

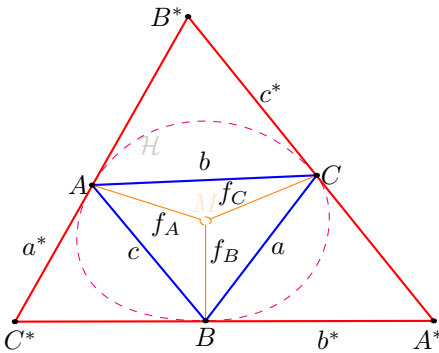
EGYMÁSBÁ ÍRT HÁROMSZÖGEK PERSPEKTIVITÁSA

KURUSA ÁRPÁD ÉS KOZMA JÓZSEF

KIVONAT. Megmutatjuk, hogy a háromszögek perspektivitása, a Ceva-tétel, valamint a kvadratikus görbék egy karakterisztikus tulajdonsága erősen kötődik egymáshoz.

1. BEVEZETŐ

Egy korábbi cikkünkben bebizonyítottuk [4, Theorem 4.2] a következőt.



Az egymásba írt $ABC\triangle$ és $A^*B^*C^*\triangle$ háromszögek esetén a belső $ABC\triangle$ háromszög csúcsain rendre átmenő azon f_A , f_B és f_C egyenesek, melyek harmonikus egyenesnégyeseket alkotnak az A , B és C csúcsokon áthaladó további három-három oldalegyenessel, nevezetesen a b, c, a^* , c, a, b^* és a, b, c^* oldalegyenes-hármasokkal, pontosan akkor illeszkednek egy közös pontra, ha van olyan ellipszis, melynek $ABC\triangle$ egy beírt, $A^*B^*C^*\triangle$ pedig egy körülírt háromszöge.

Dolgozatunk az ebben az eredményben megmutatkozó jelenséget vizsgálja.

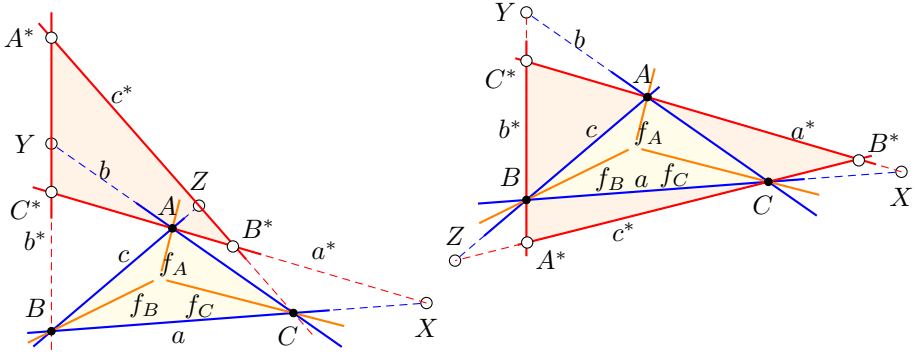
2. A FELADAT MEGFOGALMAZÁSA

Az $A^*B^*C^*\triangle$ háromszöget az $ABC\triangle$ háromszög *hozzáírt háromszögének* nevezzük, ha megfelelő csúcsaival szemközti a^* , b^* és c^* oldalegyenesei rendre tartalmazzák az $ABC\triangle$ háromszög megfelelő csúcsait, vagyis $A \in a^*$, $B \in b^*$, és $C \in c^*$. Két háromszöget *egymáshoz írtnak* mondunk, ha valamelyik a másik hozzáírt háromszöge. Az $A^*B^*C^*\triangle$ háromszöget az $ABC\triangle$ háromszög *körülírt háromszögének* nevezzük, ha oldalai rendre tartalmazzák az $ABC\triangle$ háromszög megfelelő csúcsait, vagyis $A \in \overline{B^*C^*}$, $B \in \overline{C^*A^*}$, és $C \in \overline{A^*B^*}$. Ilyen háromszögek esetén az $ABC\triangle$ háromszöget az $A^*B^*C^*\triangle$ háromszög *beírt háromszögének* nevezzük. Két háromszöget *egymásba írtnak* mondunk, ha valamelyik a másikba beírt háromszög.

2010 Matematikai Téma Osztályok: 0052, 0054.

Kulcsszavak és kifejezések: elemi geometria, háromszög, Desargues-tulajdonság, Ceva-tétel, Segre-tétel, π -tulajdonság, ellipszis.

Tekintsünk egy $ABC\triangle$ háromszöget megfelelő csúcsaival szemközti a , b és c oldalegyeneseivel. Legyen az $A^*B^*C^*\triangle$ háromszög az $ABC\triangle$ háromszög egy hozzáírt háromszöge. Legyen az A , B és C csúcsokon átmenő további egy-egy egyenes rendre f_A , f_B és f_C , és jelöljünk meg további három pontot: $X := a \cap a^*$, $Y := b \cap b^*$ és $Z := c \cap c^*$. Így az $ABC\triangle$ minden csúcán négy egyenes megy át (lásd a 2.1. ábrát).



2.1. ábra. Az alapkonfiguráció két esetben

Három fontos pont nem jelenik meg a 2.1. ábrán. Ezek az f_A , f_B és f_C egyenesek metszetei a szemközti oldallal, vagyis $A' := f_A \cap a$, $B' := f_B \cap b$, és $C' := f_C \cap c$. A továbbiakban ebből az *alapkönfigurációból* indulunk ki.

A *feladatunk* olyan feltételek meghatározása, melyek garantálják, vagy akár ekvivalensek azzal, hogy az f_A , f_B és f_C egyeneseknek legyen egy közös pontja.

A már hivatkozott [4, Theorem 4.2] eredmény szerint ilyen feltétel az, hogy legyen az $ABC\triangle$ háromszögnek olyan körülírt $\mathcal{H}$ ellipszise, amely rendre érinti az a^* , b^* és c^* egyeneseket, és $(b, c; a^*, f_A) = (c, a; b^*, f_B) = (a, b; c^*, f_C) = -1$.

3. ELŐISMERETEK

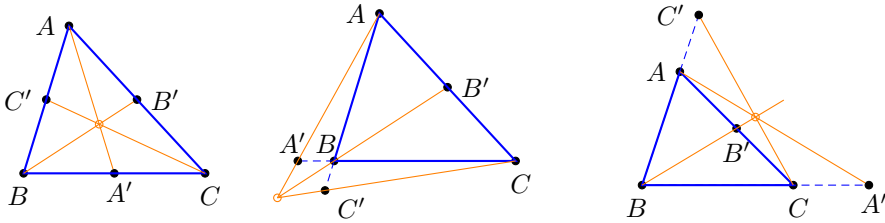
Belső ponttal rendelkező, konvex ponthalmaz határát *konvex görbének* nevezzük. Ha ez minden pontban differenciálható, akkor *oválistól* beszélünk. Egy $\mathcal{O}$ oválisnak minden O pontjában pontosan egy érintője van, melyet $t_O^{\mathcal{O}}$ jelöl¹. Egy $ABC\triangle$ háromszöget az $\mathcal{O}$ ovális *beírt háromszögének* nevezzük, ha $\mathcal{O}$ tartalmazza a csúcsait. Az $ABC\triangle$ háromszöget az $\mathcal{O}$ ovális *hozzáírt háromszögének* nevezzük, ha $\mathcal{O}$ érinti az oldalegyeneseit. Az olyan hozzáírt háromszöget, amelynek minden érintési pontja a háromszög oldalán van, *körülírt háromszögnek* nevezzük.

¹Ha a kontextusból világos az ovális, akkor az egyszerűbb $t_O = t_O^{\mathcal{O}}$ jelölést használjuk.

A kollineáris, rendezett P, Q, R ponthármasok $(P, Q; R)$ *osztóviszonya* olyan valós szám, melyre $R \neq Q$ esetén $(P, Q; R)\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PR}$ érvényes.² A kollineáris, rendezett P, Q, R, S pontnégyesekre, ahol $P \neq Q$, a $(P, Q; R, S) = (P, Q; R)/(P, Q; S)$ valós számot *kettősvíszony*nak nevezzük.

3.1. Ceva-tétel. [7, 113. old.] Az $ABC\triangle$ háromszög rendre a, b és c oldalegyenesein lévő, a csúcsoktól különböző A', B' és C' pontok által meghatározott AA', BB' és CC' egyenesek akkor és csak akkor konkurens, ha az osztóviszonyokra

$$(B, C; A')(C, A; B')(A, B; C') = 1. \quad (3.1)$$



Ceva-konfigurációk

A (szokásos) affin síkon a párhuzamossági reláció ekvivalenciaosztályait *ideális pontoknak*, ezek halmazát *ideális egyenesnek* nevezzük. Két egyenes párhuzamossága így azt jelenti, hogy „metszetük egy ideális pont”.

Innentől *projektív síkon* dolgozunk, amelyre az ideális pontokkal és az ideális egyenessel kibővített affin síkként gondolunk³.

Miután kibővítéssel megkaptuk a projektív síkot, az egyenesek egyforma szerepet játszanak, akár csak a pontok. Ezért a projektív sík egyenesei nem megkülönböztethetők, így a projektív síkban az, hogy melyik egyenest tekintjük ideálisnak, csak választás kérdése. Ha kijelölünk egy ideális egyenest, akkor a projektív sík „maradéka” egy affin sík. A projektív sík négy kollineáris pontjához hozzárendelhető a *kettősvíszonyuk*, mert annak értéke nem függ attól, hogy mely projektív egyenes elhagyásával kapott affin síkban számoljuk ki kettősvíszonyuk értékét.

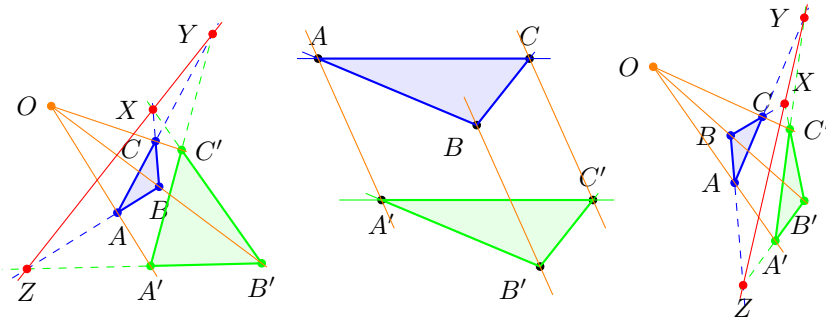
Papposz tétele [6, 23. oldal] szerint igaz, hogy ha négy konkurens egyenes metsz két tetszőleges egyenest, akkor az egyeneseken kapott négy-négy metszéspont ugyanolyan sorrendben vett kettősvíszonyai megegyeznek. Ezt a bármely metsző egyenesen kialakuló kettősvíszonyt hívjuk a *konkurens egyenesnégyesek kettősvíszonyának*.

²A szokásokat követve, $Q = R$ esetén $(P, Q; R)$ értékét végtelennek, ha pedig R a PQ egyenes (végtelen távoli) ideális pontja, akkor -1 -nek tekintjük.

³Az ideális pontok az egymással párhuzamos egyenesek közös végtelen távoli pontjaként képzelhetők el, míg az ideális egyenes egy végtelen távoli, minden egyenest metsző egyenesként. Lásd [1, 6].

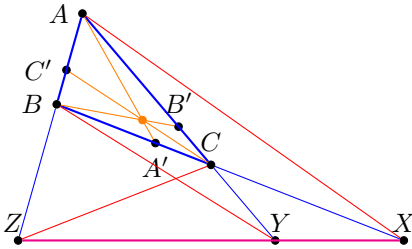
A projektív sík kettősviszonyt megtartó kollineációit *projektivitásoknak* nevezzük. Egy kör projektivitás melletti, vagyis *projektív képe* az azt nem metsző ideális egyenes által „meghagyott” affin síkban mindig ellipszis⁴.

A valós projektív sík egyik alapvető ismérve a *Desargues-tulajdonság*. Tekintsünk olyan nem elfajuló ABC és $A^*B^*C^*$ háromszögeket, amelyekre $A \neq A^*$, $B \neq B^*$, és $C \neq C^*$. Ezeket *pontra nézve perspektívek* mondjuk, ha a háromszögek megfelelő csúcsain átmenő AA^* , BB^* és CC^* egyenesek egy – esetleg ideális – közös pontra illeszkednek. *Egyenesre nézve perspektívek* mondjuk őket, ha a háromszögek megfelelő oldalegyeneseseinek $AB \cap A^*B^*$, $BC \cap B^*C^*$ és $CA \cap C^*A^*$ metszéspontjai egy – esetleg ideális – közös egyenesre illeszkednek.



Desargues-konfigurációk

3.2. Desargues-tétel. [7, 172. old.] *A valós projektív sík Desargues-tulajdonságú, vagyis a nem elfajuló háromszögpárok pontosan akkor perspektívek pontra nézve, ha egyenesre nézve perspektívek*⁵.



Képzeljünk most el, hogy az eredeti Ceva-konfigurációt kiegészítjük az a , b , illetve c oldalegyeneseknek a végtelen távoli egyenessel vett X , Y , illetve Z (ideális) pontjaival. Ekkor $(A, B; C') = -(A, B; Z, C')$, hiszen $(A, B; Z) = -1$, és a (3.1) egyenlőségben szereplő többi osztóviszony helyébe is a megfelelő kettősviszony ellentettje lép.

Ugyanakkor Papposz tételére tekintettel a rendre a , C , A , és B pontra illeszkedő egyenesnégyes kettősviszonya megegyezik a c , a , b egyenessel vett metszéspontok kettősviszonyával, vagyis

$$(B, A; Z, C') = (a, b; c^*, f_C), \quad (C, B; X, A') = (b, c; a^*, f_A), \quad (A, C; Y, B') = (c, a; b^*, f_B),$$

⁴Ezt könnyű látni, hiszen egyrészt másodrendű görbe, és mint ilyen, bármely affin síkban ellipszis, parabola vagy hiperbola, másrészt mivel nem metszi az ideális egyenest, az ez által meghagyott affin síkban korlátos, tehát ellipszis.

⁵Két háromszöget tehát *perspektívek* mondunk, akár pontra, akár egyenesre nézve perspektívek.

tehát az alábbi eredményt kapjuk.

3.3. Projektív Ceva-tétel. Tekintsük az alapkonfigurációt.

- (1) Ha az f_A , f_B és f_C egyenesek konkurrensak, és az X , Y , Z pontok kollineárisak, akkor

$$(a, b; c^*, f_C)(b, c; a^*, f_A)(c, a; b^*, f_B) = -1. \quad (3.2)$$

- (2) Ha (3.2) teljesül, akkor az X, Y, Z pontok pontosan akkor kollineárisak, ha az f_A, f_B és f_C egyenesek konkurrensak.

4. EGYMÁSBA ÍRT HÁROMSZÖGEK PERSPEKTIVITÁSA

Egymásba írt háromszögek esetén a projektív Ceva-tétel jelentősen kibővíti a perspektivitás megállapításának lehetőségeit.

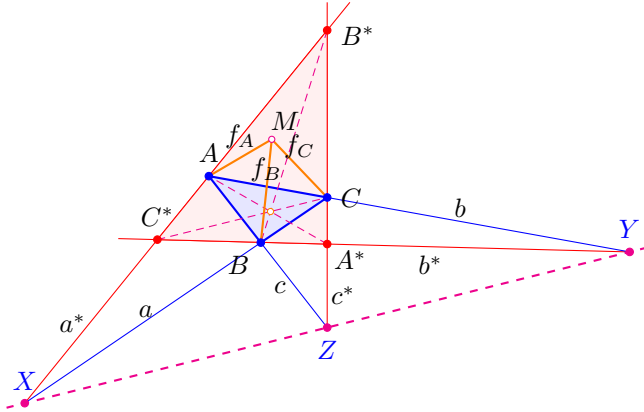
4.1. Ceva-féle Desargues-tétel. Tekintsük az alapkonfigurációt.

- (1) Ha f_A , f_B és f_C konkurensak, és

$$(a, b; c^*, f_C)(b, c; a^*, f_A)(c, a; b^*, f_B) = -1, \quad (4.1)$$

akkor az $A^*B^*C^*\triangle$ és $ABC\triangle$ háromszögek perspektívek.

- (2) Perspektív háromszögek oldalegyenesein kívüli minden M pontra az $f_A = AM$, $f_B = BM$ és $f_C = CM$ egyenesek teljesítik a (4.1) egyenlőséget.



4.1. ábra. Projektív Ceva-tétel és perspektivitás

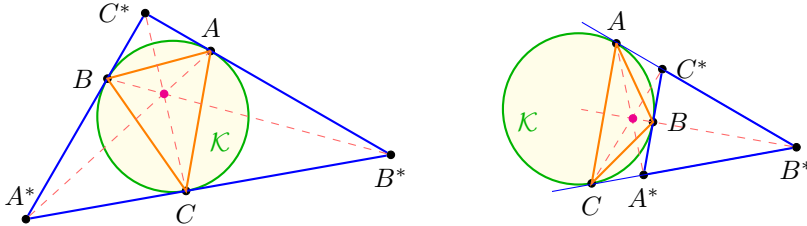
Bizonyítás. (1) A (4.1) és a projektív Ceva-tétel értelmében az $X = a \cap a^*$, $Y = b \cap b^*$ és $Z = c \cap c^*$ pontok kollineárisak. Ez a Desargues-tétel szerint azt jelenti, hogy a két háromszög perspektív.

(2) Legyen M egy tetszőleges pont (a háromszög oldalegyenesein kívül), és tekintsük az $f_A = AM$, $f_B = BM$ és $f_C = CM$ egyeneseket. Mivel a két háromszög perspektív, az $X = a \cap a^*$, $Y = b \cap b^*$ és $Z = c \cap c^*$ pontok kollineárisak, így a projektív Ceva-tétel miatt $(a, b; c^*, f_C)(b, c; a^*, f_A)(c, a; b^*, f_B) = -1$. ■

A **Ceva-féle Desargues-tétel** azt mutatja, hogy a (4.1) egyenletben azon túl, hogy a szorzat -1 , mindegy, hogy az $(a, b; c^*, f_C)$, $(b, c; a^*, f_A)$ és $(c, a; b^*, f_B)$ számok milyenek. Se több, se kevesebb, hanem csak annyi következik, hogy az egymásba írt háromszögek perspektívek. Ha tehát valamilyen geometriai objektumot szeretnénk az egymásba írt háromszögek perspektivitásához rendelni — olyasmit, ami pontosan akkor létezik, ha az egymásba írt háromszögek perspektívek —, akkor mást kell keresni. A keresett objektum a most következő állítás szerint az ellipszis.

4.2. Ellipszises Desargues-tétel. Tekintsük az alapkfigurációt.

- (1) Ha $ABC\triangle$ és $A^*B^*C^*\triangle$ a $\mathcal{K}$ ellipszis beírt, illetve hozzáírt háromszöge, akkor $ABC\triangle$ és $A^*B^*C^*\triangle$ perspektív.
- (2) Ha az $ABC\triangle$ és az $A^*B^*C^*\triangle$ háromszögek perspektívek, akkor létezik egy és csak egy olyan $\mathcal{K}$ ellipszis, mely átmegy az $ABC\triangle$ csúcsain, és ezekben rendre a^* , b^* és c^* az érintője.



4.2. ábra. Ellipszises Desargues-konfigurációk

A bizonyítást itt nem közöljük, mert (1) Brianchon tételének [6, 74. oldal] speciális esete, a (2) pedig a kúpszeletek alaptételének [6, 65. oldal] és Brianchon tételének közvetlen következménye.

Kétféle Desargues-tételünket összevetve a **projektív Ceva-tétel** feltétele is megjeleníthető egy illeszkedő ellipszissel, ami bizonyos értelemben teljes választ ad a feladatunkban megfogalmazott problémára.

4.3. Ellipszises Ceva-tétel. Tekintsük az alapkfigurációt.

- (1) Ha $ABC\triangle$ a $\mathcal{K}$ ellipszis egy beírt háromszöge, $A^*B^*C^*\triangle$ pedig egy hozzáírt háromszöge, akkor az f_A, f_B, f_C egyenesek pontosan akkor konkurrens, ha

$$(b, c; a^*, f_A)(c, a; b^*, f_B)(a, b; c^*, f_C) = -1. \quad (4.2)$$

- (2) Amennyiben (4.2) teljesül, az f_A, f_B és f_C egyenesek pontosan akkor konkurrens, ha létezik az $ABC\triangle$ háromszögnek olyan $\mathcal{K}$ körülírt ellipszise, melynek $A^*B^*C^*\triangle$ egy hozzáírt háromszöge.

Bizonyítás. (1) Ha f_A, f_B, f_C konkurrens, akkor a **projektív Ceva-tétel** és az ellipszises Desargues-tétel szerint $(b, c; f_A, t_A)(c, a; f_B, t_B)(a, b; f_C, t_C) = -1$.

(2) Ha $(b, c; f_A, t_A)(c, a; f_B, t_B)(a, b; f_C, t_C) = -1$, akkor az **ellipszises Desargues-tétel** szerint az $X = t_A \cap a$, $Y = t_B \cap b$ és $Z = t_C \cap c$ metszéspontok kollineárisak, így a **projektív Ceva-tétel** szerint az f_A, f_B, f_C egyenesek konkurrenssek.

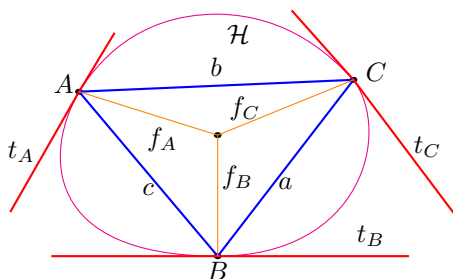
A *fordított irány igazolása*. Mivel f_A, f_B, f_C konkurenssek, és (4.2) teljesül, a **projektív Ceva-tétel** szerint X, Y és Z kollinearitása következik. A **Desargues-tétel** szerint ebből következik, hogy $ABC\triangle$ és $A^*B^*C^*\triangle$ perspektívek. Az **ellipszises Desargues-tétel** szerint ebből következik, hogy van olyan $\mathcal{K}$ körülírt ellipszise az $ABC\triangle$ háromszögnek, melynek $A^*B^*C^*\triangle$ egy hozzáírt háromszöge. ■

5. A π - ÉS π^* -TULAJDONSÁGÚ OVÁLISOK

Az **Ellipszises Ceva-tétel** felveti a következő kérdést:

Vajon létezik az ellipszistől különböző olyan ovális, amely ugyanígy jellemzi a perspektivitást?

Most erre a kérdésre adunk választ.



Legyen (α, β, γ) olyan valós számhármas, hogy $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -1$. Egy $\mathcal{O}$ ovális $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságúnak mondunk, ha minden beírt $ABC\triangle$ háromszögre a rendre annak csúcsain áthaladó f_A, f_B, f_C egyenesek konkurrenssek, amennyiben $(b, c; t_A, f_A) = \alpha$, $(c, a; t_B, f_B) = \beta$, és $(a, b; t_C, f_C) = \gamma$, ahol t_A, t_B és t_C az $\mathcal{O}$ ovális érintőit jelöli a háromszög megfelelő csúcsaiban.

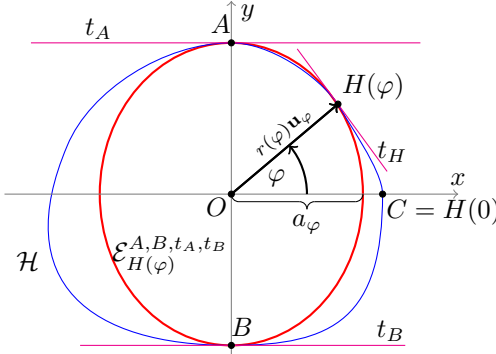
A [4, Theorem 4.2] eredmény a következő tétel speciális esete a $(-1, -1, -1)$ számhármásra.

5.1. Tétel. *Egy ovális akkor és csak akkor $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságú, ha ellipszis.*

Bizonyítás. Az **Ellipszises Ceva-tétel** (1) pontja szerint az ellipszisek $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságúak.

A fordított állítás igazolásához tekintsünk egy $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságú $\mathcal{H}$ ovális és ennek egy $ABC\triangle$ beírt háromszögét. Mivel egy $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságú ovális projektív képe is $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságú, és van olyan projektív transzformáció⁶, amely az A, B, C pontokat rendre a sík $(0, 1)$, $(0, -1)$ és $(1, 0)$ pontjába, a t_A és t_B érintőket pedig rendre az $y = 1$ és $y = -1$ egyenesbe viszi, elegendő a bizonyítást az utóbbi esetben elvégezni.

⁶Lásd [6, Kollineációk alaptétele a 39. oldalon]

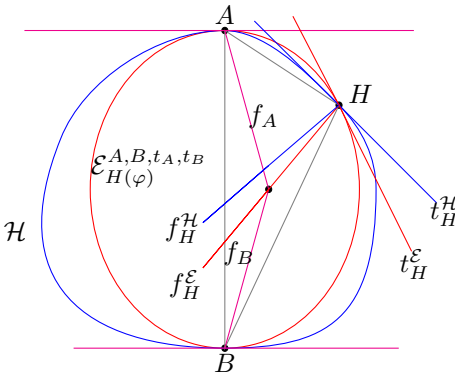


szög, $r(\varphi)$ egy pozitív szám, $\mathbf{u}_\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ pedig a φ irányiszögű egységvektor. Az $A, B, H(\varphi)$ pontok és a t_A, t_B érintők a kúpszeletek alaptétele [6, 65. oldal] szerint meghatároznak egy $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ ellipszist, melynek egyenlete megfelelő a_φ pozitív számra

$$\frac{x^2}{a_\varphi^2} + y^2 = 1 \quad (5.1)$$

alakú, hiszen t_A és t_B párhuzamos az x -tengellyel. Mivel $H(\varphi)$ is az $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ egy pontja, így rá is teljesül (5.1), vagyis $1 = r^2(\varphi) \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a_\varphi^2} + \sin^2 \varphi \right)$, amiért

$$a_\varphi^2 = \frac{r^2(\varphi) \cos^2 \varphi}{1 - r^2(\varphi) \sin^2 \varphi}. \quad (5.2)$$



Minthogy $\mathcal{H}$ és $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ is $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ -tulajdonságú, a $H(\varphi)$ pontban a $\mathcal{H}$ és $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ érintője megegyezik, mert különben a megfelelő f_H^H és f_H^E egyenesek nem mehetnének át egyformán az $f_A \cap f_B$ metszésponton.

Ennek a közös $t_{H(\varphi)}$ érintőnek egy irányvektora [5]

$$\dot{\mathbf{h}}(\varphi) = \dot{r}(\varphi) \mathbf{u}_\varphi + r(\varphi) \mathbf{u}_\varphi^\perp, \quad (5.3)$$

ahol $\mathbf{u}_\varphi^\perp = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ az $\mathbf{u}_\varphi$ -re merőleges egységvektor.

Másfelől az $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ érintőjének meredeksége (5.1) miatt $dy/dx = \frac{-x}{a^2 y}$. Eszerint a $H(\varphi)$ pontban

$$\frac{\dot{r}(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi}{\dot{r}(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi} = \frac{-\cos \varphi}{a^2 \sin \varphi}, \quad (5.4)$$

mivel (5.3) miatt $\dot{\mathbf{h}}(\varphi) = (\dot{r}(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, \dot{r}(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)$. Ebből kifejezve az $\dot{r}(\varphi)/r(\varphi)$ mennyiséget, majd felhasználva az (5.2) egyenlőséget

$$\frac{\dot{r}(\varphi)}{r(\varphi)} = \frac{(1 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \frac{\left(1 - \frac{r^2(\varphi) \cos^2 \varphi}{1 - r^2(\varphi) \sin^2 \varphi}\right) \sin \varphi \cos \varphi}{\frac{r^2(\varphi) \cos^2 \varphi}{1 - r^2(\varphi) \sin^2 \varphi} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = (1 - r^2(\varphi)) \operatorname{tg} \varphi$$

adódik. Tehát, ha $r(\varphi) \neq 1$, akkor $\frac{\dot{r}(\varphi)}{r(\varphi)(1 - r^2(\varphi))} = \operatorname{tg} \varphi$ adódik, melyet integrálva

$$\frac{-1}{2} \ln \frac{|1 - r^2(\varphi)|}{r^2(\varphi)} = -\ln |\cos \varphi| + c_0$$

következik valamilyen c_0 konstanssal. Eszerint $r^2(\varphi) = \frac{1}{1 \pm c_1 \cos^2 \varphi}$ valamely c_1 konstansra, amit az (5.2) egyenletbe helyettesítve az egyszerű

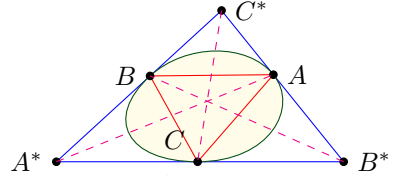
$$a^2(\varphi) = \frac{\frac{\cos^2 \varphi}{1 \pm c_1 \cos^2 \varphi}}{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{1 \pm c_1 \cos^2 \varphi}} = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi \pm c_1 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{1 \pm c_1} \quad (5.5)$$

összefüggésre jutunk. Ez azt jelenti, hogy $a(\varphi)$ az összes $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ ellipszisre ugyanaz a konstans érték, vagyis az ellipsziseknek ugyanazok a tengelyeik, tehát egybeesnek. Csakhogy a $H(\varphi)$ pont mindig rajta van az $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ ellipszisen, így ebből az következik, hogy $\mathcal{H}$ pontjai az

$$\frac{x^2}{1/(1 \pm c_1)} + y^2 = 1 \quad (5.6)$$

egyenletű ellipszisen vannak. Mivel $H(0) = C = (1, 0)$, nyilván $c_1 = 0$, vagyis $\mathcal{H}$ egy egységsugarú kör. ■

Egy oválist π -tulajdonságúnak mondunk [2, 3], ha minden beírt $ABC\triangle$ háromszöge, valamint az annak csúcsaiban rendre vett t_A, t_B és t_C érintőinek $A^* = t_B \cap t_C$, $B^* = t_C \cap t_A$ és $C^* = t_C \cap t_B$ metszéspontjaiból alkotott $A^*B^*C^*\triangle$ háromszög perspektív.



5.1. ábra. A π -tulajdonság

5.2. Tétel ([8]). Egy ovális akkor és csak akkor π -tulajdonságú, ha ellipszis.

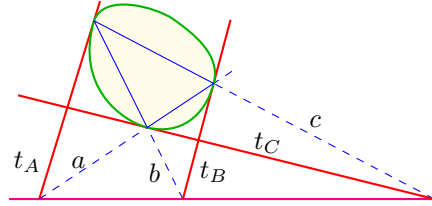
Bizonyítás. Az 5.1. Tételre tekintettel elég belátnunk, hogy egy ovális akkor és csak akkor π -tulajdonságú, ha $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ -tulajdonságú. E tulajdonságok ekvivalenciája a Ceva-féle Desargues-tétel közvetlen következménye. ■

A következő tétel nem igényel önálló bizonyítást, mert az 5.2. Tétel duálisa⁷.

⁷Projektív geometriákban a dualitás azt jelenti, hogy az egyenes és pont, valamint az illeszkedési (például „rajta van” és „átmegy rajta”) kifejezéseket felcserélve igaz állításból szintén igaz állítást kapunk. Lásd [5, 24. oldal, Dualitási tétel] vagy [1, 77. oldal, Dualitás elve].

Egy oválist π^* -tulajdonságúnak mondunk, ha minden beírt $ABC\triangle$ háromszög esetén az $X = BC \cap t_A$, $Y = CA \cap t_B$ és $Z = AB \cap t_C$ pontok kollineárisak.

5.3. Tétel. *Egy ovális akkor és csak akkor π^* -tulajdonságú, ha ellipszis.*



5.2. ábra. A π^* -tulajdonság

A szerzők köszönik a tartalom alapos kritikai elemzését Kincses Jánosnak.

HIVATKOZÁSOK

- [1] CSIKÓS B. és KISS GY., *Projektív geometria*, Polygon Kiadó, Szeged, 2011. ⟨3, 9⟩
- [2] KÁRTESZI F., *Bevezetés a véges geometriákba*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972. ⟨9⟩
- [3] KISS GY. és SZÖNYI T., *Véges geometriák*, Polygon Kiadó, Szeged, 2001. ⟨9⟩
- [4] J. KOZMA and Á. KURUSA, Hyperbolic is the only Hilbert geometry having circumcenter or orthocenter generally, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **57:1** (2016), 243–258. doi: 10.1007/s13366-014-0233-3. ⟨1, 2, 7⟩
- [5] KURUSA Á., *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999. ⟨8, 9⟩
- [6] KURUSA Á., *Nemeuklidészi geometria*, Polygon Kiadó, Szeged, 2009. ⟨3, 6, 7, 8⟩
- [7] KURUSA Á., *Bevezetés a geometriába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2015. ⟨3, 4⟩
- [8] B. SEGRE, Ovals in a finite projective plane, *Canadian J. Math.*, **7** (1955), 414–416; doi: 10.4153/CJM-1955-045-x. ⟨9⟩

(Kurusa Á.) Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
E-mail address: kurusa@math.u-szeged.hu

(Kozma J.) Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
E-mail address: kozma@math.u-szeged.hu