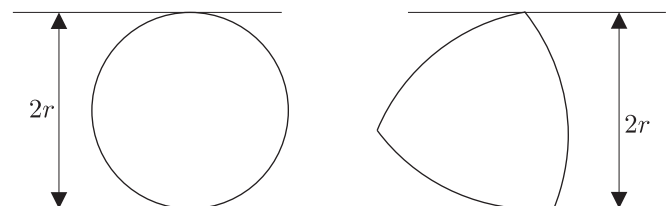


Felismerhető-e egy alakzat az árnyékképeiből?

KINCSES JÁNOS and KURUSA ÁRPÁD

1. Bevezetés

Közismert, hogy a repülőtereken az utasok csomagjait átvilágítják. Ilymódon az ellenőrző személy a csomag kibontása nélkül láthatja a csomagban levő fémtárgyak árnyékát. Vajon elég-e ez ahhoz, hogy felismerje azok alakját? A válasz nyilván nem, hiszen mondjuk egy kör alakú fémlapnak és egy gömb alakú bombának ugyanaz lehet az árnyéka. Sőt adott esetben még az sem elég, ha minden irányból átvilágítjuk a csomagot. Gondoljunk csak az r sugarú körre és a $2r$ sugarú körökből összerakott Relaux háromszögre.



1. ábra

Mindkettőnek minden irányból $2r$ hosszúságú szakasz az árnyéka.

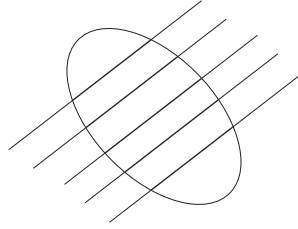
Változtassunk egy kicsit a modellünkön. Párhuzamos sugarak helyett alkalmazzunk egy pontból kiinduló sugarakat. Ebben az esetben az alakzat árnyéka éppen az adott pontból vett látószöge lesz. Ez a szög a pontból az alakzathoz húzott két érintő szöge. Így eljutunk a következő kérdéshez:

Kérdés. Egy kör belsejében levő két konvex alakzat a kör bármely pontjából ugyanakkora szög alatt látszik. Igaz-e, hogy a két alakzat egybeesik?

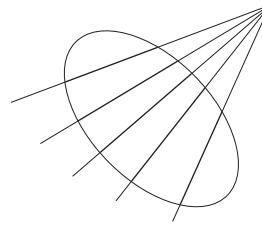
Itt azért szerepel csak konvex alakzat, mert egy síkidomnak és a konvex burkának bármely pontból ugyanaz a látószöge.

Az ilyen jellegű kérdések a matematikai alakfelismerés témakörébe esnek, ezen belül a fenti kérdés a Hammer féle röntgenkép problémához kapcsolódik: Hány

röntgenképet kell készíteni egy konvex alakzatról, hogy ezekből a képekből rekonstruálni lehessen az adott testet? Egy adott irányból készített röntgenképen azt értjük, hogy ismerjük az adott iránnyal párhuzamos egyenesek által az alakzatról kimetszett szakaszok hosszát (lásd 2.a ábra). Egy adott pontból készített röntgenkép alatt pedig azt értjük, hogy ismerjük az adott ponton átmenő egyenesek által az alakzatról kimetszett szakasz hosszát (lásd 2.b ábra).



2.a ábra



2.b ábra

Mindkét esetben elegáns megoldás van. Az első esetben Gardner és McMullen [2] igazolták, hogy létezik négy olyan irány, hogy ha bármely két alakzatnak ezen négy irányból vett röntgenképe megegyezik, akkor egymás eltoltjai. A másik esetben Falconer [1] bizonyította, hogy ha két, az alakzatról metsző egyenesen levő pontból megegyeznek a röntgenképek, akkor a két alakzat egybeesik.

Az általunk felvetett kérdésnek nem várható ilyen egyszerű megoldása, hiszen nyilvánvaló, hogy véges sok pontból vett árnyékkép nem határozza meg az alakzatot. Ennek az az oka, hogy a röntgenkép sokkal több információt hordoz, mint az árnyékkép (viszont az árnyékképet egyszerűbb elkészíteni). Az általunk vizsgált árnyékkép elég lesz ahhoz, hogy két sokszöget megkülönböztessünk, ami nem igaz a párhuzamos sugarak által adott árnyékokra, amint azt a Polygon előző számában szereplő 10. feladat mutatja.

2. Eredmények és ellenpéldák

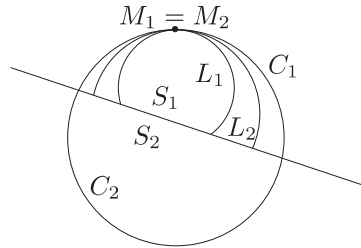
Egy síkbeli K konvex halmaz esetén definiáljuk a következő függvényt

$$\alpha_K(X) = \text{az } X \text{ pontból a } K\text{-hoz húzott érintők szöge.}$$

Először a legegyszerűbb esetet tárgyaljuk, amikor a K halmaz pozitív hosszúságú szakasz.

Lemma 2.1. *Ha a C kör belsejében fekvő S_1 és S_2 szakaszok a kör bármely pontjából ugyanakkora szög alatt látszanak, akkor a két szakasz egybeesik.*

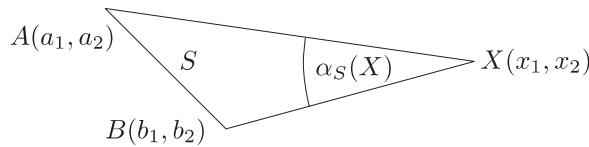
Bizonyítás. Mindkét szakasz ugyanarra az egyenesre esik, mivel az S_i szakasz egyenesének a körrel vett metszéspontjai lesznek az α_{S_i} függvény zéróhelyei. Ez a közös egyenes a kört a C_1 és C_2 ívekre bontja. A továbbiakban kiválasztjuk az egyik ívet, mondjuk C_1 -et, és ezen vizsgáljuk az $\alpha_S = \alpha_{S_1} = \alpha_{S_2}$ függvényt. Az α_{S_i} szintvonalai éppen az S_i szakasz látókörivei lesznek. Ebből adódik, hogy az α_{S_i} a maximumát abban az egyértelműen meghatározott M_i pontban veszi fel, amelyre teljesül, hogy az S_i szakasznak az M_i ponton átmenő L_i látókörive érinti a C -t az M_i pontban (lásd 3. ábra).



3. ábra

Ekkor a függvények egyenlősége miatt $M_1 = M_2$ és így az L_i ívek egymást is érintik, ezért az egyik szakasz tartalmazza a másikat. Mivel az $M_1 = M_2$ pontból a szakaszok ugyanakkora szög alatt látszanak, így szükségképpen $S_1 = S_2$. ■

A következő lépés a 2.1. Lemma “lokális” változatának igazolása. Ehhez szükségünk lesz az α_S függvény formulával való megadására.



4. ábra

A 4. ábra jelöléseivel kapjuk, hogy

$$\cos \alpha_S = \frac{\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}}{\|\overrightarrow{XA}\| \cdot \|\overrightarrow{XB}\|},$$

ahol a számlálóban a két vektor skaláris szorzata, a nevezőben pedig a vektorok hosszának szorzata áll. A skaláris szorzatra ismert analitikus geometriai formulát behelyettesítve, kapjuk, hogy

$$(1) \quad \cos \alpha_S = \frac{(a_1 - x_1)(b_1 - x_1) + (a_2 - x_2)(b_2 - x_2)}{\sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2} \sqrt{(b_1 - x_1)^2 + (b_2 - x_2)^2}},$$

Lemma 2.2. *Ha a C kör belsejében fekvő S_1 és S_2 szakaszokhoz létezik a C körnek egy (akármilyen kicsi) C' köríve, hogy ezen ív bármely pontjából mindkét szakasz ugyanakkora szög alatt látszik, akkor a két szakasz egybeesik.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy C egységsugarú kör. Helyettesítsük be a $\cos \alpha_{S_1}$ illetve a $\cos \alpha_{S_2}$ függvényekbe a C kör $(\cos t, \sin t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ paraméteres előállítását:

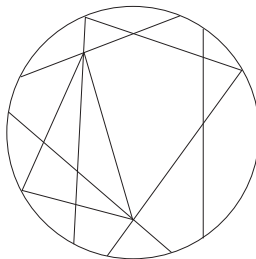
$$\cos \alpha_{S_1} = \frac{(a_1 - \cos t)(b_1 - \cos t) + (a_2 - \sin t)(b_2 - \sin t)}{\sqrt{(a_1 - \cos t)^2 + (a_2 - \sin t)^2} \sqrt{(b_1 - \cos t)^2 + (b_2 - \sin t)^2}}$$

Az így kapott két analitikus függvény (azért analitikusak, mert analitikus függvényekből vannak összerakva) megegyezik egy nyílt intervallumon, így a teljes értelmezési tartományon egyenlők (lásd [5] 8.5. Tétel). Viszont ekkor az előző lemma szerint $S_1 = S_2$. ■

Poligonok esetében most már pozitív választ tudunk adni a bevezetőben feltett kérdésünkre.

Tétel 2.3. *Ha a C kör belsejében levő P_1 és P_2 konvex poligonok a kör bármely pontjából ugyanakkora szög alatt látszanak, akkor a két poligon egybeesik.*

Bizonyítás. A P_1 és a P_2 poligonok oldalegyeneseinek a C -vel vett metszéspontjai a kört véges sok ívre bontják fel (lásd 5. ábra).



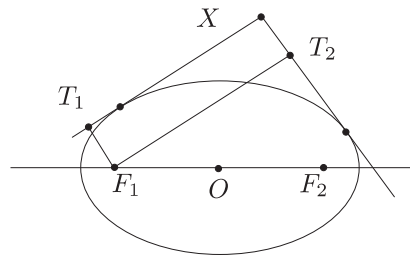
5. ábra

Minden ilyen ívhez létezik a P_1 illetve a P_2 egy-egy olyan átlója, hogy az ív bármely pontjából a P_1 ill. P_2 ezen átlóit látjuk, azaz a poligon látószöge ezen pontokból éppen az illető átló látószöge lesz. Ugyanakkor a P_1 (P_2) bármely csúcsához létezik egy olyan "látható" átlója a P_1 -nek (P_2 -nek), amelyiknek az adott csúcs végpontja. A 2.3. Lemma felhasználásával kapjuk, hogy az ugyanazon ívnek megfelelő átlók megegyeznek. Ez viszont azt jelenti, hogy a P_1 bármely csúcsa a P_2 -nek is csúcsa lesz és megfordítva, azaz $P_1 = P_2$. ■

Mivel bármely konvex alakzat tetszőlegesen megközelíthető poligonokkal, így azt várhatnánk, hogy a fenti tételben folytonossági megfontolásokkal áttérhetünk általános konvex alakzatokra.

Meglepő módon azonban, ez nem így van, amit az alábbi példa is mutat (lásd [6] 6.48. feladat).

Példa 2.4. *Bármely ellipszis esetén azon pontok halmaza, amelyből az ellipszis derékszög alatt látszik, kör.*



6. ábra

Bizonyítás. Az 6. ábra jelöléseit használva kapjuk, hogy

$$OX^2 + OF_1^2 = OT_1^2 + OT_2^2.$$

(Ennek belátását az olvasóra bizzuk.) Tudjuk viszont, hogy a fókuszokból az érintőre bocsájtott merőlegesek talppontjai a főkörön vannak, azaz $OT_1 = OT_2 = r$. Tehát

$$OX^2 = 2r^2 - OF_1^2.$$

■

Ha most vesszük a fenti példában szereplő kört és a vele koncentrikus $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ször akkora sugarú kört, akkor az ellipszis és ez a kör is derékszög alatt látszik a nagy kör minden pontjából.

Ha egy adott körrel koncentrikus köröket tekintjük, akkor ezek között vannak olyanok is amelyek megkülönböztethetők bármely más konvex alakzattól (lásd Polygon I.1., feladatrovat, 9. feladat). Ennek bizonyítását ismertetjük most.

Állítás 2.5. *Ha az egységsugarú C kör belsejében fekvő konvex alakzat a kör bármely pontjából $\alpha\pi$ ($0 < \alpha < 1$, α irracionális) szög alatt látszik, akkor csak kör lehet.*

Bizonyítás. Tekintsük azt a C -vel koncentrikus C' kört, amelyik éppen $\alpha\pi$ szög alatt látszik a C pontjaiból és legyen K egy olyan konvex alakzat, amely szintén $\alpha\pi$ szög alatt látszik. Ha $K \neq C'$, akkor nyilván egyik sem lehet része a másiknak, így van közös érintőjük. Az érintőnek a C -vel vett egyik metszéspontjából húzzuk meg a C' másik érintőjét. Ez is közös érintő lesz és az érintőkre a kör O középpontjából állított merőlegesek $(1 - \alpha)\pi$ szöget zárnak be. Ezt ismételve, kapjuk, hogy az O -n átmenő, az első közös érintő normálisával $n(1 - \alpha)\pi$ szöget bezáró minden egyenesre merőlegesen van közös érintő. Mivel α irracionális, így az $n(1 - \alpha)\pi$ szögek mindenütt sűrűn vannak az egységkör $[0, 2\pi]$ kerületén, azaz bármely O -n átmenő egyeneshez tetszőlegesen közel van olyan egyenes, amelyikre merőlegesen van közös érintő. Ez viszont csak úgy lehet, ha $C' = K$. ■

J.W.Green [3]-ban karakterizálta egy adott körrel koncentrikus körök közül azokat, amelyek megkülönböztethetők bármely más konvex alakzattól. Belátta, hogy pontosan azok a körök nem egyértelműen meghatározottak a látószögek alapján, amelyek $\frac{m}{n}\pi$ szög alatt látszanak, ahol m és n relatív prímek és m páratlan.

3. Egyenes és más görbék

Tekintsük most át az előző szakasz bizonyítását abból a szempontból, hogy a kör helyettesíthető-e egy másik görbével. A fenti gondolatmenet egy eljárást ad ilyen típusú eredmények igazolására.

Könnyen belátható, hogy a 2.1. Lemma igaz marad, ha kör helyett akármilyen konvex zárt görbét mondunk. A 2.2 Lemmában, a lokalizálás során arra építettünk, hogy a kör analitikus görbe, de éppen ezért az minden analitikus görbére igaz. Így tehát a következő általánosítást nyerjük a 2.3. Tételnek:

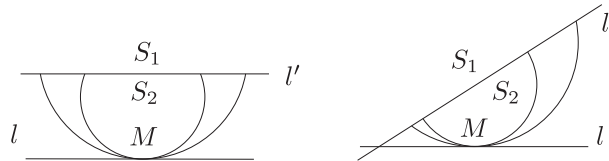
Tétel 3.1. Legyen C olyan konvex zárt görbe, amelynek van $(x_1(t), x_2(t))$ analitikus paraméterezése. Ha a C belsejében levő P_1 és P_2 konvex poligonok a C bármely pontjából ugyanakkora szög alatt látszanak, akkor a két poligon egybeesik.

Ez a tétel lefedi például az ellipszis esetét is. Módszerünk további lehetőségeket rejt magában. Vizsgáljuk meg például az egyenest. Először szakaszokra bizonyítjuk a 2.1. Lemma analogonját.

Lemma 3.2. Ha az S_1 és S_2 szakaszok az l egyenes ugyanazon oldalán vannak és az egyenes bármely pontjából ugyanakkora szög alatt látszanak, akkor S_1 és S_2 egybeesnek.

Bizonyítás. Két esetet különböztetünk meg.

Első eset: Ha a szakaszok ugyanazon az l' egyenesen vannak. Ez az eset a 2.1. Lemmához hasonlóan igazolható. Az $\alpha_S = \alpha_{S_1} = \alpha_{S_2}$ függvény egyetlen M pontban veszi fel a maximumát az l egyenesen, ha l' párhuzamos l -l, egyébként pedig az l és l' metszéspontja által meghatározott bármelyik félegyenesen van egy egyértelmű M maximumhely. Az M pontot az határozza meg, hogy az S_i szakasznak az M ponton átmenő látóköri íve érinti l -et az M pontban (lásd 7. ábra). Ez azt jelenti, hogy az egyik szakasz része a másiknak, ami csak akkor lehet ha $S_1 = S_2$ mivel a maximum értéke megegyezik.



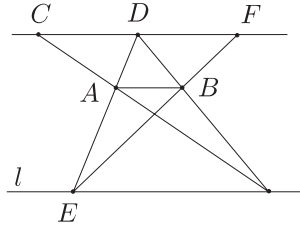
7.a ábra

7.b ábra

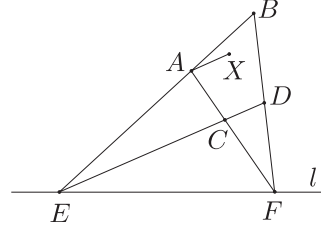
Második eset: Ha a szakaszok különböző egyeneseken vannak. Az $\alpha_{S_1} = \alpha_{S_2}$ függvénynek legfeljebb egy zéróhelye lehet, ezért vagy mindkét szakasz párhuzamos l -l, vagy a szakaszok egyenesei az l -en metszik egymást.

A eset: Ha a szakaszok párhuzamosak l -l. A 8.a ábra jelöléseivel, a párhuzamos szelők tétele szerint kapjuk, hogy $CD = DF$. Ez azt jelenti, hogy ED súlyvonala és egyben szögfelezője az EFC háromszögnek, ami adja, hogy ED merőleges CF -re. Ugyanígy kapjuk, hogy CB is merőleges CF -re, ami ellentmondás.

B eset: Ha a szakaszok egyenesei az l -en metszik egymást (lásd 8.b ábra). Tegyük fel, hogy AC az az egyenes, amelyiknek ugyanazon oldalára esnek a szakaszok.



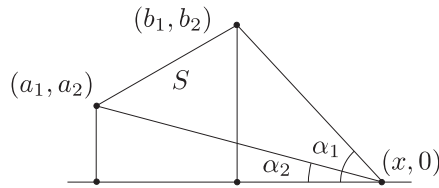
8.a ábra



8.b ábra

Ha AC párhuzamos l -l, akkor BD is, és az l pontjaiból ugyanakkora szögek alatt látszanak. Az A eset szerint ez lehetetlen.

Ha AC metszi l -et az F pontban, akkor BD is átmegy F -en.



9. ábra

Most a 9. ábra jelöléseit használva kapjuk, hogy egy S szakaszra

$$(2) \quad \begin{aligned} x \sin \alpha_S &= x \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = x(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2) \\ &= \frac{x \cdot b_2}{\sqrt{(x - b_1)^2 + b_2^2}} \cos \alpha_2 - \frac{x \cdot a_2}{\sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}} \cos \alpha_1. \end{aligned}$$

ahol (a_1, a_2) és (b_1, b_2) az S végpontjainak koordinátái. Ebből határátmenettel kapjuk, hogy

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \alpha_S = b_2 - a_2,$$

ahol $b_2 - a_2$ geometriailag az S szakasz “magasságát” jelenti. A (3) formula szerint tehát az AB és CD szakaszok ugyanolyan magasak. Az 8.b ábra jelöléseit használva, toljuk el a CD szakaszt úgy, hogy a C pont az A pontba kerüljön, a D

pont képe legyen X . Mivel az EAF szög kisebb mint az ECF szög és az EBF szög kisebb, mint az ECF szög, ezért az X pont az AB és CD által meghatározott paralelogrammába esik. Ugyanakkor X rajta van a B -n átmenő, l -vel párhuzamos egyenesen is, mivel AX és AB magassága ugyanakkora. Ez csak úgy lehet, ha $X = B$, azaz AB párhuzamos CD -vel, de ez lehetetlen, mert az egyenesek metszik egymást az E pontban. ■

Ezután a “lokális” változat következik, amely bizonyításában is teljesen analóg a 2.3. Lemmával, hiszen az egyenes is analitikus görbe a $(t, 0)$ paraméterezéssel.

Lemma 3.3. *Ha az S_1 és S_2 szakaszok az l egyenes ugyanazon oldalán vannak és az egyenes egy intervallumának bármely pontjából ugyanakkora szög alatt látszanak, akkor S_1 és S_2 egybeesnek.*

Ezután a szakaszokról poligonokra való áttérés ugyanúgy megy mint a kör esetében.

Tétel 3.4. *Ha a P_1 és P_2 poligonok az l egyenes ugyanazon oldalán vannak és az egyenes bármely pontjából ugyanakkora szög alatt látszanak, akkor P_1 és P_2 egybeesnek.*

Ezzel kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy amint a körnél tapasztaltuk, itt se lehet bármely két konvex alakzatot megkülönböztetni. Ennek bizonyítása azonban elég hosszadalmas feladat, ezért ezt most mellőzzük.

Végül ezen eredmények segítségével sokszögekre is beláthatjuk a 2.3. Tétel analogonját.

Tétel 3.5. *Ha a P konvex poligon belsejében levő P_1 és P_2 konvex poligonok a P bármely pontjából ugyanakkora szög alatt látszanak, akkor $P_1 = P_2$.*

Bizonyítás. A P_1 és P_2 poligonok oldalegyeneseinek a P -vel vett metszéspontjai, valamint a P csúcsai a P -t véges sok egyenes szakaszra bontják. Minden ilyen szakaszhoz létezik a P_1 -nek illetve a P_2 -nek egy egy átlója, hogy a szakasz bármely pontjából ezek az átlók láthatók a megfelelő poligonból. A 3.3. Lemma szerint ekkor ezek az átlók megegyeznek, ami adja, hogy $P_1 = P_2$. ■

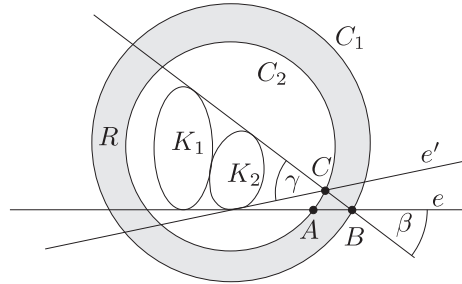
Látjuk tehát, hogy analitikus görbék és sokszögek esetében a poligonok megkülönböztethetők a látószögek segítségével.

4. További vizsgálatok, általánosítások

Az előző szakasz eredményei alapján egy kör nem elég két konvex alakzat megkülönböztetésére. Természetesen adódik az ötlet, hogy több pontból kellene megkövetelni a látószögek egyenlőségét. Ha nagyon mohók akarunk lenni, akkor próbálkozzunk egy körgyűrű pontjaival.

Tétel 4.1. *Legyen R a $C_1 \subset C_2$ koncentrikus körök által meghatározott körgyűrű. Ha a C_1 kör belsejében fekvő K_1 és K_2 konvex alakzatok a körgyűrű bármely pontjából ugyanakkora szög alatt látszanak, akkor $K_1 = K_2$.*

Bizonyítás. Ha $K_1 \neq K_2$ akkor egyik sem lehet a másikban, így van közös érintőjük. Legyen e egy közös érintő, és jelölje A és B az e -nek a körgyűrű köreivel vett metszéspontját (lásd 10. ábra).



10. ábra

A látószögek egyenlősége miatt B -ből is húzható közös érintő. Legyen ennek a C_1 körrel vett B -hez közelebbi metszéspontja C . Ugyancsak a látószögek egyenlősége miatt, a CB szakasz bármely pontjából húzható közös érintő. Azt kaptuk tehát, hogy ha e egy közös érintő, akkor az e -vel elég kis szöget bezáró bármely egyenessel párhuzamosan van közös érintő. Becsüljük meg ezt az "elég kis" szöget. Legyen C -nél a látószög γ , a BD ív és folytatás, ezért felveszi minimumát, ε_0 -at. Eszerint bármely közös érintővel legfeljebb ε_0 szöget bezáró egyenessel párhuzamosan van közös érintő. Ez pedig azt jelenti, hogy bármely egyenessel párhuzamosan van közös érintő, azaz $K_1 = K_2$. ■

Az a meggyőződésünk, hogy az igazság valahol a kör és a körgyűrű között van, amit Nietzsche [4] alábbi eredménye is alátámaszt.

Tétel 4.2. *Legyenek $C_1 \subset C_2$ koncentrikus körök. Ha a C_1 kör belsejében fekvő K konvex alakzat a C_1 kör bármely pontjából β_1 szög alatt és a C_2 kör bármely pontjából β_2 szög alatt látszik, akkor K kör.*

Irodalom

- [1] K. J. FALCONER, X-ray problems for point sources, *Proc. London Math. Soc.*, **46** (1983), 241–262.
- [2] R. J. GARDNER és P. McMULLEN, On Hammer's X-ray problem, *J. London Math. Soc.*, **21** (1980), 171–175.
- [3] J. W. GREEN, Sets subtending a constant angle on a circle, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 263–267.
- [4] J. C. C. NIETSCHE, Isoptic Characterization of a circle, (Proof of a Conjecture of M.S.Klamkin), *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 45–47.
- [5] W. RUDIN, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [6] STROHMAYER JÁNOS, *Geometriai példatár III.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

KINCSES J., JATE Bolyai Intézet Szeged, Aradi vértanúk tere 1.; *e-mail*: kincses@math.u-szeged.hu

KURUSA Á., JATE Bolyai Intézet Szeged, Aradi vértanúk tere 1.; *e-mail*: kurusa@math.u-szeged.hu

Summary

Can you recognize the shape of a figure from its shadows? The famous Hammer's X-ray picture problem was solved by P. McMullen (for the "parallel beam" case) and by K.J. Falconer (for the point sources). They proved that two convex bodies can be distinguished by X-ray photographs taken in certain sets of directions and from some two points respectively. In connection with this problem we discuss the question that what we can state if we take simpler pictures of the bodies. For a plane convex set we define the shadow picture of the set from a point as the angle at which the set can be seen from that point. We prove that

Theorem. *Let P_1 and P_2 two convex polygon inside a circle. If from each point of the circle the shadow pictures of the two polygons are equal then P_1 and P_2 coincide.*

For general sets we give counterexamples and we discuss some related questions.