

Lie-csoportok

KURUSA ÁRPÁD

Definíció. Ha egy V vektortéren adott egy $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$ bilineáris antiszimmetrikus forma, mely teljesíti a Jacobi-azonosságot, vagyis

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0, \quad u, v, w \in V$$

akkor azt Lie-algebrának hívjuk.

Definíció. Egy $\mathcal{G}$ differenciálható sokaságot, ha pontjai csoportot alkotnak Lie-csoportnak nevezünk, amennyiben a $(G, H) \mapsto G \cdot H^{-1}$ hozzárendelés $(G, H \in \mathcal{G})$ differenciálható.

Konvenció. A $\mathcal{G}$ egységelemét E jelöli. $\sigma: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ $((G, H) \mapsto GH)$; $i: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ $(G \mapsto G^{-1})$; $\text{AD}: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ $((G, H) \mapsto GHG^{-1} = \text{AD}_G H)$, melynek értelmében $\text{AD}_G: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$.

Tétel. Lie-csoportban a szorzás, az invertálás és az adjungálás is differenciálható, és

- (1) $\sigma_{*|(E,E)}: T_E \mathcal{G} \times T_E \mathcal{G} \rightarrow T_E \mathcal{G}$ $((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y})$
- (2) $i_{*|(E)}: T_E \mathcal{G} \rightarrow T_E \mathcal{G}$ $(\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x})$
- (3) $\text{AD}_{*|(E,E)}: T_E \mathcal{G} \times T_E \mathcal{G} \rightarrow T_E \mathcal{G}$ $((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{y})$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_E \mathcal{G}$ független és $H(s\mathbf{x})$ egy tetszőleges görbe, melynek 0-ban $\mathbf{x}$ az érintője.

Az első állítást igazolja, hogy

$$\begin{aligned} \sigma_{*|(E,E)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \partial_{s=0} \partial_{t=0} (\sigma(H(s\mathbf{x}), H(t\mathbf{y}))) \\ &= \partial_{s=0} (\sigma(H(s\mathbf{x}), E)) + \partial_{t=0} (\sigma(E, H(t\mathbf{y}))) = \mathbf{x} + \mathbf{y}. \end{aligned}$$

A második állításhoz deriváljuk az $s = 0$ pontban az $E = \sigma(G, i(G))$ azonosságot, ahol $G = H(s\mathbf{x})$, ekkor $0 = \sigma_{*|(E,E)}(\mathbf{x}, i_*(\mathbf{x})) = \mathbf{x} + i_*(\mathbf{x})$, amiért $i_*(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$.

A harmadik állítást az

$$\begin{aligned} \text{AD}_{*|(E,E)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \partial_{s=0} \left(\text{AD}(H(s\mathbf{x}), H(t\mathbf{y})) \right) \\ &= \partial_{s=0}(\text{AD}(H(s\mathbf{x}), E)) + \partial_{t=0}(\text{AD}(E, H(t\mathbf{y}))) \\ &= 0 + \mathbf{y} = \mathbf{y} \end{aligned}$$

levezetés igazolja. ■

Tétel. Minden $G \in \mathcal{G}$ esetén $\text{AD}_{G*|E}: T_E\mathcal{G} \rightarrow T_E\mathcal{G}$ ($\mathbf{x} \mapsto (L_G \circ R_{G^{-1}})_{*|E}\mathbf{x}$) a $T_E\mathcal{G}$ automorfizmusa.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x} \in T_E\mathcal{G}$ és $H(s\mathbf{x})$ egy tetszőleges görbe, melynek 0-ban $\mathbf{x}$ az érintője.

$$\begin{aligned} \text{AD}_{G*|E} \mathbf{x} &= \partial_{s=0}(\text{AD}(G, H(s\mathbf{x}))) = \partial_{s=0}(GH(s\mathbf{x})G^{-1}) \\ &= \partial_{s=0}(L_G \circ R_{G^{-1}}(H(s\mathbf{x}))) = (L_G \circ R_{G^{-1}})_{*|E}\mathbf{x} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Tétel.

- (1) Az $\text{AD}_{*|E}: G \mapsto \text{AD}_{G*|E}$ leképezés homomorfia.
- (2) Minden $G \in \mathcal{G}$ esetén $\text{AD}_{G*|E}$ a $T_E\mathcal{G}$ egy Lie-algebra izomorfizmusa.

Bizonyítás. (1) Az $\text{AD}_{*|E}$ homomorfia, mert

$$\begin{aligned} \text{AD}_{G*|E} \text{AD}_{H*|E} &= (L_G \circ R_{G^{-1}})_{*|E} \circ (L_H \circ R_{H^{-1}})_{*|E} \\ &= (L_G \circ R_{G^{-1}} \circ L_H \circ R_{H^{-1}})_{*|E} \\ &= (L_G \circ L_H \circ R_{G^{-1}} \circ R_{H^{-1}})_{*|E} \\ &= (L_{GH} \circ R_{H^{-1}G^{-1}})_{*|E} \\ &= (L_{GH} \circ R_{(GH)^{-1}})_{*|E} = \text{AD}_{(GH)*|E} \end{aligned}$$

(2) Az indukált leképezés definíciójából és a Lie-zárójel indukált leképezéssel szembeni invarianciája alapján következik, hiszen $\text{AD}_{G*|E}$ nem elfajuló, mert (1) miatt $(\text{AD}_{G*|E})^{-1} = \text{AD}_{G^{-1}*|E}$. ■

Definíció. Az $\text{Ad} = \text{AD}_{*|E}: \mathcal{G} \mapsto \text{GL}(T_E\mathcal{G})$ ($G \mapsto \text{AD}_{G*|E}$) leképezés a $\mathcal{G}$ Lie-csoport adjungált reprezentációja. Ennek deriváltját az E egységnél ad jelöli, vagyis $\text{ad} = \text{Ad}_{*|E}$.

Definíció. Az $L, R: \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})$ ($G \mapsto L_G$ és $G \mapsto R_G$) leképezéseket a bal, és jobbszorzásnak nevezzük, ahol

$$L_G: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \quad (H \mapsto GH) \quad \text{és} \quad R_G: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \quad (H \mapsto HG)$$

Tétel. L és R injektív homomorfizmus, L_G és R_G diffeomorfizmus.

Bizonyítás. $L_G = L_F \Rightarrow GH = FH \quad (\forall H \in \mathcal{G}) \Rightarrow G = F$, amiért L (és R is) injektív.

$L_G L_F H = G(FH) = (GF)H = L_{GF}H$ miatt L (és R is) homomorfizmus.

$L_G: H \mapsto GH$ injektív, szürjektív és differenciálható, tehát diffeomorfizmus. ■

Definíció. Az $\mathbf{X}$ vektormező bal (jobb-) invariáns, ha minden $G \in \mathcal{G}$ esetén $L_{G*}\mathbf{X} = \mathbf{X} \circ L_G$ ($R_{G*}\mathbf{X} = \mathbf{X} \circ R_G$). Ezek terét $\tilde{T}^L\mathcal{G}$ ($\tilde{T}^R\mathcal{G}$) jelöli.

Megjegyzés. Kifejtve $L_{G*}\mathbf{X}(H) = \mathbf{X}(GH) = L_{G*}(\mathbf{X}(H))$. Definíció szerint $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ esetén $L_{G*}\mathbf{X}f \circ L_G = \mathbf{X}(f \circ L_G)$, vagyis $L_{G*}\mathbf{X}f(GH) = \mathbf{X}(f(G))|H$

Tétel. A bal (jobb-) invariáns vektormezők differenciálhatóak, a Lie-zárójelük bal (jobb-) invariáns.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{X} \in \tilde{T}^L\mathcal{G}$. Ekkor minden differenciálható f skalármezőre $\mathbf{X}f(G) = L_{G*}\mathbf{X}f(E) = \mathbf{X}(f \circ L_G)|E = \mathbf{X}(E)(f \circ L_G)$. Ezért elég megmutatni, hogy a $G \mapsto \mathbf{X}(E)(f \circ L_G)$ leképezés differenciálható.

Legyen $\mathbf{Y} \in \tilde{T}\mathcal{G}$ úgy, hogy $\mathbf{Y}(E) = \mathbf{X}(E)$, és tekintsük az $\tilde{f}: (G, H) \mapsto f(GH)$ függvényt $\mathbf{Z} = (\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{Y})$ szerinti deriváltját. $\mathbf{Z}\tilde{f}$ nyilván differenciálható, hiszen minden eleme az. Történetesen a parciális deriválás szabálya szerint

$$\mathbf{Z}\tilde{f}(G, H) = \mathbf{Z}_{(G, H)}\tilde{f} = \tilde{\mathbf{Y}}_G(f(\cdot H)) + \mathbf{Y}_H(f(G \cdot)),$$

amibe az $\tilde{\mathbf{Y}} = 0$ és $H = E$ választást beírva

$$\mathbf{Z}\tilde{f}(G, E) = \mathbf{Y}_E(f \circ L_G) = \mathbf{X}_E(f \circ L_G) = \mathbf{X}f(G)$$

adódik, vagyis $\mathbf{X}f(G)$ tényleg differenciálható.

A másik állításhoz elég felidézni, hogy a Lie-zárójel felcserélhető az indukált leképezésekkel, és így a bal (jobb-) invariancia öröklődik a Lie-zárójelre. ■

Tétel. A $T_E\mathcal{G}$, $\tilde{T}^L\mathcal{G}$ és $\tilde{T}^R\mathcal{G}$ terek egymással izomorf Lie-algebrák.

Bizonyítás. Legyen $\varphi: \tilde{T}^L\mathcal{G} \rightarrow T_E\mathcal{G}$ ($\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}(E)$). Ez nyilván homomorfia. A φ injektív is, hiszen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \tilde{T}^L\mathcal{G}$ és $\mathbf{X}(E) = \mathbf{Y}(E)$ esetén

$$\mathbf{X}(G) = L_{G*}\mathbf{X}(E) = L_{G*}(\mathbf{X}(E)) = L_{G*}(\mathbf{Y}(E)) = \mathbf{Y}(G).$$

A φ szürjektív is, hiszen ha $\mathbf{x} \in T_E\mathcal{G}$ és $\mathbf{X}(G) = L_{G*}(\mathbf{x})$ minden $G \in \mathcal{G}$ elemre, akkor $\varphi\mathbf{X} = \mathbf{X}(E) = L_{E*}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, miközben $\mathbf{X} \in \tilde{T}^L\mathcal{G}$, hiszen $L_{H*}\mathbf{X} = L_{HG*}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(HG) = \mathbf{X} \circ L_H$. ■

Megjegyzés. A fentit úgy is fogalmazhatjuk, hogy minden $\mathbf{x} \in T_E\mathcal{G}$ egyértelműen terjeszthető ki balinvariáns vektormezővé.

Definíció. A $T_E\mathcal{G}$, $\tilde{T}^L\mathcal{G}$ és $\tilde{T}^R\mathcal{G}$ tereket a $\mathcal{G}$ Lie-csoport Lie-algebrájának nevezzük.

Lemma. Balinvariáns $\mathbf{X}$ vektormező $\varphi_{\mathbf{X}}^t$ folyamára $\varphi_{\mathbf{X}}^t(G) = G \cdot \varphi_{\mathbf{X}}^t(E)$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\psi_{\mathbf{X}}^t(G) = G \cdot \varphi_{\mathbf{X}}^t(E)$. Ekkor $\psi_{\mathbf{X}}^0(G) = G$. A φ deriváltjára:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi_{\mathbf{X}}^t(G)) &= \frac{d}{dt}(G \cdot \varphi_{\mathbf{X}}^t(E)) = L_{G*|\varphi_{\mathbf{X}}^t(E)} \cdot \mathbf{X}(\varphi_{\mathbf{X}}^t(E)) = \mathbf{X}(L_G\varphi_{\mathbf{X}}^t(E)) \\ &= \mathbf{X}(G\varphi_{\mathbf{X}}^t(E)) = \mathbf{X}(\psi_{\mathbf{X}}^t(G)) \end{aligned}$$

Ez a differenciálegyenlet az $\mathbf{X}$ folyamát definiálja, ami azonnal bizonyítja a lemma állítását. ■

Megjegyzés. Balinvariáns $\mathbf{X}$ vektormező esetén a fentiek szerint $\varphi_{\mathbf{X}}^t = R_{\varphi_{\mathbf{X}}^t(E)}$, jobbinvariáns esetben $\varphi_{\mathbf{X}}^t = L_{\varphi_{\mathbf{X}}^t(E)}$ az $\mathbf{X}$ folyama.

Tétel. Minden $\mathbf{x} \in T_E\mathcal{G}$ vektorhoz létezik pontosan egy $h_{\mathbf{x}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ homomorfizmus, melyre $\dot{h}_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{X} \in \tilde{T}^L \mathcal{G}$, melyre $\mathbf{X}(E) = \mathbf{x}$.

Tekintsük a $\varphi_{\mathbf{X}}^t$ folyamot. A lemma szerint

$$\varphi_{\mathbf{X}}^{t+s}(E) = \varphi_{\mathbf{X}}^t(\varphi_{\mathbf{X}}^s(E)) = \varphi_{\mathbf{X}}^s(E) \cdot \varphi_{\mathbf{X}}^t(E)$$

Mivel az E egység egy kis zárt környezetében a folyam mindig jól definiáltan létezik, ez azt jelenti, hogy a folyamnak az E egységen átmenő minden integrálgörbéje korlátlanul folytatható, vagyis a $\varphi_{\mathbf{X}}^t(E)$ megfelel a $h_{\mathbf{x}}$ szerepére.

Ha a $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ is homomorfizmus, és $\dot{h}(0) = \mathbf{x}$, akkor a $h(t+s) = h(t) \cdot h(s)$ összefüggést deriválva az $s = 0$ pontban,

$$\dot{h}(t) = L_{h(t)*|h(0)} \dot{h}(0) = L_{h(t)*|E} \mathbf{x} = \mathbf{X}(h(t)),$$

vagyis $h(t) = \varphi_{\mathbf{X}}^t(E)$. ■

Definíció. Azt az $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ egyértelmű homomorfizmust, melynek érintője az $E \in \mathcal{G}$ egységnél $\mathbf{x} \in T_E \mathcal{G}$ jelölje $\text{Exp}_{\mathbf{x}}$. Az $\text{Exp}: T_E \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ leképezést, melyre $\text{Exp}(\mathbf{x}) = \text{Exp}_{\mathbf{x}}(1)$ exponenciális leképezésnek nevezzük.

Megjegyzés. Az Exp leképezés nem tévesztendő össze az $\exp$ leképezéssel! A definiáló differenciálegyenlet alapján világos, hogy $\text{Exp}(t\mathbf{x}) = \text{Exp}_{\mathbf{x}}(t)$ és $\text{Exp}(t\mathbf{x})\text{Exp}(s\mathbf{x}) = \text{Exp}((t+s)\mathbf{x})$. Végül a fenti bizonyítás alapján $\text{Exp}(t\mathbf{x}) = \varphi_{\mathbf{X}}^t(E)$, ahol $\mathbf{X} \in \tilde{T}^L \mathcal{G}$ és $\mathbf{X}(E) = \mathbf{x}$, amiért $\varphi_{\mathbf{X}}^t = R_{\text{Exp}(t\mathbf{x})}$ illetve $\mathbf{X} \in \tilde{T}^R \mathcal{G}$ esetén $\varphi_{\mathbf{X}}^t = L_{\text{Exp}(t\mathbf{x})}$.

Tétel. Egy V vektortér esetén $\text{Exp}: L(V) \rightarrow GL(V)$ éppen $M \mapsto e^M$, ahol $e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

Bizonyítás. Először is a megadott sor konvergens, mert majorálható az $\frac{1}{k!} |M|^k$ sorral, így $|e^M| \leq e^{|M|} < \infty$. Eszerint e^M egy analitikus függvény, melynek deriváltja

$$\frac{d}{dt}(e^{tM})_{t=0} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \cdot M^{k+1} \right)_{t=0} = M.$$

Az e^M függvény homomorfia is, hiszen

$$\begin{aligned} e^{(t+s)M} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t+s)^k M^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^k t^i s^{k-i} \binom{k}{i} \right) M^k \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(i+j)!} t^i s^j \binom{i+j}{i} M^{i+j} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i M^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} s^j M^j = e^{tM} e^{sM}. \end{aligned}$$

Eszerint $M \mapsto e^M$ az $L(V)$ origón átmenő alterének homomorf leképezése a $GL(V)$ egységen átmenő alcsoporthára, ami igazolja az állítást. Másfelől ez mutatja, hogy $L(V) = T_E GL(V)$. ■

Konvenció. Az analitikus sorfejtésnek megfelelően értelmezzük az e^M -mel végzett műveleteket is. Például $\frac{e^M - I}{M} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} M^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} M^j$ definíció szerint.

Tétel. $\text{ad} = \text{Ad}_{*|E}: T_E \mathcal{G} \rightarrow T_{id}(GL(T_E \mathcal{G})) \cong L(T_E \mathcal{G})$ ($\mathbf{x} \mapsto \text{ad}_{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}, \cdot]$).

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_E \mathcal{G}$ független.

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{*|E} \mathbf{x}(\mathbf{y}) &= \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \text{Ad}_{\text{Exp}(s\mathbf{x})} \right) \mathbf{y} = \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \text{AD}_{\text{Exp}(s\mathbf{x}) * |E} \right) \mathbf{y} \\ &= \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (L_{\text{Exp}(s\mathbf{x})} \circ R_{\text{Exp}^{-1}(s\mathbf{x})} * |E) \right) \mathbf{y} \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left((L_{\text{Exp}(s\mathbf{x})} \circ R_{\text{Exp}(-s\mathbf{x})} * |E) \mathbf{y} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L_{\text{Exp}(s\mathbf{x}) * |E} \text{Exp}(-s\mathbf{x}) \circ R_{\text{Exp}(-s\mathbf{x}) * |E} \mathbf{y} - \mathbf{y}}{s - 0} \end{aligned}$$

Legyen $R_{\text{Exp}(-s\mathbf{x}) * |E}(\mathbf{y}) = \mathbf{Y}(\text{Exp}(-s\mathbf{x}))$. Ekkor $\mathbf{Y}(E) = \mathbf{y}$, és így

$$\text{Ad}_{*|E} \mathbf{x}(\mathbf{y}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L_{\text{Exp}(s\mathbf{x}) * |E} \text{Exp}(-s\mathbf{x}) (\mathbf{Y}(\text{Exp}(-s\mathbf{x})) - \mathbf{Y}(E))}{s - 0}$$

Mivel $L_{\text{Exp}(s\mathbf{x})}$ éppen az $\mathbf{X}(E) = \mathbf{x}$ feltételt teljesítő $\mathbf{X} \in \tilde{T}^R \mathcal{G}$ folyama, és így a jobboldalon az $\mathbf{Y}$ deriváltja $\mathbf{X}$ folyama szerint szerepel, amiért a jobb oldal eredménye éppen $-\mathbf{Y}, \mathbf{X}(E) = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, ahogy a tétel állítja. ■

Megjegyzés. A fentiek szerint tehát $\text{ad}_{\mathbf{x}} \mathbf{y} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ és így a bizonyítás első képletének második sorából következőleg

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (L_{\text{Exp}(s\mathbf{x})} \circ R_{\text{Exp}^{-1}(s\mathbf{x})} (\text{Exp}(t\mathbf{y}))) \right) \\ &= \partial_{s=0} \partial_{t=0} (\text{Exp}(s\mathbf{x}) \text{Exp}(t\mathbf{y}) \text{Exp}^{-1}(s\mathbf{x})) \\ &= \partial_{s=0} \partial_{t=0} (\text{Exp}(s\mathbf{x}) \text{Exp}(t\mathbf{y}) \text{Exp}(-s\mathbf{x})), \end{aligned}$$

vagyis a Lie-zárójel az adjungálás második deriváltja. Kommutatív csoport esetén tehát eltűnik.

Tétel. $\text{ad}_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} = \text{ad}_{\mathbf{x}} \circ \text{ad}_{\mathbf{y}} - \text{ad}_{\mathbf{y}} \circ \text{ad}_{\mathbf{x}} = [\text{ad}_{\mathbf{x}}, \text{ad}_{\mathbf{y}}]$.

Bizonyítás. A Jacobi azonosság alapján

$$\text{ad}_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} \mathbf{z} = [[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] - [\mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]] = \text{ad}_{\mathbf{x}} \text{ad}_{\mathbf{y}} \mathbf{z} - \text{ad}_{\mathbf{y}} \text{ad}_{\mathbf{x}} \mathbf{z}. \quad \blacksquare$$

Definíció. A ∇ kovariáns deriválás balinvariáns, ha minden $G \in \mathcal{G}$ esetén L_{G*} affin ∇ -ra nézve, vagyis $L_{G*} \nabla = \nabla_{L_{G*}} L_{G*}$.

Tétel. A minden $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \tilde{T}^L \mathcal{G}$ vektormezőkre megkövetelt $\alpha(\mathbf{X}(E), \mathbf{Y}(E)) = \nabla_{\mathbf{X}(E)} \mathbf{Y}$ egyenlőség bijektív kapcsolatba hozza az $\alpha: T_E \mathcal{G} \times T_E \mathcal{G} \rightarrow T_E G$ bilineáris formákat és a ∇ balinvariáns kovariáns deriváltakat.

Bizonyítás. Ha ∇ balinvariáns, akkor a képlet által definiált α forma nyilván bilineáris és $T_E \mathcal{G}$ elemeinek egyértelmű balinvariáns kiterjeszthetősége miatt a teljes $T_E \mathcal{G} \times T_E \mathcal{G}$ az értelmezési tartománya.

Legyen most $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n$ egy bázis a $T_E \mathcal{G}$ Lie-algebrában, valamint $\mathbf{X}_i$ az $\mathbf{x}_i$ egyértelmű balinvariáns kiterjesztése, vagyis $\mathbf{X}_i(G) = L_{G*} \mathbf{x}_i$. Ekkor az $\mathbf{X}_i \in \tilde{T}^L \mathcal{G}$ vektorok bázist alkotnak minden pontban, ezért minden $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ vektormező felírható, mint $\mathbf{X} = \sum f_i \mathbf{X}_i$, és $\mathbf{Y} = \sum g_j \mathbf{X}_j$ megfelelő f_i, g_j skalármezőkkel.

Az $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ akkor és csak akkor balinvariáns, ha az f_i és g_j együtthatók konstansok, mert

$$\begin{aligned} \sum f_i(GH) \cdot L_{GH*} \mathbf{x}_i &= \mathbf{X}(GH) = L_{G*}(\mathbf{X}(H)) = L_{G*} \left(\sum f_i(H) \mathbf{X}_i(H) \right) \\ &= \sum f_i(H) L_{G*} L_{H*} \mathbf{x}_i = \sum f_i(H) L_{GH*} \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

és ezért $f_i(GH) = f_i(H)$ a $\mathcal{G}$ minden G elemére.

Definiáljuk most a ∇ kovariáns deriválást a

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}(G) = \sum f_i(G) g_j(G) L_{G*}(\alpha(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j))$$

formulával, ahol α az adott $T_E \mathcal{G} \times T_E \mathcal{G} \rightarrow T_E \mathcal{G}$ bilineáris forma.

Ekkor ∇ balinvariáns, mert egyszerű számolás szerint

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}(G) &= \sum f_i \nabla_{\mathbf{X}_i} (g_j \mathbf{X}_j) = \sum_{ij} f_i (g_j \nabla_{\mathbf{X}_i} \mathbf{X}_j + \mathbf{X}_i g_j \mathbf{X}_j) \\ &= \sum f_i(G) (g_j(G) L_{G*} \nabla_{\mathbf{x}_i} \mathbf{X}_j + L_{G*} \mathbf{x}_i g_j L_{G*} \mathbf{x}_j), \end{aligned}$$

ami balinvariáns $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ vektormezők esetére

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}(G) = \sum f_i(G) g_j(G) L_{G*} \nabla_{\mathbf{x}_i} \mathbf{X}_j = L_{G*} \nabla_{\mathbf{X}(E)} \mathbf{Y},$$

mivel ilyenkor f_i és g_j konstans. Ez igazolja, hogy a definiált ∇ kovariáns deriválás balinvariáns. ■

Tétel. Legyen ∇ balinvariáns kovariáns deriválás és α a fenti tétel szerint egyértelműen hozzárendelt bilineáris forma. A $t \mapsto \exp_E(t\mathbf{x})$ leképezés akkor és csak akkor (analitikus) homomorfizmus (vagyis akkor és csak akkor egyezik meg az $\text{Exp}_{\mathbf{x}}$ leképezéssel), ha $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$.

Bizonyítás. Ha $\exp_E(t\mathbf{x})$ analitikus homomorfizmus, akkor Exp egyértelműsége miatt $\exp_E(t\mathbf{x}) = \text{Exp}_{\mathbf{x}} t$, és ezért $\mathbf{X} = \frac{d}{dt}(\exp_E(t\mathbf{x}))$ balinvariáns vektormező. Ugyanakkor $\exp(t\mathbf{x})$ geodetikus, amiért érintő vektormezőjére $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{X} = 0$, és ebből $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ következik, hiszen $\mathbf{X}$ balinvariáns és $\mathbf{X}(E) = \mathbf{x}$.

Fordítva, ha $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, akkor $0 = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{X}$ az $\mathbf{x}$ egyértelmű $\mathbf{X}$ balinvariáns kiterjesztésére, vagyis az $\mathbf{X}$ -hez tartozó $g_{\mathbf{X}}(t)$ integrálgörbe geodetikus, melyre $g_{\mathbf{X}}(0) = E$ és $\dot{g}_{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}$. A geodetikusok egyértelműsége miatt így $g_{\mathbf{X}}(s) = \exp_E(s\mathbf{x})$. Ugyanakkor geodetikus a $h_t(s) = \exp_E(t\mathbf{x}) \exp_E(s\mathbf{x})$ is, mert

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{h}_t} \dot{h}_t &= \nabla_{L_{\exp_E(t\mathbf{x})*} | \exp_E(s\mathbf{x})} \frac{d}{ds}(\exp_E(s\mathbf{x})) L_{\exp_E(t\mathbf{x})*} | \exp_E(s\mathbf{x}) \frac{d}{ds}(\exp_E(s\mathbf{x})) \\ &= L_{\exp_E(t\mathbf{x})*} | g_{\mathbf{X}}(s) \nabla_{\dot{g}_{\mathbf{X}}(s)} \dot{g}_{\mathbf{X}}(s) = 0. \end{aligned}$$

A $g_{\mathbf{X},t}(s) = \exp_E((s+t)\mathbf{x})$ és a $h_t(s)$ is geodetikus. Mindkettő átmegy az $\exp_E(t\mathbf{x})$ ponton az $s = 0$ paraméternél, és $\dot{g}_{\mathbf{X},t}(0) = \mathbf{X}(g_{\mathbf{X},t}(0))$, valamint $\dot{h}_t(0) = L_{\exp(t\mathbf{x})*} | g_{\mathbf{X}}(0) \dot{g}_{\mathbf{X}}(0) = L_{\exp(t\mathbf{x})*} | E \mathbf{x} = \mathbf{X}(g_{\mathbf{X},t}(0))$ a balinvariáns kiterjesztés egyértelműsége miatt. A peremértékek egybeesése alapján a két geodetikus megegyezik, vagyis

$$\exp_E((s+t)\mathbf{x}) = g_{\mathbf{X},t}(s) = h_t(s) = \exp_E(t\mathbf{x}) \exp_E(s\mathbf{x})$$

ami igazolja az $s \mapsto \exp_E(s\mathbf{x})$ leképezés homomorfizmusát. ■

Megjegyzés. Az analitikusság vizsgálata elmaradt!!!

Lemma. A $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ homomorfizmusra $\varphi \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ \varphi_*$.

Bizonyítás. A $\varphi(\text{Exp}(t\mathbf{x}))$ görbe a $t = 0$ paraméternél átmegy az E egységen, a $\frac{d}{dt}(\varphi(\text{Exp}(t\mathbf{x})))_{t=0} = \varphi_*(\mathbf{x})$ érintője irányába. Ugyanakkor $\varphi \circ \text{Exp}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ homomorfizmus, és így Exp egyértelműsége a $\mathcal{H}$ csoporton adja az állítást. ■

Tétel. $\text{Ad}(\text{Exp}(\mathbf{x})) = e^{\text{ad}(\mathbf{x})}$ és $\text{AD}_G(\text{Exp}(\mathbf{x})) = \text{Exp}(\text{Ad}_G(\mathbf{x}))$.

Bizonyítás. Az első formulához az előző lemmát hasznosítjuk az $\text{Ad}: \mathcal{G} \rightarrow GL(T_E\mathcal{G})$ homomorfizmusra hiszen az $L(T_E\mathcal{G})$ téren Exp éppen az $M \mapsto e^M$ és $\text{Ad}_* = \text{ad}$.

Ugyancsak a fentebbi lemma segít a második formulánál, de ezúttal az AD_G homomorfizmusra alkalmazva. ■

Tétel. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_E\mathcal{G}$ vektorok esetén

$$\begin{aligned} 0 = [\mathbf{x}, \mathbf{y}] &\iff^1 \text{Exp } \mathbf{x} \text{Exp } \mathbf{y} = \text{Exp } \mathbf{y} \text{Exp } \mathbf{x} \\ &\iff^2 \text{Exp}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{Exp } \mathbf{x} \text{Exp } \mathbf{y} \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_E\mathcal{G}$ egyértelmű balinvariáns kiterjesztése, és legyen $\varphi_{\mathbf{X}}$ és $\varphi_{\mathbf{Y}}$ rendre ezek folyama.

Az első ekvivalencia igazolásához vegyük észre, hogy

$$0 = [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \iff 0 = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \iff \phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{t,s} := \varphi_{\mathbf{X}}^t \circ \varphi_{\mathbf{Y}}^s = \varphi_{\mathbf{Y}}^s \circ \varphi_{\mathbf{X}}^t,$$

és ezért

$$\phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{t,s}(G) = \varphi_{\mathbf{X}}^t(\varphi_{\mathbf{Y}}^s(G)) = \varphi_{\mathbf{Y}}^s(G) \cdot \varphi_{\mathbf{X}}^t(E) = G \cdot \varphi_{\mathbf{Y}}^s(E) \cdot \varphi_{\mathbf{X}}^t(E)$$

és ugyanígy

$$\phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{t,s}(G) = \varphi_{\mathbf{Y}}^s(\varphi_{\mathbf{X}}^t(G)) = G \cdot \varphi_{\mathbf{X}}^t(E) \varphi_{\mathbf{Y}}^s(E)$$

ami igazolja az állítást.

A második ekvivalencia igazolásához figyeljük meg, hogy a fenti definíció szerint $\phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{t+\tau, s+\sigma}(G) = \phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{t,s} \circ \phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{\tau, \sigma}(G)$, vagyis a $\phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{t,t}$ homomorfizmus, miközben $\phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{0,0}(E) = E$, és így $\phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{t,t}(E) = \text{Exp}(t \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{t,t}(E))$. Viszont

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{t,t}(E)) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\text{Exp}(t\mathbf{x}) \text{Exp}(t\mathbf{y})) \\ &= (L_{\text{Exp}(t\mathbf{x})*}|_E \mathbf{y} + R_{\text{Exp}(t\mathbf{y})*}|_E \mathbf{x})_{t=0} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \end{aligned}$$

amiből $\phi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{t, t} = \text{Exp}(t\mathbf{x} + t\mathbf{y})$, és $t = 1$ -re $\text{Exp}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{Exp } \mathbf{x} \text{Exp } \mathbf{y}$ következik. Ha ez utóbbi igaz, akkor

$$\text{Exp}(t\mathbf{x}) \text{Exp}(s\mathbf{y}) = \text{Exp}(t\mathbf{x} + s\mathbf{y}) = \text{Exp}(s\mathbf{y} + t\mathbf{x}) = \text{Exp}(s\mathbf{y}) \text{Exp}(t\mathbf{x}),$$

vagyis a folyamatok felcserélhetőek és akkor $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$, amiből $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0$. ■

Tétel. A $G(s) = \text{Exp}(-\sqrt{s}\mathbf{x}) \text{Exp}(-\sqrt{s}\mathbf{y}) \text{Exp}(\sqrt{s}\mathbf{x}) \text{Exp}(\sqrt{s}\mathbf{y})$ görbe érintője $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Bizonyítás. Legyen az f skalármező analitikus az egységnél, $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_E \mathcal{G}$ egyértelmű balinvariáns kiterjesztései. Nyilvánvalóan

$$\mathbf{X}^n \mathbf{Y}^m f(E) = \partial_{t(=0)}^n \partial_{s(=0)}^m f(\text{Exp}(t\mathbf{x}) \text{Exp}(s\mathbf{y})),$$

ezért

$$f(\text{Exp}(t\mathbf{x}) \text{Exp}(s\mathbf{y})) = \sum_{n, m \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} (t\mathbf{X})^n (s\mathbf{Y})^m f(E) = \sum_{n, m \geq 0} \frac{t^n}{n!} \frac{s^m}{m!} \mathbf{X}^n \mathbf{Y}^m f(E)$$

elegendően kicsiny t és s esetén. Tekintsük az

$$\text{Exp}^{-1}(\text{Exp } t\mathbf{x} \text{Exp } t\mathbf{y}) = t \cdot \mathbf{z}_1 + t^2 \mathbf{z}_2 + O(t^3)$$

sorfejtést. Ezt visszaírva

$$\begin{aligned} \sum_{n, m \geq 0} \frac{t^n}{n!} \frac{s^m}{m!} \mathbf{X}^n \mathbf{Y}^m f(E) &= f(\text{Exp}(t\mathbf{z}_1 + t^2 \mathbf{z}_2)) + O(t^3) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (t\mathbf{Z}_1 + t^2 \mathbf{Z}_2)^k f(E) + O(t^3) \end{aligned}$$

adódik, ahol $\mathbf{Z}_i$ a $\mathbf{z}_i \in T_E \mathcal{G}$ egyértelmű balinvariáns kiterjesztése. Ezen sorfejtések t -ben 0, 1 és 2 fokú tagjainak együtthatóit vizsgálva a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} f(E) &= f(E), \\ (\mathbf{X} + \mathbf{Y})f(E) &= \mathbf{Z}_1 f(E), \\ \left(\frac{1}{2}\mathbf{X}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{Y} + \frac{1}{2}\mathbf{Y}\mathbf{Y}\right)f(E) &= \left(\mathbf{Z}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_1\right)f(E) \\ &= \left(\mathbf{Z}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{X}\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{X}\mathbf{Y} + \frac{1}{2}\mathbf{Y}\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{Y}\mathbf{Y}\right)f(E). \end{aligned}$$

Mint ahogy f tetszőlegesen választható (valójában elegendő a koordináta függvényeket tekinteni), ebből $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{XY} - \mathbf{YX}) = \frac{1}{2}[\mathbf{XY}]$ adódik, amiből

$$\text{Exp}(t\mathbf{x}) \text{Exp}(t\mathbf{y}) = \text{Exp}\left(t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \frac{t^2}{2}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + O(t^3)\right)$$

következik. Kétszer helyettesítve:

$$\begin{aligned} H(t) &= \text{Exp}(-t\mathbf{x}) \text{Exp}(-t\mathbf{y}) \text{Exp}(t\mathbf{x}) \text{Exp}(t\mathbf{y}) \\ &= \text{Exp}\left(-t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \frac{t^2}{2}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + O(t^3)\right) \cdot \text{Exp}\left(t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \frac{t^2}{2}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + O(t^3)\right) \end{aligned}$$

Ezt helyettesítve f fent előállított sorfejtésébe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(H(t)) &= \sum_{n,m \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(-t(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \frac{t^2}{2}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + O(t^3)\right)^n \times \\ &\quad \times \left(t(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \frac{t^2}{2}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + O(t^3)\right)^m f(E). \end{aligned}$$

A harmadfokú közelítés fenntartásához elég a $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ és $(0, 2)$ indexekre vizsgálni az összeget, amiből

$$\begin{aligned} f(H(t)) &= f(E) + t^2[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f(E) + \\ &\quad + \left[\left(-t(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \frac{t^2}{2}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + O(t^3)\right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(t(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \frac{t^2}{2}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + O(t^3)\right) \right] f(E) + \\ &\quad + t^2(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^2 f(E) + O(t^3) \\ &= f(E) + t^2[\mathbf{x}, \mathbf{y}]f + O(t^3) \end{aligned}$$

adódik. Ebből $\dot{G}(0) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(f(H(\sqrt{s}))) = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]f(E)$ következik, ahogy állítottuk. ■

Megjegyzés. Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$\text{AD}_{\text{Exp}(t\mathbf{x})}(\text{Exp } t\mathbf{y}) = \text{Exp}(t\mathbf{x}) \text{Exp}(t\mathbf{y}) \text{Exp}(-t\mathbf{x}) = \text{Exp}(t\mathbf{y} + t^2[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + O(t^3))$$

Tétel.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\text{Exp}\left(\frac{t}{k}\mathbf{x}\right) \text{Exp}\left(\frac{t}{k}\mathbf{y}\right) \right)^k = \text{Exp}(t(\mathbf{x} + \mathbf{y}))$$

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításának közepén látottakból adódik, hogy

$$\begin{aligned} \left(\text{Exp} \left(\frac{t}{k} \mathbf{x} \right) \text{Exp} \left(\frac{t}{k} \mathbf{y} \right) \right)^k &= \left(\text{Exp} \left(\frac{t}{k} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + O \left(\frac{t^2}{k^2} \right) \right) \right)^k \\ &= \text{Exp} \left(t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + kO \left(\frac{t^2}{k^2} \right) \right) \rightarrow \text{Exp}(t(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Tétel. Ha $\mathbf{y} \in T_E \mathcal{G}$, akkor

$$\text{Exp}_*|_{T_{\mathbf{y}} T_E \mathcal{G}} = R_{\text{Exp} \mathbf{y}^*|E} \frac{e^{\text{ad} \mathbf{y}} - I}{\text{ad} \mathbf{y}} = L_{\text{Exp} \mathbf{y}^*|E} \frac{I - e^{-\text{ad} \mathbf{y}}}{\text{ad} \mathbf{y}}.$$

Bizonyítás. A $T_{\mathbf{y}} T_E \mathcal{G}$ és $T_E \mathcal{G}$ közötti kanonikus azonosítást kihasználva

$$\begin{aligned} \text{Exp}_*|_{T_{\mathbf{y}} T_E \mathcal{G}} \mathbf{x} &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \text{Exp}(\mathbf{y} + s\mathbf{x}) \quad (\in T_{\text{Exp} \mathbf{y}} \mathcal{G}) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (R_{\text{Exp}(\mathbf{y} + s\mathbf{x})}(E)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\varphi_{\mathbf{Z}(s)}^1(E)), \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{Z}(s)$ az $\mathbf{y} + s\mathbf{x}$ egyértelmű balinvariáns kiterjesztése. Ha $\mathbf{y} = 0$, akkor $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\varphi_{\mathbf{Z}(s)}^1(E)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\text{Exp}(s\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, vagyis $\text{Exp}_*|_{T_0 T_E \mathcal{G}} \mathbf{x} = \mathbf{x}$, tehát $\text{Exp}_*|_{T_0 T_E \mathcal{G}} = Id$. Általában egy analitikus f skalármező esetén

$$\begin{aligned} \text{Exp}_*|_{T_{\mathbf{y}} T_E \mathcal{G}} \mathbf{x} f &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(f(\varphi_{\mathbf{Z}(s)}^1(E)) \right) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(f(\text{Exp}(\mathbf{y} + s\mathbf{x})) \right) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{Z}(s))^k f(E) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\mathbf{Z}(s))^k f(E) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\mathbf{Y} + s\mathbf{X})^k f(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k \mathbf{Y}^{j-1} \mathbf{X} \mathbf{Y}^{k-j} f(E) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{Y}^m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{X} \mathbf{Y}^{n-m-1} f(E) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{Y}^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+m+1)!} \mathbf{X} \mathbf{Y}^l f(E), \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ egyértelmű balinvariáns kiterjesztése.

Minden $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \tilde{T}\mathcal{G}$ esetén legyen $\mathbf{Y}^R: \mathbf{Y} \mapsto \mathbf{X}\mathbf{Y}$, illetve $\mathbf{Y}^L: \mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y}\mathbf{X}$. Ekkor $\mathbf{Y}^R = \mathbf{Y}^L - \text{ad} \mathbf{Y}$ miatt

$$(\mathbf{Y}^R)^p = (\mathbf{Y}^L - \text{ad} \mathbf{Y})^p = \sum_{q=0}^p (-1)^q \binom{p}{q} (\mathbf{Y}^L)^{p-q} (\text{ad} \mathbf{Y})^q,$$

mivel $\mathbf{Y}^L \operatorname{ad} \mathbf{Y} = \operatorname{ad} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^L$.

Eszerint

$$\mathbf{X} \mathbf{Y}^l = (\mathbf{Y}^R)^l \mathbf{X} = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} (\mathbf{Y}^L)^{l-k} (\operatorname{ad} \mathbf{Y})^k \mathbf{X},$$

amiből a fentebbieket folytatva

$$\begin{aligned} \operatorname{Exp}_{*|T_{\mathbf{Y}} T_E \mathcal{G}} \mathbf{x} f &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{Y}^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+m+1)!} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \mathbf{Y}^{l-k} (\operatorname{ad} \mathbf{Y})^k \mathbf{X} f(E) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{l=k}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{l!}{(l+m+1)! k! (l-k)!} \mathbf{Y}^{l+m-k} (\operatorname{ad} \mathbf{Y})^k \mathbf{X} f(E) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{(r+1)!} \sum_{j=0}^{r-k} \frac{(r-j)!}{k! (r-j-k)!} \mathbf{Y}^{r-k} (\operatorname{ad} \mathbf{Y})^k \mathbf{X} f(E). \end{aligned}$$

(Megjegyezzük, hogy az l és m indexekre vonatkozó összegzések felcserélhetőségét ellenőrizni kellene!) Mármost $\sum_{j=0}^{r-k} \binom{r-j}{k} = \binom{r+1}{k+1}$, tehát

$$\begin{aligned} \operatorname{Exp}_{*|T_{\mathbf{Y}} T_E \mathcal{G}} \mathbf{x} f &= \sum_{k=0}^l (-1)^k \sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{(r+1)!} \binom{r+1}{k+1} \mathbf{Y}^{r-k} (\operatorname{ad} \mathbf{Y})^k \mathbf{X} f(E) \\ &= \sum_{k=0}^l (-1)^k \sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{(k+1)! (r-k)!} \mathbf{Y}^{r-k} (\operatorname{ad} \mathbf{Y})^k \mathbf{X} f(E) \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \mathbf{Y}^s \right) (\operatorname{ad} \mathbf{Y})^k \mathbf{X} f(E) \\ &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Y}^s}{s!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad}(-\mathbf{Y}))^k}{(k+1)!} \right) \mathbf{X} f(E) \\ &= \frac{I - e^{-\operatorname{ad} \mathbf{Y}}}{\operatorname{ad} \mathbf{Y}} \mathbf{X} f(\operatorname{Exp} \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ is balinvariáns, ebből

$$\operatorname{Exp}_{*|T_{\mathbf{Y}} T_E \mathcal{G}} \mathbf{x} f = \left(L_{\operatorname{Exp} \mathbf{y} *} | T_E \mathcal{G} \frac{I - e^{-\operatorname{ad} \mathbf{y}}}{\operatorname{ad} \mathbf{y}} \mathbf{x} \right) f,$$

amint állítottuk. ■

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy eszerint $\text{Exp}_*|_{T_0 T_E \mathcal{G}} = \text{Id}$ és így az inverzfüggvény-tétel következtében létezik az O origónak a $T_E \mathcal{G}$ -ben egy olyan nyílt környezete, melyben az Exp diffeomorfizmus.

Definíció. Legyen $O \in \mathcal{U} \subset T_E \mathcal{G}$ olyan nyílt tartomány, melyen Exp diffeomorfizmus. A $\log: \text{Exp} \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ ($G \mapsto \text{Exp}^{-1}(G)$) leképezést logaritmusnak nevezzük. Nyilván $\log(G) = \text{Exp}^{-1}(G)$.

Definíció. A $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \log(\text{Exp } \mathbf{x} \text{Exp } \mathbf{y})$ vektort, ha létezik, az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_E \mathcal{G}$ logaritmikus szorzatának nevezzük.

Tétel. Legyen $T_E^i \mathcal{G} = \{\mathbf{x} \in T_E \mathcal{G} : \det\left(\frac{1 - e^{-\text{ad } \mathbf{y}}}{\text{ad } \mathbf{y}}\right) \neq 0\}$. Ekkor $T_E \mathcal{G} \times T_E^i \mathcal{G}$ a $(0, 0)$ nyitott környezete a $T_E \mathcal{G} \times T_E \mathcal{G}$ térben, és a $\mu: T_E \mathcal{G} \times T_E^i \mathcal{G} \rightarrow T_E \mathcal{G}$ logaritmikus szorzás analitikus.

Bizonyítás. A $T_E \mathcal{G} \times T_E^i \mathcal{G}$ nyitottsága triviális. Legyen $\mathbf{z}(t) = \mu(\mathbf{x}, t\mathbf{y})$, ahol $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T_E \mathcal{G} \times T_E^i \mathcal{G}$. Ekkor egyrészt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{Exp } \mathbf{z}(t)) &= \text{Exp}_*|_{T_{\mathbf{z}(t)} T_E \mathcal{G}} \dot{\mathbf{z}}(t) = L_{\text{Exp } \mathbf{z}(t)*|_{T_E \mathcal{G}}} \frac{I - e^{-\text{ad } \mathbf{z}(t)}}{\text{ad } \mathbf{z}(t)} \dot{\mathbf{z}}(t) \\ &= L_{\text{Exp } \mathbf{x}*|_{T_{\text{Exp}(t\mathbf{y})} \mathcal{G}}} L_{\text{Exp}(t\mathbf{y})*|_{T_E \mathcal{G}}} \frac{I - e^{-\text{ad } \mathbf{z}(t)}}{\text{ad } \mathbf{z}(t)} \dot{\mathbf{z}}(t), \end{aligned}$$

másrészt

$$\frac{d}{dt}(\text{Exp } \mathbf{z}(t)) = \frac{d}{dt}(\text{Exp}(\mathbf{x}) \text{Exp}(t\mathbf{y})) = L_{\text{Exp } \mathbf{x}*|_{T_{\text{Exp}(t\mathbf{y})} \mathcal{G}}} \mathbf{Y}(\text{Exp}(t\mathbf{y})),$$

ahol $\mathbf{Y}$ az $\mathbf{y}$ egyértelmű balinvariáns kiterjesztése. Összevetve a két eredményt

$$\mathbf{Y}(\text{Exp}(t\mathbf{y})) = L_{\text{Exp}(t\mathbf{y})*|_{T_E \mathcal{G}}} \frac{I - e^{-\text{ad } \mathbf{z}(t)}}{\text{ad } \mathbf{z}(t)} \dot{\mathbf{z}}(t)$$

adódik. Figyelembevételre ugyanakkor, hogy $\mathbf{Y}(\text{Exp}(t\mathbf{y})) = L_{\text{Exp}(t\mathbf{y})*|_{T_E(G)}} \mathbf{y}$, azt kapjuk, hogy

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = f(\mathbf{z}(t)) := \frac{\text{ad } \mathbf{z}(t)}{I - e^{-\text{ad } \mathbf{z}(t)}} \mathbf{y},$$

ahol $\mathbf{z}(0) = \mu(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$. Ez egy elsőfokú analitikus peremértékes differenciálegyenlet, ezért $\mathbf{z}$ analitikus és analitikusan függ a peremértékeitől is. Márpedig $\mathbf{z}(1) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ami bizonyítja állításunkat. ■

Definíció. Egy $\mathcal{G}$ Lie-csoportot analitikusnak nevezünk, ha mind sokaságként analitikus, mind a $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} ((G, H) \mapsto G \cdot H^{-1})$ leképezés analitikus.

Tétel. Minden Lie-csoportnak van analitikus atlasza úgy, hogy az identikus leképezés (L_E) az eredeti és az új atlasz között legalább kétszer differenciálható.

Bizonyítás. Legyen $0 \in \mathcal{U} \subseteq T_E \mathcal{G}$ olyan nyílt tartomány, melyen Exp diffeomorfizmus. Legyen $0 \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ olyan nyílt tartomány, melyben minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{U}_0$ esetére $(\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \in T_E \mathcal{G} \times T_E^i \mathcal{G}$, $\mu(\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \in T_E \mathcal{G} \times T_E^i \mathcal{G}$ és $\mu(\mu(\mathbf{x}, -\mathbf{y}), \mathbf{z}) \in T_E \mathcal{G} \times T_E^i \mathcal{G}$. Végül legyen $\mathcal{V}_G = L_G \text{Exp} \mathcal{U}_0$ és $r_G(\mathbf{x}) = G \cdot \text{Exp} \mathbf{x}$. Állítjuk, hogy a $\{(\mathcal{V}_G, r_G)\}_{G \in \mathcal{G}}$ (1) analitikus atlasz, (2) erre nézve a szorzás $\mathcal{G}$ -ben analitikus, (3) az identikus $L_E: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} (G \mapsto G)$ leképezés az eredeti és új atlasz között C^2 .

(1) Az átparaméterező függvényekre

$$r_G^{-1}(r_H(\mathbf{x})) = \log(G^{-1}(H \text{Exp} \mathbf{x})) = \mu(\log(G^{-1}H), \mathbf{x}),$$

amiről épp imént bizonyítottuk az analitikusságot.

(2) Ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}_0$, akkor $G \text{Exp} \mathbf{x} \in \mathcal{V}_G$ és $H \text{Exp} \mathbf{y} \in \mathcal{V}_H$, valamint $(G \text{Exp} \mathbf{x}) \cdot (H \text{Exp} \mathbf{y})^{-1} \in \mathcal{V}_{GH^{-1}}$ és a szorzásra

$$\begin{aligned} r_{GH^{-1}}^{-1}((G \text{Exp} \mathbf{x}) \cdot (H \text{Exp} \mathbf{y})^{-1}) &= \log((GH^{-1})^{-1}(G \text{Exp} \mathbf{x}) \cdot (H \text{Exp} \mathbf{y})^{-1}) \\ &= \log(AD_H(\text{Exp}(\mu(\mathbf{x}, -\mathbf{y})))) \\ &= \log(\text{Exp}(\text{Ad}_H(\mu(\mathbf{x}, -\mathbf{y})))) \\ &= \text{Ad}_H(\mu(\mathbf{x}, -\mathbf{y})) \end{aligned}$$

Mivel $\text{Ad}_H \in \text{Aut } T_E \mathcal{G}$ és μ analitikus, a szorzás is analitikus.

(3) $r_G^{-1} \circ L_E \circ \text{Exp} \mathbf{x} = \mu(-\log G, \mathbf{x})$ analitikus, Exp pedig az eredeti atlaszra nézve legalább C^2 , ezért L_E is legalább C^2 . ■

Tétel. (1) Analitikus Lie-csoportban az exponenciális leképezés is analitikus. (2) Ha a $(\mathcal{G}, r)$ és $(\mathcal{G}, p)$ is analitikus Lie-csoport, és ezek közt az L_E diffeomorfizmus, akkor L_E analitikus.

Bizonyítás. Az (1) és az előző bizonyítás (3) pontja együtt azonnal implikálja (2)-t. Ha a Lie-csoport analitikus, akkor a fenti bizonyítás (3) pontjának összefüggése szerinti

$$\text{Exp} \mathbf{x} = r_G(\mu(-\log G, \mathbf{x}))$$

azonosság miatt Exp analitikus, mert minden jobboldali tag analitikus. ■

Megjegyzés. Eszerint mindig létezik analitikus atlasz, és azok mindig diffeomorfak egymással az identikus leképezés szerint. A továbbiakban ezt a diffeomorfizmustól eltekintve egyértelmű analitikus atlaszt használjuk.

Tétel. Legyen $\mathcal{U} \subseteq T_E \mathcal{G}$ nyitott, melyen a logaritmikus szorzás értelmezett, és legyen $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Ekkor $(\mathcal{U}, \odot)$ egy lokális Lie-csoport.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{x} \odot 0 = 0 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ és $\mathbf{x} \odot (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) \odot (\mathbf{x}) = 0$, továbbá $\mathbf{x} \odot (-\mathbf{y})$ nyilván differenciálható, ezért elég az asszociativitást bizonyítani

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \odot \mathbf{z} &= \log(\text{Exp}(\log(\text{Exp } \mathbf{x} \text{ Exp } \mathbf{y}))) \text{Exp } \mathbf{z} \\ &= \log(\text{Exp } \mathbf{x} \text{ Exp } \mathbf{y} \text{ Exp } \mathbf{z}) \\ &= \log(\text{Exp } \mathbf{x} \text{ Exp}(\log(\text{Exp } \mathbf{y} \text{ Exp } \mathbf{z}))) \\ &= \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z}) \end{aligned}$$

■

Tétel. $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0 \implies \mathbf{x} \odot \mathbf{y} = \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \text{Exp } \mathbf{y} \text{ Exp } \mathbf{x} \text{ Exp } (-\mathbf{y}) &= \text{AD}_{\text{Exp } \mathbf{y}} \text{Exp } \mathbf{x} = \text{Exp}(\text{Ad}_{\text{Exp } \mathbf{y}} \mathbf{x}) = \text{Exp}(e^{\text{ad } \mathbf{y}} \mathbf{x}) \\ &= \text{Exp} \left(\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\text{ad } \mathbf{y})^k \mathbf{x} \right) \\ &= \text{Exp} \left(\mathbf{x} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\text{ad } \mathbf{y})^{k-1} \right) [\mathbf{y}, \mathbf{x}] \right) = \text{Exp } \mathbf{x} \end{aligned}$$

■

Tétel. Ha mindig $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = \mathbf{y} \odot \mathbf{x} \implies [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0$ mindig

Bizonyítás. A feltétel szerint $\text{AD}_{\text{Exp } \mathbf{y}}$ az identikus leképezés, amiért $\text{Ad}_{\text{Exp } \mathbf{y}}$ is identikus minden $\mathbf{y}$ -ra, és hasonlóan $e^{\text{ad } \mathbf{y}} = \text{id}$, amiből $\text{ad } \mathbf{y} = 0$ minden $\mathbf{y}$ esetén, vagyis $0 = \text{ad } \mathbf{y}(\mathbf{x}) = [\mathbf{y}, \mathbf{x}]$ minden $\mathbf{y}$ és $\mathbf{x}$ vektorra.

■

KURUSA Á., SzTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi Vértanúk tere 1.; e-mail: kurusa@math.u-szeged.hu