ahogy arra már a 3.1. Tételben is hivatkoztunk, az ellipszis középpontjától az x -tengelyen a $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ abcisszájú fókuszhoz az érintőkre vett vetülete az origó körüli a sugarú körre esik, ezért a 2.4. Tétel adja az eredményt. ■



A hiperbolának nincs mindig ν -izoptikusa, hiszen ha aszimptotái ν -nél nagyobb szöget zárnak be, akkor az üres síknegyedekből ν -nél kisebb szög, az ágakat tartalmazó síknegyedekből pedig ν -nél nagyobb szög alatt látszanak. Alábbi tételünkben ez meg is jelenik a kis- és nagytekve arányában.

4.3. Tétel. Az a nagy- és b kistengelyű

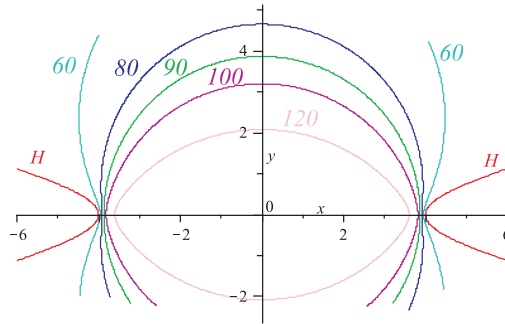
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hiperbolának akkor és csak akkor van ν -izoptikus görbéje, ha $\cos \nu \geq \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$. Ebben az esetben a ν -izoptikus görbéje

$$(x^2 + y^2 - a^2 + b^2)^2 = 4(a^2 y^2 - b^2(x^2 - a^2)) \operatorname{ctg}^2 \nu.$$

Bizonyítás. A tételt bevezető indoklás alapján világos, hogy $\operatorname{tg}(\nu/2) < b/a$ szükséges feltétele a ν -izoptikus létezésének. Ebből a tételben szereplő egyenlőtlenséget kapjuk a félszögekre vonatkozó trigonometrikus összefüggések alkalmazásával. ■

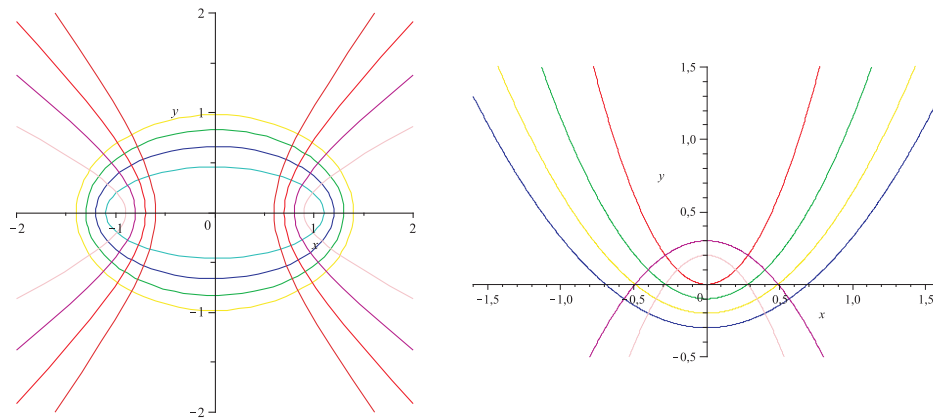
Ahogy arra már a 3.2. Tételben is hivatkoztunk, a hiperbola középpontjától az x -tengelyen a $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ abcisszájú fókuszhoz az érintőkre vett vetülete az origó körüli a sugarú körre esik, ezért a 2.4. Tétel adja az eredményt. ■



Jegyezzük meg, hogy eredményeink nem jelentik azt, hogy ne lennének olyan, amúgy esetleg igen tetszetős, akár konvex görbék, melyek valamely izoptikusa, esetleg éppen az ortoptikusa ne lenne éppenséggel akár kör. Ilyen görbékre konkrét példák láthatók a [1], [3] és részletesebben a [8] cikkekben. Ugyanakkor akár középiskolai eszközökkel is bizonyítható, hogy ha egy ortoptikus ellipszis, akkor kör.

5. Duplázzuk a tétet: konfokális kúpszeletek

Két kúpszeletet *konfokálisnak* nevezünk, ha fókuszaik egybeesnek (ilyenkor a parabolát úgy tekintjük, mint amelynek „másik” fókusza a tengelyének végtelen távoli pontja).



Ha tehát két kúpszelet konfokális, akkor vagy mindkettő az ellipszisek és hiperbolák közül kerül ki,¹³⁾ vagy mindkettő parabola közös fókusszal és tengellyel.

Ha két ellipszis vagy két hiperbola konfokális és metszik egymást, akkor a metszés miatt a nagytengelyeik hossza megegyezik, viszont a fókuszaik egybeesése miatt a kistengelyeik hossza is megegyezik, vagyis ezen kúpszeletek egybeesnek.

Ha egy ellipszis és egy hiperbola konfokális és metszi egymást, akkor a metszéspontban az érintők merőlegesek, hiszen az ellipszis esetében a fókuszokhoz vezető sugarak belső szögét, a hiperbola esetén pedig ugyanezen sugarak külső szögét felezi az érintő.

Ha mindkét kúpszelet parabola, akkor a metszés miatt a két parabola vezéregyenese ugyanakkora távolságra van a fókusztól. Ha az érintők a metszéspontban egybeesnek, akkor a fókusz erre vett tükröképe meghatározza a vezéregyenest, amiért a két parabola egybeesik. Ha az érintők a metszéspontban nem esnek egybe, akkor az érintők a metszéspontból a fókuszhoz vezető sugár és a metszésponton a tengellyel párhuzamosan áthaladó egyenes alkotta ugyanazon szög belső és külső szögfelezői, tehát merőlegesek egymásra.

Összefoglalva kimondható, hogy amennyiben két konfokális metsző kúpszelet nem esik egybe, akkor metszéspontjaikban az érintők merőlegesek egymásra.

Konfokális centrális kúpszeletek középpontjai egybeesnek, hiszen a középpont a fókuszok alkotta szakasz felezőpontja. Konfokális parabolák vezéregyenesei párhuzamosak egymással, mert merőlegesek a parabolák tengelyére.

5.1. Tétel. *Két konfokális centrális kúpszelet uniójának ortoptikusa a középpont körüli kör. Két konfokális parabola uniójának ortoptikusa a tengelyre merőleges egyenes.*

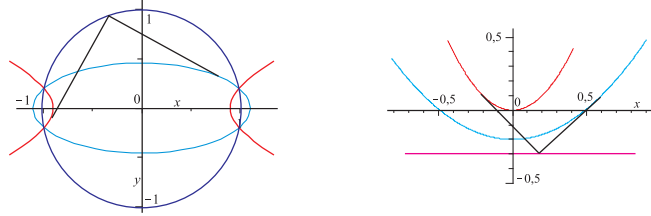
Bizonyítás. A két konfokális centrális kúpszelet uniója ortoptikusának P pontjain átmenő érintőkre véve az egyik F fókusz merőleges vetületét, a vetületi X és Y pontok a két kúpszelet egy-egy főkörére esnek, ahogy azt már korábban láttuk. A második szakasz Segédlemmája értelmében a két konfokális centrális kúpszelet O középpontjára

$$|\overrightarrow{OF}|^2 + |\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OX}|^2 + |\overrightarrow{OY}|^2 = a_1^2 + a_2^2,$$

ahol a_1 és a_2 a két főkör sugara. Az ortoptikus tehát rajta van az O középpontú $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - c^2}$ sugarú körön, ahol $c = |\overrightarrow{OF}|$. Ugyanakkor e kör minden pontja az ortoptikuson van, hiszen mindkét főkörre érvényes, hogy P és F nincs egyszerre a

¹³⁾ Ezeket együttesen centrális kúpszeleteknek is nevezzük.

kör belsejében van külsejében.



Két konfokális parabola uniója ortoptikusának P pontjain átmenő érintőkre véve az F fókusz merőleges vetületét, a vetületi X és Y pontok a két parabola vezéregyenessel párhuzamos $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ érintő egyenesekre esnek, ahogy azt már korábban láttuk. Azonnal következik, hogy az $\overline{XY}$ szakasz felező pontja azon az $\mathcal{L}'$ egyenesen van, mely ezekkel párhuzamos és e két egyenes között félúton található. Eszerint az ortoptikus rajta van az $\mathcal{L}'$ egyenesnek az F fókuszról kétszeresére nagyított $\mathcal{L}$ képén, ami egy egyenes persze. Ennek az $\mathcal{L}$ egyenesnek minden P pontja az ortoptikuson van, hiszen a $\overline{PF}$ szakasz felező pontja az $\mathcal{L}'$ egyenesre esik, amelynek különböző oldalán van az $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenes, így ezek különböző pontokban metszik a $\overline{PF}$ szakasz Thales-körét. ■

Bizonyításunkban felfedezhető a második szakaszban definiált téгла-transzformáció egy variánsa: $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ görbe, valamint egy rajtuk kívüli F pont esetén keressük azon P pontok $T_F(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ halmazát, melyekhez van a $\mathcal{G}_1$ görbén olyan X és a $\mathcal{G}_2$ görbén olyan Y pont, melyre $FXPY$ téglalapot alkot. A $T_F(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ halmazt a $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ görbepár *téгла-transzformáltjának* nevezzük.¹⁴⁾ Eljárásunk voltaképpen arra épült, hogy két koncentrikus kör és két párhuzamos egyenes esetén egy koncentrikus kör, illetve egy párhuzamos egyenes a téгла-transzformált.

Felvetődik a kérdés, hogy *mi a helyzet metsző egyenesek és nem koncentrikus körök esetén.*

5.2. Tétel. *Ha az F pont nincs rajta az O pontban egymást metsző $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ egyenesek egyikén sem, akkor a $T_F(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ téгла-transzformált*

- (1) *az OF egyenesre merőleges, az O ponton átmenő egyenes, ha $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, és*
- (2) *egy hiperbola, amennyiben $\mathcal{L}_1 \not\perp \mathcal{L}_2$.*

¹⁴⁾ A névazonosság nem okozhat problémát, hiszen $T_F(\mathcal{G}_1) = T_F(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1)$.

Bizonyítás. Legyen az egyik egyenes az x -tengely, rajta az $X = (s, 0)$ pont. A másik ℓ egyenes menjen át az O origón $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ irányvektorral ($\alpha \in (0, \pi)$), rajta az $Y = t(\cos \alpha, \sin \alpha)$ pont. Végül legyen az $F = (f_1, f_2) = f(\cos \varphi, \sin \varphi)$ pont rögzített, ahol $\varphi \in (0, \pi) \setminus \{\alpha\}$ és $f \neq 0$.

Ekkor

$$(5.1) \quad \begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{FX}, \overrightarrow{FY} \rangle = \langle (s - f_1, -f_2), (t \cos \alpha - f_1, t \sin \alpha - f_2) \rangle \\ &= s(t \cos \alpha - f \cos \varphi) - tf \cos(\alpha - \varphi) + f^2. \end{aligned}$$

Ha $t \cos \alpha = f \cos \varphi$ lenne, akkor az YF egyenes merőleges lenne az x -tengelyre, tehát nem létezhetne az X pont,¹⁵⁾ amiért $t \cos \alpha \neq f \cos \varphi$, így az (5.1) egyenlet alapján

$$(5.2) \quad s = f \frac{t \cos(\alpha - \varphi) - f}{t \cos \alpha - f \cos \varphi}.$$

Az $\overline{XY}$ szakasz és a $\overline{PF}$ szakasz felezi egymást, ezért a $P = (x, y)$ pontra

$$(x, y) = (s, 0) + t(\cos \alpha, \sin \alpha) - (f_1, f_2) = (s + t \cos \alpha - f_1, t \sin \alpha - f_2)$$

teljesül, amiből $t = (y + f_2)/\sin \alpha$ következik.

Ha $\alpha = \pi/2$, akkor (5.2) alapján $s \cos \varphi + t \sin \varphi = f$, amiért

$$\begin{aligned} x \cos \varphi + y \sin \varphi &= (s - f_1) \cos \varphi + (t - f_2) \sin \varphi \\ &= (s \cos \varphi + t \sin \varphi) - (f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi) = 0, \end{aligned}$$

vagyis a $\mathcal{P}$ halmaz az O ponton átmenő, az OF egyenesre merőleges egyenes.¹⁶⁾

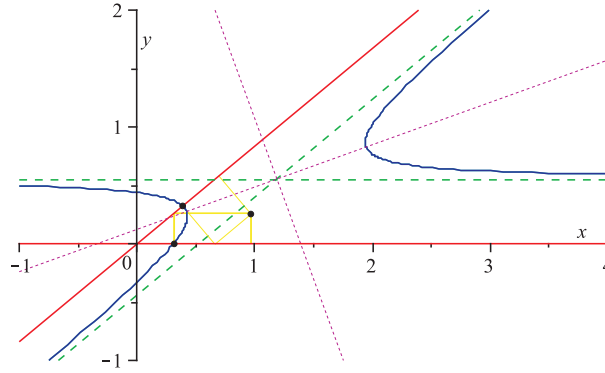
¹⁵⁾ Ez az ellentmondás az egyenletből is következik, hiszen $f = t \cos(\alpha - \varphi)$ következne, amit feltételezésünkkel egyszerre alkalmazva $f \sin \varphi = t \sin \alpha$ adódna, amiből $\overrightarrow{FY} = (t \cos \alpha - f_1, t \sin \alpha - f_2) = (t \cos \alpha - f \cos \varphi, t \sin \alpha - f \sin \varphi) = (0, 0)$, vagyis $F = Y$ jönne ki, holott $F \notin \ell$.

¹⁶⁾ Ennek az állításnak elemi geometriai bizonyítása is adható: az O pont az $FXPY$ téglalap körülírt körén van, mert az $\overline{XY}$ átló $\pi/2$ alatt látszik az O pontból, ezért az $FXPY$ téglalap középpontja ugyanakkora távolságra van az F ponttól, mint az O ponttól, vagyis rajta van az $\overline{OF}$ szakasz felező merőlegesén, így $\mathcal{P}$ eme szakasz felező merőlegesének F pontból vett kétszeres nagyítottja.

Ha $\alpha \neq \pi/2$, akkor

$$\begin{aligned}
 x &= s + t \cos \alpha - f_1 = f \frac{t \cos(\alpha - \varphi) - f}{t \cos \alpha - f \cos \varphi} + (y + f_2) \operatorname{ctg} \alpha - f \cos \varphi \\
 &= f \frac{\cos(\alpha - \varphi)(y + f_2)/\sin \alpha - f}{(y + f_2) \operatorname{ctg} \alpha - f \cos \varphi} + y \operatorname{ctg} \alpha + f(\sin \varphi \operatorname{ctg} \alpha - \cos \varphi) \\
 &= f \frac{\cos(\alpha - \varphi)(y + f_2)/\sin \alpha - f}{y \operatorname{ctg} \alpha + f(\sin \varphi \operatorname{ctg} \alpha - \cos \varphi)} + y \operatorname{ctg} \alpha + f(\sin \varphi \operatorname{ctg} \alpha - \cos \varphi) \\
 &= f \frac{y \cos(\alpha - \varphi) - f \sin(\alpha - \varphi) \cos \varphi}{y \cos \alpha + f \sin(\varphi - \alpha)} + \frac{y \cos \alpha + f \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \alpha}
 \end{aligned}$$

következik.



Átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 &x \sin \alpha (y \cos \alpha + f \sin(\varphi - \alpha)) \\
 &= f \sin \alpha (y \cos(\alpha - \varphi) - f \sin(\alpha - \varphi) \cos \varphi) + (y \cos \alpha + f \sin(\varphi - \alpha))^2 \\
 &= y f \sin \alpha \cos(\alpha - \varphi) - f^2 \sin(\alpha - \varphi) \cos \varphi \sin \alpha + (y \cos \alpha + f \sin(\varphi - \alpha))^2,
 \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned}
 &f \sin \alpha \sin(\alpha - \varphi) (f \cos \varphi - x) \\
 &= y \sin \alpha (f \cos(\alpha - \varphi) - x \cos \alpha) + (f \sin(\alpha - \varphi) - y \cos \alpha)^2,
 \end{aligned}$$

aminek teljes négyzetes

$$\begin{aligned}
 &\frac{(x \cos \frac{\alpha}{2} + y \sin \frac{\alpha}{2} - f \frac{\cos(\frac{\alpha}{2} - \varphi)}{\cos \alpha})^2}{4 f^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \frac{\sin \varphi |\sin(\alpha - \varphi)|}{\cos^2 \alpha}} - \frac{(x \sin \frac{\alpha}{2} - y \cos \frac{\alpha}{2} + f \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} - \varphi)}{\cos \alpha})^2}{4 f^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \frac{\sin \varphi |\sin(\alpha - \varphi)|}{\cos^2 \alpha}} \\
 &= \operatorname{sign}(\sin(\alpha - \varphi))
 \end{aligned}$$

alakjából látszik, hogy olyan hiperbolával van dolgunk, amelynek nagy tengelye $a = 2f \cos \frac{\alpha}{2} \frac{\sqrt{\sin \varphi |\sin(\alpha - \varphi)|}}{\cos \alpha}$, kistengelye $b = 2f \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\sqrt{\sin \varphi |\sin(\alpha - \varphi)|}}{\cos \alpha}$ hosszú, és így fókuszai $c = 2f \frac{\sqrt{\sin \varphi |\sin(\alpha - \varphi)|}}{\cos \alpha}$ távolságra vannak a hiperbola $y = f \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha}$ és $x \sin \alpha - y \cos \alpha = f \frac{\sin \varphi}{\cos \alpha}$ aszimptotáinak $\frac{f}{\cos \alpha}(\cos(\alpha - \varphi), \sin(\alpha - \varphi))$ metszéspontjától. ■

A nem koncentrikus körök esetének megoldása az olvasóra marad.

Irodalom

- [1] J. W. GREEN, Sets subtending a constant angle on a circle, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 263–267.
- [2] M. S. KLAMKIN, Conjectured isoptic characterization of a circle, *Amer. Math. Monthly*, **95** (1988), 845.
- [3] KINCSES J. és KURUSA Á., Felismerhető-e egy alakzat az árnyékképeiből?, *Polygon*, **2** (1991), 69–80.
- [4] KISS GY., Amit jó tudni a kúpszeletekről I. és II., *KöMaL*, **11** (2004), **12** (2004), <http://www.komal.hu/cikkek/2004-11/kupszeletek1.h.shtml> és <http://www.komal.hu/cikkek/2004-12/kupszeletek2.h.shtml>.
- [5] KURUSA Á., *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon, Szeged, 1998.
- [6] KURUSA Á., *Euklidészi geometria*, Polygon, Szeged, 2008.
- [7] J. C. C. NITSCHÉ, Isoptic Characterization of a circle, (Proof of a Conjecture of M. S. Klamkin), *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 45–47.
- [8] W. WUNDERLICH, Kurven mit isoptischen Kreis, *Aequationes Math.*, **61** (1971), 71–81.

KURUSA Á., SzTE, Bolyai Intézet, Aradi vértanúk tere 1., 6720 Szeged; e-mail: kurusa@math.u-szeged.hu