

A tomográfia matematikája

KURUSA ÁRPÁD

Abstract. A tomográf működésének egy elvi modeljét adjuk, ami a Radon transzformáció vizsgálatához vezet. Megvizsgáljuk a Radon transzformáció néhány alapvető tulajdonságát, majd levezetünk egy inverziós formulát. Végül felvetünk néhány további problémát.

1. Bevezetés

A tomográf a modern orvostudomány egyik legújabb diagnosztikai "csoda-fegyvere". Anélkül képes a páciens belsejébe látni, hogy annak bármilyen fizikai behatást el kellene viselni. Segítségével pontosan meghatározható a daganatok vagy vérömlenyek helye a koponyában, amit azelőtt csak a koponya felnyitásával érthettek el az orvosok. Jól jellemzi diagnosztikai értékét az is, hogy bár beszerzése és üzemeltetése egyaránt rendkívül drága, elterjedése robbanásszerű a világban.

Nézzük meg tehát, hogyan is működik a tomográf! Mivel ez a gép is a röntgensugarak alkalmazásán alapszik, előbb tekintsük át a hagyományosnak is nevezhető röntgengép működését.

Ilyen "hagyományos" röntgenképet nyilván mindenki látott már. Ilyet tudószűrősen, csonttörés gyanújakor vagy akár fogászati beavatkozás érdekében szoktak készíteni. A felvétel úgy készül, hogy a vizsgálandó testrészt "átvilágítják" a röntgensugárral, és a másik oldalra egy olyan filmet helyeznek, mely erre a sugárra érzékeny. Ezen a filmen az a terület lesz sötétebb, melyet nagyobb intenzitású röntgensugár ér. Ez az intenzitás pedig attól függ, hogy milyen szöveteken haladt át a sugár, hiszen azt tudjuk, hogy a sűrűbb közeg jobban elnyeli a sugarat.

AMS Subject Classification (2000): 44A12.

Ez a cikk a Nagykanizsán rendezett tanárkonferencián elhangzott előadás anyagából készült

Azt az összefüggést, amelyet eszerint a röntgenkép készítésénél használunk, a fizikusok jól ismerik: ha a besugárzó elég vékony röntgensugár intenzitása I_0 , ami a testrészen való áthaladás után I intenzitásúra csökken, akkor

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \int_{\xi} f(x), dx,$$

ahol ξ az az egyenes, melynek mentén a sugár halad, $f(x)$ pedig az anyagi közeg sűrűsége az x pontban. Ezt az összefüggést használja ki egészen új módon a tomográf.

Képzeljük el a koponyának egy vékony sík szeletét, és ebben a síkban minden lehetséges egyenes mentén bocsássunk át egy röntgensugarat. A fenti összefüggés szerint ezzel, ha $f(x)$ jelöli e metszet x pontjában a szövet sűrűségét, az adott sík minden egyenesén megismerjük az f függvény integrálját. A tomográf ezeket az adatokat, tehát az egyenest és az azon mért $\ln(I_0/I)$ értéket a számítógépébe táplálja, mely ebből előállítja a mért koponyaszelet képét. Ez a kép nem olyan mint a hagyományos röntgengép, hanem színes, minden pontban a kép színével érzékeltetve a koponyaszelet megfelelő pontjában lévő sűrűséget.

A tomográf, melynek neve a görög "tomo" magyarul "szelet" szóból ered, matematikája alapvetően éppen azon probléma körül forog, hogy hogyan határozható meg az f függvény minden egyenesen vett integráljaiból. Természetesen a gyakorlatban még sok további, nem kevésbé érdekes probléma merül fel, mint például az, hogy persze nem tudjuk az összes végtelen számú egyenesen megmérni a $\ln(I_0/I)$ értéket, vagy, hogy a számítógép csak korlátozott pontossággal képes számolni. Mi most nem akarunk ezekkel foglalkozni, csak az alapproblémával.

Mint már annyiszor, ebben az esetben is tanúi lehetünk annak, hogy a matematika sokkal hamarabb kezdett foglalkozni egy kérdéssel, mintsem annak akár a legkisebb gyakorlati haszna is látszott volna. Ahhoz azonban, hogy pontosan beszélhessünk a témánkról, mostmár definiálnunk kell az első kutatójáról elnevezett alábbi transzformációt.

Definíció 1.1. Legyen a kompakt tartójú folytonos f függvény az (x, y) -síkon értelmezve. Az f függvénynek az $\mathbb{R}^2$ sík egyenesének $\mathbb{P}^2$ halmazán értelmezett Rf Radon transzformáltján, az

$$Rf(\alpha, r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \alpha + t \sin \alpha, r \sin \alpha - t \cos \alpha) dt$$

függvényt értjük, ahol r az egyenes távolsága az origótól és α az egyenes normálisának az x -tengellyel bezárt szöge.

Mostantól, ha csak külön nem jelzünk mást, az r és az α jelentését e definíció értelmezi.

Szavakkal kifejezve, az Rf Radon transzformált minden (α, r) egyenesen az f függvénynek ezen az egyenesen vett integráljával egyenlő.

Először J. Radon [3] foglalkozott 1917-ben azzal a problémával, hogy egy a síkon értelmezett kompakt tartójú folytonos függvényt meghatározzon egyedül az egyeneseken vett integráljai ismeretében, ezért lett róla elnevezve a fenti transzformáció, amikor a harmincas években, F. John és G. Herglotz munkássága alapján, kiderült, hogy a Radon transzformáció nagyon jól használható a parciális differenciálegyenletek elméletében.

Ugrásszerűen megnőtt a Radon transzformáció elméletének kutatása, amikor a hatvanas évek elején a rádiócsillagászatban találtak konkrét gyakorlati alkalmazást, majd amikor A.M. Cormack felvetette egy olyan műszer ötletét, amit ma tomográfának nevezünk (annak ellenére, hogy a gyakorlatban is működő tomográfot először csak 1970-ben tudtak készíteni G.N. Hounsfield vezetésével). Ezzel párhuzamosan azonban a matematikában is fontos alkalmazásokat találtak, ami főleg S. Helgason nevéhez fűződik.

Jelen cikkünk célja a Radon transzformáció ismertetése. Külön kitérünk a mindig is legfontosabb kérdésre, az invertálhatóságra, de más fontos tulajdonságokat is tárgyalunk.

2. A Radon transzformáció alapvető tulajdonságai

Az első dolog amivel meg kell ismerkednünk, az az R^t duális Radon transzformáció. Amint az alábbi definíció mutatja, ez is egy hasonló típusú transzformáció, hiszen szinte csak az a különbség, hogy itt nem az egyenesre illeszkedő pontok halmazán kell integrálnunk, hanem a pontra illeszkedő egyenesek halmazán.

Definíció 2.1. Legyen az $F(\alpha, r)$ folytonos függvény a sík egyenesének $\mathbb{P}^2$ halmazán értelmezve, ahol r az egyenes távolsága az origótól és α az egyenes normálisának az x -tengellyel bezárt szöge. Az F függvény $R^t F$ duális Radon transzformáltja az az $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett függvény, melyre

$$R^t F(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\alpha + \beta, \cos \alpha \sqrt{x^2 + y^2}) d\alpha,$$

ahol $x = \cos \beta \sqrt{x^2 + y^2}$.

Mielőtt tovább mennénk, érdemes a definíció egyszerűsítése érdekében az $F(\alpha, r)$ függvényértéket negatív r esetre is értelmezni, a teljesen természetes $F(\alpha, r) = F(\alpha + \pi, -r)$ egyenlőséggel. Ebben az esetben a definiáló integrál

$$R^t F(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha, \cos(\alpha - \beta)\sqrt{x^2 + y^2}) d\alpha$$

alakú lesz. Bontsuk most fel a $\cos(\alpha - \beta)$ kifejezést, és használjuk ki a β definícióját. Ekkor

$$R^t F(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha, x \cos \alpha + y \sin \alpha) d\alpha.$$

A már említett formálisnak tűnő kapcsolatnak komolyabb következménye is van. Az alábbi jól ismert, és a Fubini tétellel könnyen bizonyítható tétel azt állítja, hogy a duális Radon transzformáció éppen a Radon transzformáció duálisa [2].

Tétel 2.1. *Legyen $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ és $F \in C(\mathbb{P}^2)$. Ekkor*

$$\int_{\mathbb{P}^2} Rf(\alpha, r) F(\alpha, r) \frac{dr d\alpha}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) R^t F(x, y) dx dy.$$

Az állítás igazi jelentősége a Radon transzformáció illetve duálisának nagyobb függvényterekre, például disztribúciókra való kiterjesztésekor mutatkozik meg, de ennek részletezése meghaladná e cikk kereteit.

Más fontos transzformációk vizsgálatakor is érdekes kapcsolatokat találhatunk a Radon transzformációval.

Tétel 2.2. *Legyen $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ és $F \in C(\mathbb{P}^2)$.*

1. *Ha $T_{(a,b)}f(x, y) = f(x+a, y+b)$, vagyis a $T_{(a,b)}f$ függvény a $(-a, -b)$ vektorral eltolt f függvény, akkor*

$$RT_{(a,b)}f(\alpha, r) = Rf(\alpha, r + a \cos \alpha + b \sin \alpha).$$

2. *Ha $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ a Laplace operátor és $\diamond = \frac{\partial^2}{\partial r^2}$, akkor*

$$R\triangle f = \diamond Rf \quad \text{és} \quad R^t \diamond F = \triangle R^t F.$$

3. *Ha $\mathcal{F}_1$ az 1-dimenziós és $\mathcal{F}_2$ a 2-dimenziós Fourier transzformáció, akkor $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F}_1 Rf$.*

Bizonyos értelemben a harmadik állítás a legérdekesebb, mert abból szinte azonnal kaphatnánk inverzformulát a Radon transzformációra. Mivel azonban a Fourier transzformáció már magasabb matematika, és elemibb út is létezik, mi most ennek bizonyításától eltekintünk.

Bizonyítás. 1. Az állítást könnyű számolással bizonyíthatjuk, de egyszerű geometriai megfontolással is eljuthatunk hozzá. Itt arról van szó, hogy az integrálás szempontjából az f függvény $(-a, -b)$ -vel való eltolása egyenértékű az (α, r) egyenes (a, b) -vel való eltolásával, amikor is a koordinátái $(\alpha, r + a \cos \alpha + b \sin \alpha)$ -re változnak.

2. Az első állításhoz elég látnunk, hogy

$$R \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, r) = \cos \alpha \frac{\partial Rf}{\partial r}(\alpha, r) \quad \text{és} \quad R \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, r) = \sin \alpha \frac{\partial Rf}{\partial r}(\alpha, r).$$

Mivel ezek bizonyítása igen hasonló, csak az elsőt bizonyítjuk. Ez azonnal következik a derivált definíciójából, és előző állításunkból.

$$\begin{aligned} R \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, r) &= R \left(\lim_{a \rightarrow 0} \frac{T_{(a,0)}f - f}{a} \right) (\alpha, r) = \lim_{a \rightarrow 0} R \left(\frac{T_{(a,0)}f - f}{a} \right) (\alpha, r) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{Rf(\alpha, r + a \cos \alpha) - Rf(\alpha, r)}{a} \right) = \cos \alpha \frac{\partial Rf}{\partial r}(\alpha, r). \end{aligned}$$

Itt azt is felhasználtuk, hogy a határérték felcserélhető az R Radon transzformációval, de ezt az f függvényre kirótt feltételünk biztosítja.

A másik állításunk igazolásához, fel kell használnunk az R^t duális Radon transzformáció egyszerűsített definícióját. Tudva az F függvényre kivetett feltételeket,

$$\begin{aligned} \Delta R^t F(x, y) &= \Delta \int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha, x \cos \alpha + y \sin \alpha) d\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Delta (F(\alpha, x \cos \alpha + y \sin \alpha)) d\alpha \end{aligned}$$

adódik. Felhasználva most a $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplace operátort és elvégezve a

$$\frac{\partial}{\partial x} (F(\alpha, x \cos \alpha + y \sin \alpha)) = \cos \alpha \frac{\partial F}{\partial r}(\alpha, x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

stb. deriválásokat, éppen az állítást fogjuk kapni. ■

Az ebben a szakaszban utolsó tételünket az irodalom tartótételnek nevezi, mivel lényegében azt állítja, hogy az f függvény tartója, része az Rf függvény tartójának. Az ilyen tételeknek természetes következménye az R Radon transzformáció invertálhatósága, de annál általában jóval tágabb függvényosztályokra igazolhatóak. Ugyanakkor az inverzformulákból igen ritkán, és akkor is csak nehézkesen igazolható tartótétel.

A tartótételeknek gyakorlati jelentőségük is van. Azt jelentik, hogy úgy is lehet invertálni, hogy a sík egy konvex részét metsző egyeneseket nem használjuk. Természetesen ekkor csak az ezen a részen kívül eső területen kapjuk meg az eredeti függvényt. Ez a lehetőség pedig módot ad a röntgensugárra érzékeny testrészeknek a vizsgálatból való kihagyására, anélkül, hogy le kellene mondanunk a többi rész vizsgálatáról.

Tétel 2.3. *Teljesítse az $f \in C(\mathbb{R}^2)$ függvény az alábbi feltételeket:*

- (1) *Minden k természetes számra, $f(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}^k$ korlátos.*
- (2) *Létezik olyan A konstans, melyre $Rf(\alpha, r) = 0$ ha $r > A$.*
Ekkor $f(x, y) = 0$, ha $\sqrt{x^2 + y^2} > A$.

Mivel az állítás teljes bizonyítása igen bonyolult megfontolásokat igényelne, mi csak egy egyszerűbbet fogunk bizonyítani, mégpedig azt az esetet, amikor az f függvény radiális, vagyis létezik olyan valós g függvény, melyre $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$. Ebben az esetben az (1) feltételre nincs is szükségünk.

Bizonyítás. Mindenekelőtt, vegyük észre, hogy Rf is radiális, ha az f radiális, vagyis létezik olyan Rg valós függvény, melyre $Rf(\alpha, r) = Rg(r)$. A Radon transformáció definíciója szerint ekkor

$$Rg(r) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{r^2 + t^2}) dt$$

és az $s = \frac{1}{\sqrt{r^2 + t^2}}$ új változó helyettesítése után

$$Rg(r) = \frac{2}{r} \int_0^{1/r} g\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{s^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2} - s^2}} ds$$

adódik. Legyen $w(\frac{1}{r}) = Rg(r)\frac{r}{2}$ és $v(s) = g(\frac{1}{s})\frac{1}{s^2}$. Ekkor az egyenlet alakja

$$w(p) = \int_0^p v(s) \frac{1}{\sqrt{p^2 - s^2}} ds$$

és a célunk a v függvény kifejezése a w -ből. Ennek érdekében megszorozzuk $\frac{p}{\sqrt{r^2 - p^2}}$ -vel, integrálunk és alkalmazzuk a Fubini tételt:

$$\begin{aligned} \int_0^r w(p) \frac{p}{\sqrt{r^2 - p^2}} dp &= \int_0^r \int_0^p v(s) \frac{1}{\sqrt{p^2 - s^2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - p^2}} ds p dp \\ &= \int_0^r v(s) \left(\int_s^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - p^2}} \frac{1}{\sqrt{p^2 - s^2}} p dp \right) ds. \end{aligned}$$

Ez utóbbi belső integrálról az olvasó könnyen kiszámolhatja a $t = \frac{r^2+s^2-2p^2}{r^2-s^2}$ helyettesítéssel, hogy az éppen π , így az integrálegyenletünkéből

$$\int_0^r w(p) \frac{p}{\sqrt{r^2-p^2}} dp = \pi \int_0^r v(s) ds$$

lesz. Ezt r szerint deriválva azonnal megkapjuk a v függvényt.

$$v(r) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_0^r w(p) \frac{p}{\sqrt{r^2-p^2}} dp$$

Ennek alapján nézzük végig, mi következik abból, ha $Rf(p) = 0$ minden $p > A$ esetén. Először is a $w(\frac{1}{r}) = Rg(r)\frac{r}{2}$ definíció szerint, $w(p) = 0$ lesz, ha $p < 1/A$. Ebből a fenti formula alapján azt kapjuk, hogy $v(r) = 0$ lesz, ha $r < 1/A$. Végül a $v(s) = g(\frac{1}{s})\frac{1}{s^2}$ definícióból adódik az állítás, hogy $g(s) = 0$, ha $s > A$. ■

Itt még elmondjuk, hogy a radiális függvényekre itt bemutatott bizonyítást ki lehet terjeszteni olyan módon, hogy abból már az eredeti 2.3. tétel is adódik.

3. Az invertálhatóság

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a Radon transzformáltból, vagyis egy függvénynek az egyenesen vett integráljaiból, explicit módon rekonstruálható az eredeti függvény. Figyeljük meg, hogy a formula az Rf Radon transzformált minden egyenesen felvett értékét felhasználja ahhoz, hogy az f függvényt meghatározza.

Tétel 3.1. Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, melyre $f(x, y)\sqrt{x^2+y^2}^k$ minden k természetes számra korlátos. Ekkor $f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} R^t F(x, y)$, ahol

$$F(\alpha, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t-p|>\varepsilon} \frac{\partial Rf(\alpha, p)}{\partial p} \frac{dp}{t-p}.$$

Bár ez az állítás szépsége mellett elég egyszerűnek is tűnik, a látszat csal. A bizonyítás meglehetősen hosszús, és aprólékos okoskodást igényel. Talán éppen ez az, amiért igen sok fajta bizonyítást ismerjük, a legkülönbözőbb kiindulási pontokból. Mi most egy olyan inverzformulát fogunk bizonyítani, amelyet jóval egyszerűbben lehet belátni, de sajnos nem mutatja olyan világosan az inverz operátor szerkezetét.

Tétel 3.2. Legyen $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Ekkor

$$f(x, y) = \frac{-1}{2\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} \frac{dt}{t},$$

ahol

$$F(x, y, t) = \int_{-\pi}^{\pi} Rf(\alpha, t + x \cos \alpha + y \sin \alpha) d\alpha.$$

Amint az olvasó is láthatja, az $F(x, y, t)$ függvény az (x, y) középpontú t sugarú kört érintő egyenesek halmazán integrálja az Rf Radon transzformáltat.

Bizonyítás. Először figyeljük meg, hogy a tételben szereplő minden művelet az eltolással felcserélhető, amiért elég a bizonyítást az $(x, y) = (0, 0)$ origóban elvégezni. Ebben az esetben

$$F(t) = F(0, 0, t) = \int_{-\pi}^{\pi} Rf(\alpha, t) d\alpha.$$

Beírva ide Rf definícióját, az

$$F(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \alpha + s \sin \alpha, t \sin \alpha - s \cos \alpha) ds d\alpha$$

képletet kapjuk. Helyettesítsük most az $r \cos \beta = t \cos \alpha + s \sin \alpha$ és az $r \sin \beta = t \sin \alpha - s \cos \alpha$ új változókat. Ekkor $s = \sqrt{r^2 - t^2}$ és $\cos(\beta - \alpha) = t/r$, amiért $\frac{ds}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - t^2}}$ és $\frac{d\beta}{d\alpha} = 1$, ami az

$$F(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_t^{\infty} f(r \cos \beta, r \sin \beta) \frac{r}{\sqrt{r^2 - t^2}} dr d\beta$$

egyenletre vezet. Érdemes most bevezetnünk az $Mf(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos \beta, r \sin \beta) d\beta$ függvényt. Ezzel a jelöléssel

$$F(t) = \int_t^{\infty} \frac{r Mf(r)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dr.$$

Most a tartótételnél már felhasznált trükköt hasznosítjuk újra, amikor $F(t)$ -t integráljuk.

$$\int_q^{\infty} \frac{q F(t)}{t \sqrt{t^2 - q^2}} dt = \int_q^{\infty} Mf(r) \left(\int_q^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - t^2}} \frac{q}{\sqrt{t^2 - q^2}} \frac{dt}{t} \right) dr.$$

Itt is az utóbbi belső integrált számolhatjuk ki könnyen, a $p = \frac{1}{t}$ helyettesítés ugyanis éppen a tartótételnél már kiszámított integrált adja, vagyis $\pi \cdot t$. Emiatt viszont

$$\int_q^\infty Mf(r)\pi \, dr = \int_q^\infty \frac{qF(t)}{t\sqrt{t^2 - q^2}} \, dt.$$

Láthatólag, egy q szerinti deriválás, és utána a $q \rightarrow 0$ határérték képzése a baloldalon éppen $-2\pi^2 f(0)$ -t eredményez, ami már az eredeti függvény rekonstruálhatóságát jelenti. Ahhoz, hogy az explicit formulát is megkapjuk, ezt a két műveletet a jobb oldalon is végre kell hajtanunk. Ehhez helyettesítsük most a $t = q\sqrt{z^2 + 1}$ változót,

$$\int_q^\infty Mf(r)\pi \, dr = \int_0^\infty \frac{F(q\sqrt{z^2 + 1})}{z^2 + 1} \, dz$$

majd deriváljunk

$$-\pi Mf(q) = \int_0^\infty \frac{F'(q\sqrt{z^2 + 1})}{\sqrt{z^2 + 1}} \, dz.$$

(Természetesen itt meg kellene vizsgálni ezen lépéseink jogosságát, amit mi csak azért nem teszünk meg, mivel elég egyszerű a dolog, de az egész gondolatmenetet képes lenne elhomályosítani.) Ebből már igen egyszerűen adódik az állítás a $t = z/q$ új változó helyettesítése, majd a $q \rightarrow 0$ határérték segítségével. ■

Felmerül a kérdés, hogy esetleg kevesebb ismeret is elég lehet az f függvény rekonstruálásához. Meg lehet mutatni, hogy amennyiben tetszőleges, de végtelen sok irány mindegyik egyenesére ismerjük a Radon transzformáltat, az már elég, vagyis abból az eredeti függvény visszaállítható. Ezzel ellentétben az alábbi tétel azt mutatja, hogy véges sok irány semmiképpen sem lehet elég minden függvény rekonstruálhatóságához.

Tétel 3.3. *Legyenek adottak az $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tetszőleges szögek. Ekkor létezik olyan $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ nem triviális függvény, melyre $Rf(\alpha_i, p) = 0$ minden $1 \leq i \leq k$ és $p \in \mathbb{R}$ esetén.*

Ezzel azonban még nincsen lezárva e kérdéskör. R.J.Gardner és P.McMullen bebizonyította például [1], hogy a konvex halmazok karakterisztikus függvényeit, mindössze négy előre lerögzített speciális irány ismeretében is lehet rekonstruálni.

4. Általánosítások és problémák

A Radon transzformációnak igen sok általánosítása létezik. Az általánosítás alapvető szempontja általában az, hogy valamely, az adott szempontból fontos tulajdonságot megőrizzen vagy tovább fejlesszen.

A legkézenfekvőbb általánosítás a dimenzió megváltoztatásából áll. Ahogy mi ismerjük most, a Radon transzformáció a 2-dimenziós térben a $2 - 1 = 1$ -dimenziós egyeneseken integrál. Az általánosítás első lépése, aminek az eredményét a szakirodalom klasszikus Radon transzformációnak nevezi, a 2-dimenzió tetszőleges n -dimenzióra való kiterjesztése azzal, hogy az integrálás az $(n - 1)$ -dimenziós ún. hipersíkokon történik. (Az n -dimenziós térben hipersíknak nevezzük, az $(n - 1)$ -dimenziós alterek eltoltjait.)

Ezt az általánosítást már Radon is elvégezte, és egy érdekes dologra bukkant. Amint mi is láttuk, 2-dimenzióban a Radon transzformáció invertálásához tudni kell a sík összes egyenesén az Rf függvényt. Ezzel szemben kiderült, hogy 3 dimenzióban ahhoz, hogy egy P pontban megkapjuk az f függvény értékét, elegendő ismerni az Rf értékét mindössze azon egyeneseken, melyek a P ponthoz egy akármilyen előre adott kis távolságnál közelebb vannak. Ezt a tulajdonságot úgy szokás kifejezni, hogy 2 dimenzióban az inverz Radon transzformáció globális, 3 dimenzióban pedig lokális. Általánosságban is elmondhatjuk, hogy páros dimenzióban az inverz Radon transzformáció globális, páratlan dimenzióban pedig lokális. A globális-lokális probléma egyébként minden további általánosításnál is kulcskérdés.

Ahhoz, hogy a globális-lokális problémát igazán megértsük, írjuk most fel az $f = cDR^tRf$ inverzformulát, ahol R a Radon transzformáció, R^t a duálisa, amely most az adott ponton átmenő hipersíkok halmazán integrál, és c egy megfelelő konstans. Páratlan dimenzióban a $\mathcal{D}$ operátor csak differenciálásokat tartalmaz, páros dimenzióban viszont egy integrálást is, és ez okozza a globális-lokális eltérést, mivel a differenciáláshoz elég az adott pontnak egy tetszőlegesen kicsiny környezetét ismerni, míg az integráláshoz ez persze kevés lenne.

A globális-lokális probléma elméleti jelentőségét a legegyszerűbben egy alkalmazáson keresztül ismerhetjük fel. Az egyik legszebb alkalmazás a parciális differenciálegyenletek területére esik. Írjuk most az inverzformulánkat az egyszerű $f = R^{-1}Rf$ alakban, és legyen $\mathcal{D}$ egy konstans együtthatós differenciáloperátor. A feladatunk a $\mathcal{D}u = f$ parciális differenciálegyenlet megoldása, ahol $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definiáljuk az $f_\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvényt minden ω egységvektorra azzal, hogy $f_\omega(X)$ az Rf Radon transzformálnak azon a hipersíkon felvett értéke, mely átmegy az X ponton, és merőleges az ω egységvektorra. Ekkor f_ω olyan függvény lesz, mely minden az ω egységvektorra merőleges hipersíkon konstans.

Az ilyen függvényeket "síkhullámnak" szokás nevezni. Ezek lényegében egyváltozós függvénynek tekinthetők, mivel nyilván létezik olyan $\bar{f}_\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, melyre $f_\omega(X) = \bar{f}_\omega(\langle X, \omega \rangle)$, ahol $\langle X, \omega \rangle$ az X és az ω vektorok skaláris szorzata.

Tekintsük a $\mathcal{D}u_\omega = f_\omega$ parciális differenciálegyenletet. Mivel az f_ω függvény síkhullám, ez lényegében egy egyváltozós rendes differenciálegyenlet, amit az esetek többségében könnyen meg lehet oldani. Bizonyos esetekben azért előfordulhat, hogy nincs megoldás, például ha a $\mathcal{D}$ differenciáloperátor minden ω irányú síkhullámra nullát ad. 1963-ban Trèves bizonyította, hogy ha ettől az esettől eltekintünk, akkor az u_ω megoldások mindig választhatóak úgy, hogy azok függése az ω egységvektortól sima legyen. Vegyük most azt az F függvényt a hipersíkok halmazán, mely minden hipersíkon az azon konstans u_ω függvény értékét veszi fel (vagyis ω merőleges a hipersíkra). Definiáljuk továbbá a v függvényt úgy, hogy minden X pontban az értéke $u_\omega(X)$, ahol az X és az ω vektorok párhuzamosak. Ekkor az $u = R^{-1}F$ függvény a $\mathcal{D}u = f$ parciális differenciálegyenletnek egy megoldása, mert

$$\mathcal{D}u = \mathcal{D}R^{-1}F = R^{-1}\mathcal{D}v = R^{-1}Rf = f.$$

Ezzel a módszerrel igen jól kezelhető például a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad u(X, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(X, 0) = f(X)$$

Cauchy probléma is [2]. Mivel pedig páratlan dimenzióban az R^{-1} inverz Radon transzformáció lokális, azt is könnyű belátni, hogy az $u(X, t)$ érték egyértelműen meghatározott az f függvénynek az X középpontú t sugarú körön, és annak tetszőlegesen kicsiny környezetében felvett értékei által. Három dimenzióban speciálisan a szokásos eredmény adódik, vagyis, hogy már maga a kör is meghatározza az értéket. Ezt nevezik Huygens elvnek.

Tovább is mehetünk a dimenzióbeli általánosítással, amennyiben nem csak a térnek, mint eddig, hanem annak a dimenzióját is megváltoztatjuk, amin integrálunk. Amikor az n -dimenziós térben a k -dimenziós hipersíkokon (a k -dimenziós alterek eltoltjai) integrálunk, azt (n, k) Radon transzformációnak, vagy röviden csak k -sík transzformációnak nevezzük. Ha $k = 1$, akkor Röntgen-sugar transzformációról beszélünk, és természetesen $k = n - 1$ esetén "csak" Radon transzformációt mondunk. Itt tudunk igazi választ adni a globális-lokális problémára, ugyanis itt derül ki, hogy a különbséget nem a befoglaló tér dimenziója okozza, hanem a k -sík dimenziója. A k -sík transzformáció inverze globális, ha k páratlan, és lokális, ha k páros.

A tér szerkezetének tekintetében tovább általánosíthatunk, amennyiben a gömbön és a Bolyai geometriában, vagy akár egészen általános tereken is

megvizsgáljuk a hasonló problémát. Van azonban még általánosítási lehetőség az Euklideszi geometriában is.

Eddig mindig a természetes hossz, felület, térfogat stb. mérték szerint integráltunk. Általánosított Radon transzformációnak nevezik azt, amikor ezt megváltoztatjuk egy megfelelő, általában szigorúan pozitív függvénnyel súlyozva. Az általunk vizsgált 2 dimenzióban tehát

$$R_\mu f(\alpha, r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \alpha + t \sin \alpha, r \sin \alpha - t \cos \alpha) \mu(\alpha, r, t) dt$$

a megfelelő formula, ahol a μ függvény a súlyfüggvény. Ha ez a μ függvény a t változóban exponenciális, akkor exponenciális Radon transzformációról beszélünk. Ebben az esetben ismerünk ugyan néhány inverzformulát, de általában a kérdés úgy merül fel, hogy milyen μ esetén lesz ez a transzformáció invertálható. Ilyenkor az R_μ valamiféle invarianciája, vagy a μ függvény specialitásai kerülnek előtérbe. Például, ha a μ függvény analitikus, vagy ha az R_μ forgás- vagy eltolás-invariáns, akkor az R_μ általánosított Radon transzformáció invertálható. Ez utóbbi két tulajdonság azt jelenti, hogy ha az f függvényt elforgatjuk az origó körül, akkor az $R_\mu f$ transzformált függvény is ugyanakkora szöggel fordul el az origó körül, illetve ha eltoljuk az f függvényt, akkor az $R_\mu f$ transzformált függvény is ugyanúgy eltolódik. Érdekes megjegyezni, hogy az eltolás-invariáns és az exponenciális általánosított Radon transzformációk egybeesnek.

Végül még egy utolsó általánosítási utat említünk. Megtehetjük ugyanis, hogy nem az egyeneseken integrálunk, hanem valamilyen más görbeseregen. Egy ilyen transzformációt könnyen kaphatunk az R^t duális Radon transzformáció csekély módosításával is. Figyeljük meg ugyanis, hogy egy az adott ponton átmenő egyenes origóhoz legközelebbi pontja, Thalesz tétele értelmében arra a körre esik, melynek átmérője az origó és az adott pont által alkotott szakasz. Azt a transzformációt, ami egy $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ függvényt az origón átmenő körökön integrál, bumeráng transzformációnak nevezzük. A Bf bumeráng transzformáltra ekkor a

$$Bf(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha}{2}, \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2} \sin \alpha}{2}\right) d\alpha$$

formula adódik. Érdekes dolog, hogy ez az egyszerű transzformáció fontos szerepet játszik Hilbert negyedik problémájának megoldásában.

Természetesen más görbéket is vehetünk a kör helyett, például az ellipszist, háromszöget stb., így bőven marad lehetőség mindenkinek ezen a sok szép általános eredményt ismerő területen a konkrét problémák vizsgálatában.

References

- [1] R. J. GARDNER and P. McMULLEN, On Hammer's X-ray problem, *J. London Math. Soc.*, **21** (1980), 171–175.
- [2] S. HELGASON, *Radon transform*, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [3] J. RADON, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig – Math-Nat. kl.*, **69** (1917), 262–277.
- [4] R. S. STRICHARTZ, Radon inversion – variations on a theme, *Amer. Math. Monthly*, **89** (1982), 377–384.
- [5] L. A. SHEPP and J. B. KRUSKAL, Computerized tomography: the new medical X-ray technology, *Amer. Math. Monthly*, **85** (1978), 420–439.

Feladatok.

- (1) Invertáljuk a folytonos radiális függvények terén a bumeráng transzformációt!
- (2) Irjunk fel formulát az ε excentricitású ellipsziseken integráló Radon típusú transzformációra!
- (3) Van-e olyan nem nulla függvény, melynek nulla a bumeráng transzformáltja?

KURUSA Á., JATE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.; *e-mail*: kurusa@math.u-szeged.hu