

Pitagoraszzi számhármások és ami mögöttük van

KURUSA ÁRPÁD

Kivonat. A Pitagorasz-tételben megadott egyenlet megoldhatósága a természetes számok körében mindig is érdekelte az embereket. Először a pitagoraszzi számhármások előállításának görögök által ismert módszereit tanulmányozzuk azok teljessége szempontjából, aztán egy algebrai geometriai megközelítéssel adjuk meg az összes egyszerű pitagoraszzi számhármast. Végül ezt az algebrai geometriai módszert a számelmélet más egyenleteire is alkalmazzuk.

1. Bevezetés

A derékszögű háromszög befogói és átfogója közti algebrai összefüggésre a különböző kultúrák már jóval a görögök előtt is ismertek sok-sok példát [2], de általános érvényű szabályként Pitagorasz (vagy talán az iskolája) ismerte fel és bizonyította be, hogy a befogók négyzetösszege éppen az átfogó négyzetét adja.

A görögök tudtak arról a csomókkal 3-4-5 egyenlő darabra felosztott kötélből kialakított háromszögről, amelyet az egyiptomiak a derékszög szerkesztéséhez használtak. Ráadásul különösen szerették a természetes számokat¹, melyek halma-zát inntől $\mathbb{N}$ jelöli, így hát nem meglepő, hogy felvetődött bennük a következő probléma.

1.1. Kérdés. Milyen (x, y, z) természetes számokból álló hármásokra teljesül az

$$(1.1) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

pitagoraszzi egyenlet?



AMS-klasszifikáció (2012): 11-02, 11D09, 14G50.

Kulcsszavak és -kifejezések: elemi geometria, elemi számelmélet, Pitagorasz tétele, Pell egyenletek, algebrai görbék.

¹A nullát most nem soroljuk a természetes számok közé.

Az (1.1) egyenletet teljesítő (x, y, z) természetes számokból álló hármast *pitagoraszai számhármast* nevezzük.

Már a görögök is ismertek pár pitagoraszai számhármast, de a példákon túllépve arra is keresték a választ, hogyan tudnák mindet felsorolni. Észrevették, hogy az (1.1) formula

$$(1.2) \quad x^2 = (z + y)(z - y)$$

formája számos lehetőséget kínál pitagoraszai számhármastok konstruálására. Az alábbi antik görög eredményekről tudunk [2]:

- (a) Pitagorasz abból indult ki, hogy amennyiben $z - y = 1$, akkor $z + y = x^2$, és a két egyenletet egyszerre pontosan a $z = \frac{x^2+1}{2}$ és $y = \frac{x^2-1}{2}$ értékek elégítik ki. Ekkor x természetes páratlan.
- (b) Plato abból indult ki, hogy amennyiben $z - y = 2$, akkor $z + y = x^2/2$, amiért x páros szám, mondjuk $x = 2s$, tehát $z + y = 2s^2$, és a két egyenletet egyszerre pontosan a $z = s^2 + 1$ és az $y = s^2 - 1$ értékek elégítik ki.
- (c) Architasz abból indult ki, hogy amennyiben $x = pq$ páratlan szám, akkor $z + y = p^2$ és $z - y = q^2$ megoldást ad, és e két egyenletet egyszerre pontosan a $z = \frac{p^2+q^2}{2}$ és $y = \frac{p^2-q^2}{2}$ értékek elégítik ki (mivel p és q páratlan, ezek természetes számok).
- (d) Diofantosz abból indult ki, hogy amennyiben $x = 2st$, akkor $z + y = 2s^2$ és $z - y = 2t^2$ megoldást ad, és e két egyenletet egyszerre pontosan a $z = s^2 + t^2$ és $y = s^2 - t^2$ értékek elégítik ki.

Az látni való, hogy Pitagorasz (a) számhármastai Architasz (c) számhármastainak, Plato (b) számhármastai pedig Diofantosz (d) számhármastainak képezik speciális eseteit a $q = 1$, illetve a $t = 1$ választás mellett. Ugyanakkor Architasz és Diofantosz megoldásai különböznek, hiszen előbbi esetben x páratlan, utóbbiban pedig páros.

Az 1.1 kérdés inentől tehát arra szűkül, hogy

$$(1.3) \quad \text{megtalálták-e a görögök az összes pitagoraszai számhármast?}$$

Ennek megválaszolásához a fentiek szerint elég Architasz és Diofantosz megoldásait vizsgálnunk.

2. Pitagoraszai számhármastok mai szemmel

Részletesebben megnézve az (1.1) egyenletet, azt látjuk, hogy amennyiben egy $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ megoldásban az x, y, z természetes számok legnagyobb közös osztója —legyen ez mondjuk d — nagyobb, mint 1, akkor az $(x/d, y/d, z/d)$ is pitagoraszai

számhármas. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az előbbi számhármas az utóbbi *pitagorasz-i számhármasnak többszöröse*. Két *pitagorasz-i számhármas* *függőnek* nevezzük, ha az egyik a másik többszöröse. Egy *pitagorasz-i számhármas* *egyszerűnek* hívunk, ha minden vele együtt függő pitagorasz-i számhármas a többszöröse, vagyis a benne szereplő számok legnagyobb közös osztója egy.

Ahogy már láttuk, Architasz és Diofantosz megoldásai különböznek, de általában nem függetlenek, mert ha Diofantosz megoldásában st páratlan, akkor az a számhármas Architasz megfelelő, $p = s$ és $q = t$ által adott számhármasának kétszerese.

2.1. Tétel. Minden olyan egyszerű pitagorasz-i számhármas

- (1) Architasz-féle, amelyikben x páratlan;
- (2) Diofantosz-féle, amelyikben x páros.

Bizonyítás. Legyen (x, y, z) egyszerű pitagorasz-i számhármas. Ekkor az $x, y, z \in \mathbb{N}$ számok között pontosan egy páros és két páratlan szám van, ugyanakkor x és y nem lehet egyszerre páratlan, mert akkor négyzetösszegük 4-es maradéka 2 lenne, holott egy négyzetszám 4-es maradéka csak 0 vagy 1 lehet.

Ha az (1.2) szorzatra bontásban a tényezők legnagyobb közös osztója d , akkor d osztja a $2z = (z + y) + (z - y)$ és a $2y = (z + y) - (z - y)$ számokat. Mivel (x, y, z) egyszerű pitagorasz-i számhármas, a z és y legnagyobb közös osztója 1^2 , tehát d csak 1 vagy 2 lehet.

Ha $d = 2$, akkor x páros, és így y és z páratlanok, és az (1.2) szorzatra bontást átalakíthatjuk a

$$(2.1) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z+y}{2} \frac{z-y}{2}$$

formára. Ebben a szorzatra bontásban az $\frac{z+y}{2}$ és a $\frac{z-y}{2}$ számok legnagyobb közös osztója 1. Ha $d = 1$, akkor az (1.2) szorzatra bontásban a $z + y$ és $z - y$ számok legnagyobb közös osztója 1.

Eszerint a most megadott szorzatok tényezői négyzetszámok, vagyis minden (x, y, z) egyszerű pitagorasz-i számhármasra

$$(2.2) \quad z + y = m^2 \text{ és } z - y = n^2, \quad \text{vagy} \quad z + y = 2m^2 \text{ és } z - y = 2n^2$$

olyan $m, n \in \mathbb{N}$ természetes számokra, melyek legnagyobb közös osztója $(m, n) = 1$. Ezekből z, y és x is számítható, amiből az

$$(2.3) \quad \left(mn, \frac{m^2 - n^2}{2}, \frac{m^2 + n^2}{2}\right), \quad \text{illetve} \quad (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$$

²Minden pitagorasz-i számhármasban bármely kettő elem közös osztója a harmadiknak is osztója kell legyen.

pitagoraszi számhármaskok adódnak.

Ha x páratlan, akkor csak az első előállítás jöhet szóba, ami az Architasz-féle megoldást adja. Ez igazolja (1) állításunkat.

Ha x páros, akkor az első előállítás esetén az m és n pontosan egyike páros, hiszen másként az (x, y, z) pitagoraszi számhármask nem lenne egyszerű (a 2 közös osztó lenne). Csakhogy ebben az esetben $\frac{m^2-n^2}{2}$ és $\frac{m^2+n^2}{2}$ sem egész szám, amely ellentmondás igazolja (2) állításunkat. ■

Eredményünk szerint az (1.3) kérdésre a válasz az, hogy a görögök megtalálták az összes egyszerű pitagoraszi számhármast. Az is világos azonban, hogy az ezek előállítására szolgáló Architasz- és Diofantosz-féle eljárások nem csak ezeket állítják elő, és az előállított számhármaskok halmazai között átfedés is van.

A (1.3) kérdés ezzel tovább szűkült:

Van-e olyan pitagoraszi számhármask, amelyet a görög eljárások nem állítanak elő?

A válasz igen, hiszen például a $3(3, 4, 5) = (9, 12, 15)$ pitagoraszi számhármask sem az Architasz-, sem a Diofantosz-féle eljárással nem áll elő: Ha Architasz formuláiból indulunk, akkor $9 = pq$, $27 = p^2$ és $3 = q^2$ adódik, míg Diofantosz formuláiból $9 = 2st$, $27 = 2s^2$ és $3 = 2t^2$ adódik; Nyilván egyik egyenletrendszernek sincs megoldása a természetes számok között. Mivel x és y szerepe szimmetrikus az (1.1) egyenletben, felvethető, hogy mi is a helyzet a $(12, 9, 15)$ számhármassal. Nos, ezt csak Diofantosz formulái állíthatnák elő, de abból a $12 = 2st$, $24 = 2s^2$ és $6 = 2t^2$ rendszer adódik, amelynek ugyancsak nincs megoldása a természetes számok között.

Az eddigiek alapján reménytelennek látszik a pitagoraszi számhármaskok felsorolása, és ennél nem is kell jobb ok arra, hogy átgondoljuk az eredeti kérdést, és új megközelítéssel próbálkozzunk [6].

2.2. Tétel. *Az $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ számhármask akkor és csak akkor pitagoraszi, ha van olyan $r \in (0, 1)$ racionális szám, melyre*

$$(2.4) \quad \frac{a}{c} = \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \text{és} \quad \frac{b}{c} = \frac{2r}{1+r^2}.$$

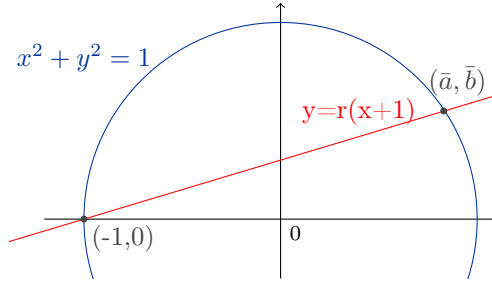
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ számhármask pitagoraszi. Ezekre tehát teljesül az (1.1) egyenlet, melynek mindkét oldalát elosztva a c számmal az látszik, hogy az $\bar{a} := a/c$ és $\bar{b} := b/c$ racionális számok négyzetösszege 1, vagyis az $(\bar{a}, \bar{b})$ pont a koordinátasík egységkörén van. A $(-1, 0)$ pontot³ az $(\bar{a}, \bar{b})$ ponttal

³Érdemes meggondolni, hogy miért éppen ezt a pontot használjuk ebben a bizonyításban.

összekötő egyenes egyenlete $y = r(x + 1)$, ahol $r = \frac{\bar{b}}{\bar{a}+1}$ racionális szám a $(0, 1)$ intervallumban. Eszerint az $r \in \mathbb{Q}$ racionális számra

$$(2.5) \quad 1 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \bar{a}^2 + r^2(\bar{a} + 1)^2$$

teljesül, amiből a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján $\bar{a} = \frac{1-r^2}{1+r^2}$ következik. Ebből a $\bar{b} = r\left(\frac{1-r^2}{1+r^2} + 1\right) = \frac{2r}{1+r^2}$ képlet adódik, ami azt jelenti, hogy a tétel állításának szükségességét beláttuk.



Tegyük most azt fel, hogy az $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ számhármashoz van olyan $r \in (0, 1)$ racionális szám, melyre (2.4) teljesül. Ekkor

$$(2.6) \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)^2 + \left(\frac{2r}{1+r^2}\right)^2 = \frac{(1-r^2)^2 + (2r)^2}{(1+r^2)^2} = 1.$$

Ezt a c^2 számmal szorozva a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Mivel a $(-1, 0)$ ponton átmenő egyenesek a körvonalat a $(-1, 0)$ ponton kívül pontosan egy pontban metszik, ez a tétel az egyszerű pitagoraszai számhármások halmazát bijektív (egy-egyértelmű) kapcsolatba hozza a $(0, 1)$ intervallum racionális számaival, ami bizonyos értelemben teljes választ ad az 1.1 kérdésre.

Eredményünk azt is bizonyítja, hogy végtelen sok egyszerű pitagoraszai számhármas létezik⁴.

Habár a 2.2. Tétel bizonyos értelemben minden egyszerű pitagoraszai számhármaszt egyenként felsorol, az nem derül ki, hogy egy adott $r \in (0, 1)$ racionális számhoz hogyan válasszuk ki az $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ egyszerű pitagoraszai számhármaszt. Ha például vennénk relatív prím $k, \ell \in \mathbb{N}$ számokat, melyekre $r = k/\ell$, akkor az $a = (1 - r^2)\ell^2$, $b = (2r)\ell^2$ és $c = (1 + r^2)\ell^2$ választással a diofantoszi előállítás egy variációját kapnánk, amiről tudjuk, hogy hiába tekintjük az összes $k, \ell \in \mathbb{N}$ számot, nem állítja elő az összes pitagoraszai számhármaszt, sőt még az összes egyszerű pitagoraszai számhármaszt sem.

⁴Ezt úgy is megkaphatjuk, ha bebizonyítjuk, hogy a $(2k + 1, 2k(k + 1), 2k(k + 1) + 1)$ ($k \in \mathbb{N}$) sorozat minden tagja egyszerű pitagoraszai számhármas!

3. A pitagoraszsi számhármason túl

A 2.2. Tétel módszere a pitagoraszsi számhármason keresésén túl is alkalmazható. Ebben a szakaszban erre mutatunk két példát.

Pell-egyenletnek nevezünk egy az egész számokon értelmezett $x^2 - dy^2 = 1$ alakú egyenletet, ahol az $1 < d \in \mathbb{N}$ szám nem négyzetszám. Ennek megoldhatóságát általában az irracionális számok másodrendű racionális approximációjával bizonyítják, aztán egy rekurzív képletet adnak a legkisebb megoldásból kiindulva az összes megoldás felsorolására. Most a 2.2. Tétel módszerét fogjuk alkalmazni.

Tekintsük az $x^2 - dy^2 = z^2$ bővített Pell-egyenletet, és legyen $\bar{b} = \frac{y}{x}$, valamint $\bar{a} = \frac{z}{x}$. Egyenletünket átrendezve az $1 = \bar{a}^2 + d\bar{b}^2$ egyenlethez jutunk, melynek racionális $(\bar{a}, \bar{b})$ megoldásait kell megkeresni. A $(-1, 0)$ pontot az $(\bar{a}, \bar{b})$ ponttal összekötő egyenes egyenlete $y = r(x + 1)$, ahol $r = \frac{\bar{b}}{\bar{a} + 1}$ racionális szám a $(0, 1/\sqrt{d})$ intervallumban. Erre az r racionális számra

$$1 = \bar{a}^2 + d\bar{b}^2 = \bar{a}^2 + dr^2(\bar{a} + 1)^2$$

teljesül, amiből a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján $\bar{a} = \frac{1 - dr^2}{1 + dr^2}$, majd r meghatározása alapján $\bar{b} = r\left(\frac{1 - dr^2}{1 + dr^2} + 1\right) = \frac{2r}{1 + dr^2}$ következik. Ha $\bar{a} = \frac{1 - dr^2}{1 + dr^2}$ és $\bar{b} = \frac{2r}{1 + dr^2}$, akkor

$$(3.1) \quad \bar{a}^2 + d\bar{b}^2 = \left(\frac{1 - dr^2}{1 + dr^2}\right)^2 + d\left(\frac{2r}{1 + dr^2}\right)^2 = \frac{(1 - dr^2)^2 + d(2r)^2}{(1 + dr^2)^2} = 1,$$

tehát kimondhatjuk a következőt.

3.1. Tétel. Az $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ számhármason akkor és csak akkor megoldása a $x^2 - dy^2 = z^2$ bővített Pell-egyenletnek, ha van olyan $r \in (0, 1/\sqrt{d})$ racionális szám, melyre

$$(3.2) \quad \frac{c}{a} = \frac{1 - dr^2}{1 + dr^2} \quad \text{és} \quad \frac{b}{a} = \frac{2r}{1 + dr^2}.$$

Minket a bővített Pell-egyenletnek az $(a, b, 1) \in \mathbb{N}^3$ megoldásai érdekelnek, ami a (3.2) formula értelmében a következőt jelenti.

3.2. Tétel. Az $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ számpár akkor és csak akkor megoldása az $x^2 - dy^2 = 1$ Pell-egyenletnek, ha van olyan $r \in (0, 1/\sqrt{d})$ racionális szám, melyre

$$a = \frac{1 + dr^2}{1 - dr^2} \quad \text{és} \quad b = \frac{2r}{1 - dr^2}$$

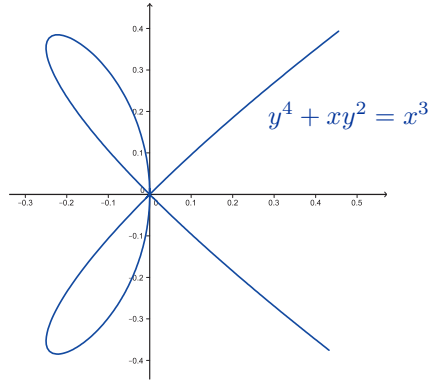
egész szám.

Habár ez a tétel lehetségessé teszi bármely adott Pell-egyenlet összes megoldásának felsorolását, arra nem ad választ, hogy van-e megoldása minden Pell-egyenletnek.

Utolsó példánk a diofantoszi egyenletek megoldásainak felsorolására alkalmas algebrai geometriai módszer illusztrálására az

$$(3.3) \quad y^4 = x^3 - xy^2$$

egyenlet.



Az eddigiek alapján ennek racionális megoldásait érdemes keresni. Mivel a $(0,0)$ ponton áthaladó minden nem nulla meredekségű és nem függőleges egyenes egyetlen másik pontban metszi az (3.3) egyenletű görbét, eljárásunk alkalmazásához ezt a pontot használjuk⁵.

Ha az $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ a (3.3) egyenlet egy racionális megoldása, akkor a $(0,0)$ pontot az (a, b) ponttal összekötő egyenes egyenlete $y = rx$, ahol $r = b/a$ racionális szám. Erre az $r \neq 0$ racionális számra

$$a^3 = b^4 + ab^2 = (ra)^4 + a(ra)^2 = r^4 a^4 + r^2 a^3$$

teljesül, amiből $a = \frac{1-r^2}{r^4}$, majd r meghatározása alapján $b = r\left(\frac{1-r^2}{r^4}\right) = \frac{1-r^2}{r^3}$ következik. Ha valamely $r \in \mathbb{Q}$ racionális számra $a = \frac{1-r^2}{r^4}$ és $b = \frac{1-r^2}{r^3}$, akkor

$$(3.4) \quad \begin{aligned} b^4 + ab^2 &= \left(\frac{1-r^2}{r^3}\right)^4 + \frac{1-r^2}{r^4} \left(\frac{1-r^2}{r^3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1-r^2}{r^3}\right)^2 \frac{(1-r^2)^2 + r^2(1-r^2)}{r^6} = a^3, \end{aligned}$$

tehát kimondhatjuk a következőt.

⁵Az eddigi példákban a $(-1,0)$ pont volt ilyen tulajdonságú!

3.3. Tétel. Az $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ racionális számpár akkor és csak akkor megoldása az $y^4 + xy^2 = x^3$ egyenletnek, ha van olyan nem nulla $r \in \mathbb{Q}$ racionális szám, melyre

$$(3.5) \quad a = \frac{1-r^2}{r^4} \quad \text{és} \quad b = \frac{1-r^2}{r^3}.$$

Eszerint az $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ számpár akkor és csak akkor megoldása a (3.3) egyenletnek, ha van olyan $r \in \mathbb{Q}$ racionális szám, melyre

$$a = \frac{1-r^2}{r^4} \quad \text{és} \quad b = \frac{1-r^2}{r^3}.$$

egész számok. Ha $r = k/l$, ahol k és l relatív prímelek, akkor

$$a = l^2 \frac{l^2 - k^2}{k^4} \quad \text{és} \quad b = l \frac{l^2 - k^2}{k^3}$$

miatt k^4 osztja az $l^2 - k^2$ különbséget, amiért k^2 is osztja az $l^2 - k^2$ különbséget, így k^2 osztja az l^2 egészet, ami lehetetlen, hiszen relatív prímelek. Kimondhatjuk tehát, hogy a (3.3) egyenletű görbe egyetlen olyan pontja, amelynek koordinátái egész számok, éppen a $(0, 0)$.

Hivatkozások

- [1] D. KALMAN, Angling for Pythagorean Triples, *The College Math. J.*, **17** (1986), 167–168.
- [2] KLUKOVITS L., On the Past of a famous Theorem: the predecessors of a Theorem of Pythagoras, *Teaching Math. Comp. Sci.*, **11:2** (2013), 255–267.
- [3] R. KNOTT, *Pythagorean Triangles*, <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Pythag/pythag.html>.
- [4] KURUSA Á., *Euklidészi geometria*, Polygon Jegyzettár **42**, Polygon, Szeged, 2008.
- [5] W. J. SPEZESKI, Rethinking Pythagorean Triples, *Appl. Appl. Math.: Intern. J.*, **3:1** (2008), 100–112.
- [6] R. VAKIL, Algebraic Geometry and the Ongoing Unification of Mathematics: Explaining Deligne to a Broad Audience, *Eur. Math. Soc. Newsletter*, **89** (2013), 24–30.

KURUSA Á., Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, Aradi vértanúk tere 1., 6720 Szeged; e-mail: kurusa@math.u-szeged.hu