A transzfinit átmérő

Totik Vilmos*

2015. május 22.

1923-ban, egy számelméleti problémával kapcsolatban vezette be Fekete Mihály [2] a transzfinit átmérő fogalmát, amely később más területeken (analízis, geometria) is alkalmazásra talált, és máig jelentőséggel bír. Dolgozatunkban ezt a magyar „találmányt" ismertetjük röviden. Az érdeklődő olvasó a dolgozat végén szereplő feladatokon keresztül behatóbban is megismerkedhet a témával, illetve az [1], [5] és [9] könyvekben további részleteket találhat.

Fekete Mihály Zentán született 1886-ban. 1909-ben Budapesten doktorált, ezután Göttingában tanult, majd Budapesten egyetemen, ill. különböző középiskolákban tanított, többek között a fiatal Neumann Jánossal is foglalkozott. 1928-ban emigrált, és a jeruzsálemi Hebrew egyetem (ma a világ egyik vezető egyeteme) egyik első matematikaprofesszora, később a matematikai intézet vezetője, az egyetem dékánja, majd rektora lett. Elsősorban komplex függvénytannal és approximációelmélettel foglalkozott. Jeruzsálemben halt meg 1958-ban.

1. A transzfinit átmérő

Legyen K egy korlátos és zárt halmaz a térben, és jelölje $d(P,Q)$ két térbeli pont távolságát. Egy adott n természetes számra n olyan pontot szeretnénk választani K-ból, amelyek a lehető legtávolabb vannak egymástól abban az értelemben, hogy a távolságuk szorzata a lehető legnagyobb, tehát maximalizálni szeretnénk a $\prod_{i\neq j} d(P_i,P_j)$ szorzatot azon feltétel mellett, hogy a $P_1,\dots,P_n$ pontok mind K-beliek. Legyen $\delta_n(K)$ a fenti szorzatok maximuma (megmutatható, hogy a maximum felvétetik):

$$\delta_n(K) = \max\left\{ \prod_{1\le i\neq j\le n} d(P_i,P_j) \,\middle|\, P_1,\dots,P_n \in K \right\}. \tag{1}$$

Ha $P_1,\dots,P_n \in K$ extremális, azaz a P_i-k közötti távolságok szorzata $\delta_n(K)$, akkor a $P_1,\dots,P_n$ pontokat Fekete-pontoknak nevezzük (pontosabban, $\{P_1,\dots,P_n\}$ egy n pontú Fekete-pontrendszert alkot). Ilyen extremális rendszer több is lehet (pl. kör vagy gömb esetén).

*A dolgozat a European Research Council Advanced Grant No. 267055 támogatásával készült

Ha $P_1, \ldots, P_{n+1}$ tetszőleges $(n+1)$ darab K-beli pont, és kihagyjuk a k-adik pontot (valamely $1 \leq k \leq n+1$-ra), akkor egy olyan n elemű K-beli pontrendszert kapunk, amelyre az összes távolság szorzata legfeljebb $\delta_n(K)$, azaz

$$\prod_{1 \leq i \neq j \leq n+1,\ i,j \neq k} d(P_i, P_j) \leq \delta_n(K).$$

Szorozzuk össze az így kapott egyenlőtlenségeket $k = 1, 2, \ldots, n+1$-re! Egy $d(P_i, P_j)$ távolság a bal oldalon $(n-1)$-szer fog szerepelni, ezért

$$\left(\prod_{1 \leq i \neq j \leq n+1} d(P_i, P_j) \right)^{n-1} \leq \delta_n(K)^{n+1}.$$

Ha itt most a bal oldal maximumát vesszük minden $P_1, \ldots, P_{n+1} \in K$ esetére,

$$\delta_{n+1}(K)^{n-1} \leq \delta_n(K)^{n+1} \tag{2}$$

adódik. Mivel a $\delta_n(K)$-t definiáló (1) szorzatban $n(n-1)$ tényező szerepel, célszerű δ_n-et úgy normálni, hogy az $n(n-1)$-edik gyökét vesszük. (2) szerint

$$\delta_{n+1}(K)^{1/n(n+1)} \leq \delta_n(K)^{1/n(n-1)},$$

azaz a $\{\delta_n(K)^{1/n(n-1)}\}$ nemnegatív sorozat csökken, ezért létezik határértéke, amit $\delta(K)$-val jelölünk:

$$\delta(K) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(K)^{1/n(n-1)}. \tag{3}$$

$\delta(K)$-t a K halmaz transzfinit átmérőjének nevezzük.

Halmazok transzfinit átmérőjének meghatározása messze nem triviális feladat, és általában még nehezebb egy adott n-re $\delta_n(K)$ értékének kiszámítása. Például gömbre $\delta_n(K)$ értéke nem ismert semmilyen $n > 5$ esetén. A dolgozat 3. és 4. részeiben megadjuk körök/körlapok, illetve szakaszok transzfinit átmérőjét.

Bár a fenti definíciót a térben mondtuk ki (tulajdonképpen akárhány dimenziós térben kimondható), a transzfinit átmérő jelentősége síkbeli halmazokra mutatkozik, így a továbbiakban mindig síkbeli halmazokkal fogunk foglalkozni. A síkot tekinthetjük a komplex síknak, és P_i helyett z_i-t, $d(P_i, P_j)$ helyett $|z_i - z_j|$-t fogunk írni, tehát ekkor a transzfinit átmérőben szereplő szorzat a $\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} |z_i - z_j|$ alakot ölti, ahol $z_1, \ldots, z_n \in K$. Könnyen látható, hogy ez még a

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \right)^2$$

alakban is írható.

2. Polinomok diszkriminánsa és algebrai számok

Fekete a transzfinit átmérőt Schur [7] alább részletezendő számelméleti problémájával kapcsolatban vezette be. Hogy a gondolatmenetét megértsük, először polinomok diszkriminánsáról kell beszélnünk.

A már középiskolában bevezetett terminológia szerint az ax^2+bx+c polinom (vagy az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet) diszkriminánsa b^2-4ac. Ez mutatja meg, hogy a polinom zérushelyei egyszeresek-e: e polinom két zérushelye pontosan akkor esik egybe, ha a diszkriminánsa 0.

Magasabb fokú $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $a_n\neq 0$, polinomoknál is van hasonló fogalom: P_n diszkriminánsa, $D(P_N)$ az alábbi determináns értéke osztva $(-1)^{n(n-1)/2}a_n$-el:

$$\begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & & & & & & & & \\
0 & \cdots & & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots\ a_1 & a_0 \\
na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & & & & & & & & \\
0 & \cdots & & 0 & 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & a_1
\end{vmatrix}$$

Ebben a $(2n-1)\times(2n-1)$ méretű determinánsban az első $n-1$ sort úgy kapjuk, hogy az i-edik sorban a polinom együtthatói állnak $i-1$ egységgel jobbra tolva (minden más elem 0), míg az utolsó n sor képzése hasonló, csak oda a polinom deriváltjának együtthatóit írjuk. Vegyük észre, hogy a determináns első oszlopából kiemelhető az a_n szám, ezért ha a polinom együtthatói egész számok, akkor a diszkrimináns egész szám. Ezt az alábbiakban lényegesen fel fogjuk használni.

Igazolható, hogy ha $z_1,\ldots,z_n$ a polinom zérushelyei, akkor

$$D(P_n)=(-1)^{n(n-1)/2}a_n^{2n-2}\prod_{i\neq j}(z_i-z_j),$$

amiből azonnal következik, hogy a polinomnak akkor és csakis akkor van többszörös zérushelye, ha a diszkriminánsa 0.

Egész együtthatós polinomok zérushelyeit nevezzük algebrai számoknak. Ha α algebrai, akkor van egy legkisebb fokszámú egész együtthatós $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $a_n\neq 0$, polinom, amelyre $P_n(\alpha)=0$. Ha feltesszük, hogy $a_n>0$, és P_n együtthatóinak 1 a legnagyobb közös osztója, akkor P_n egyértelműen meghatározott, ezt nevezzük az α minimálpolinomjának. A P_n fokszámát nevezzük az α szám fokának, és P_n zérushelyeit nevezzük az α algebrai konjugáltjainak. Pl. minden $\alpha=b/a$ racionális szám (ahol a és b relatív prímek) algebrai, és a legkisebb fokú polinom amelynek α zérushelye nyilván $ax-b$. Itt az a főegyüttható az α nevezője, és ennek analógiájára, ha az α algebrai szám minimálpolinomja $P_n(x)=a_nx^n+\cdots$, akkor nevezzük a_n-et az α nevezőjének.

Az 1 nevezőjű algebrai számokat algebrai egészeknek hívjuk (ezeknél tehát a minimálpolinomban 1 a főegyüttható).

Ámmost Fekete az alábbi problémát vizsgálta: ha adott egy K korlátos zárt halmaz a síkon, és egy a természetes szám, akkor hány olyan (akárhányadfokú) a nevezőjű algebrai szám van K-ban, amelynek összes konjugáltja is K-ba tartozik. Fekete tétele szerint ha a halmaz transzfinit átmérője egynél kisebb, akkor csak véges sok ilyen algebrai számot tartalmazhat (korábban ezt Schur egynél kisebb átmérőjű körlapra, illetve 4-nél rövidebb szakaszra igazolta). Ezt igazolandó, először is jegyezzük meg, hogy egy adott fokszámra K biztosan csak véges sok ilyen algebrai számot tartalmaz (ld. a 8. feladatot a dolgozat végén). Ha tehát végtelen sok fenti tulajdonsággal rendelkező algebrai szám van K-ban, akkor azok fokszáma a végtelenhez tart. Legyen α egy ilyen K-beli algebrai szám, és $P_n(z) = az^n + \cdots$ a minimálpolinomja. Könnyen látható, hogy P_n-nek nem lehet többszörös zérushelye (ugyanis akkor P_n és P_n' legnagyobb közös oszója nem konstans, így P_n-et azzal leosztva egy olyan egész együtthatós polinomot kaphatnánk, amely eltűnik α-ban, és n-nél kisebb fokszámú). Tehát P_n diszkriminánsa $D(P_n)$ egész szám és nem nulla, ezért $|D(P_n)| \geq 1$. Ha $z_1, \cdots, z_n$ a P_n zérushelyei (mind K-beliek a feltevés szerint), akkor az előbbi reláció azt mondja, hogy

$$a^{2n-2} \prod_{i \neq j} |z_i - z_j| \geq 1.$$

Tehát $\delta_n(K)$ definíciója alapján $\delta_n(K) \geq 1/a^{2n-2}$, és így

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(K)^{1/n(n-1)} \geq \lim_{n\to\infty} 1/a^{2/n} = 1,$$

ami ellentmond a feltételnek, hogy $\delta(K) < 1$.

Jegyezzük még meg, hogy a Schur-Fekete-probléma 1-nél nagyobb transzfinit átmérőjű halmazokra meglehetősen nehéz. Fekete és Szegő [3] igazolták, hogy ha egy halmaz a belsejében tartalmaz egy 1-nél nagyobb transzfinit átmérőjű, a számegyenesre szimmetrikus zárt halmazt, akkor végtelen sok algebrai egészet tartalmaz amelyeknek minden konjugáltja is a halmazban van. Robinson [6] pedig azt mutatta meg, hogy ugyanez igaz a számegyenes bármely 1-nél nagyobb transzfinit átmérőjű halmazára.

3. Körök transzfinit átmérője

Legyen C_1 az origó középpontú egységsugarú kör. C_1 transzfinit átmérőjét két módon is ki fogjuk számítani, az egyik teljesen elemi, a másik viszont azt is adni fogja, hogy nemcsak C_1 transzifnit atmérője 1, de ugyanez igaz az egységkörlap transzfinit átmérőjére is (bár ez elemi megfontolással is könnyen látható).

Az első módszer a [4] dolgozat gondolatmenetét követi. Legyen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in C_1$ egy n pontú Fekete-pontrendszer a C_1-re vonatkozóan, amelyre tehát

$$\delta_n(C_1)^{1/2} = \prod_{1\leq i<j\leq n} |z_i - z_j|$$

maximális. Nyilvánvaló, hogy ezen pontrenszer tetszőleges elforgatottja is Fekete-pontrendszer, ezért feltehetjük, hogy $z_1 = 1$, és hogy a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pontok a körön az óramutató járásával ellenkező irányban követik egymást. Legyen az $1z_j$ húr középponti szöge $2\alpha_j$. Ekkor $\alpha_1 = 0$, $\alpha_j \in [0, \pi)$, és a $z_i z_j$, $i < j$, húr hossza $2\sin(\alpha_j - \alpha_i)$. Tehát

$$\delta_n(C_1)^{1/2} = \prod_{1 \le i < j \le n} |z_i - z_j| = \prod_{i<j} 2\sin(\alpha_j - \alpha_i).$$

Megmutatjuk, hogy nincs más n pontú Fekete-rendszer amelynek egyik pontja 1. Valóban, tegyük fel, hogy $z_1^*, \ldots, z_n^*$ egy másik Fekete-rendszer amelyre $z_1^* = 1$ és a $z_1^*, \ldots, z_n^*$ pontok az óramutató járásával ellenkező irányban követik egymást. Legyen az $1z_j^*$ húr középponti szöge $2\beta_j$, amivel tehát $\beta_1 = 0$, $\beta_j \in [0, \pi)$, és

$$\delta_n(C_1)^{1/2} = \prod_{1 \le i < j \le n} |z_i^* - z_j^*| = \prod_{i<j} 2\sin(\beta_j - \beta_i).$$

Az utóbbi két szorzat-formulát összeszorozva kapjuk, hogy

$$\delta_n(C_1) = \prod_{i<j} 2^2 \sin(\alpha_j - \alpha_i)\sin(\beta_j - \beta_i).$$

Most felhasználjuk, hogy ha $\alpha, \beta \in [0, \pi]$, akkor

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right) \le \frac{1}{2}\left(1 - \cos(\alpha + \beta)\right) = \sin^2\frac{\alpha + \beta}{2},$$

és itt egyenlőség csak az $\alpha = \beta$ esetben állhat fenn. Tehát

$$\delta_n(C_1) \le \prod_{i<j} 2^2 \sin^2\left(\frac{\alpha_j + \beta_j}{2} - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}\right) = \left(\prod_{i<j} 2\sin\left(\frac{\alpha_j + \beta_j}{2} - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}\right)\right)^2,$$

és egyenlőség csak az $\alpha_j = \beta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ esetben áll fenn. De ez azt jelenti, hogy ha $Z_j \in C_1$ az a pont az egységkörön, amelyre az $1Z_j$ húr középponti szöge $(\alpha_j + \beta_j)/2$, akkor $Z_0 = 1$ és

$$\delta_n(C_1)^{1/2} < \prod_{1 \le i < j \le n} |Z_i - Z_j|, \tag{4}$$

hacsak nem $\alpha_j = \beta_j$ minden j-re. De (4) lehetetlen a $\delta_n(C_1)$ definíciója miatt, így $\alpha_j = \beta_j$ kell, hogy legyen minden j-re, ami adja az egyértelműséget.

Az egyértelműségből következik, hogy $z_1, \ldots, z_n$ egy szabályos n-szög csúcsait alkotják. Valóban, ha a $\{z_1, \ldots, z_n\}$ pontrendszert elforgatjuk α_1 szöggel az óramutató járásával megegyező irányban, akkor a z_2 elforgatottja kerül az 1 pontba, és mivel az olyan Fekete-rendszerek egyértelműek, amelyek tartalmazzák az 1 pontot, azt kapjuk, hogy ezzel az elforgatással a $z_1, \ldots, z_n$ rendszer önmagába megy át, ami igazolja, hogy ezek a pontok egy szabályos n-szög csúcsait alkotják.

Most már könnyen kiszámolhatjuk a $\delta_n(C_1)$ mennyiséget, hiszen az nem más, mint az egységkörbe írt szabályos n-szög átlói hosszának szorzata (a sokszög oldalait is átlónak nevezve). Ha a szabályos n-szög csúcsai a $z_1, \ldots, z_n$ pontok mint az előbb, akkor ezek az n-edik egységgyökök, azaz a $z^n = 1$ egyenlet megoldásai. Az 1 pontból kiinduló átlók hosszának szorzata

$$\prod_{2 \le j \le n} |1 - z_j| = \left| \prod_{2 \le j \le n} (1 - z_j) \right|$$

és vegyük észre, hogy $z_1 = 1$ miatt a jobb oldalon a $\prod_{1 \le j \le n}(z - z_j) = z^n - 1$ polinom deriváltjának az 1 helyen felvett értéke szerepel, tehát a jobb oldal pontosan n. Persze ugyanez lesz bármely más pontból húzott átlók hosszának szorzatára is, így

$$\delta_n(C_1) = \prod_{i \ne j} |z_i - z_j| = n^n.$$

Ha itt most $n(n-1)$-edik gyököt vonunk és n-et tartatjuk a végtelenbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$\delta(C_1) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(C_1)^{1/n(n-1)} = \lim_{n \to \infty} n^{1/n-1} = 1,$$

azaz az egységkör transzfinit átmérője 1. Ebből nagyítással azonnal adódik, hogy egy R sugarú kör transzfinit átmérője R.

A második megoldásban célszerű C_1-re úgy tekinteni, mint azon komplex számok halmazára, amelyek abszolút értéke 1: $C_1 = \{z \mid |z| = 1\}$. A következőkben Pólya György gondolatmenetével fogjuk kiszámolni C_1 transzfinit átmérőjét. Ismét elegendő azt igazoljuk, hogy $\delta_n(C_1) = n^n$.

Tekintsük a $z_1, \ldots, z_n$ n-edik egységgyököket, amelyek tehát a $z^n = 1$ egyenlet megoldásai. Az előző megoldás utolsó részében kiszámoltuk, hogy

$$\prod_{i \ne j} |z_i - z_j| = n^n,$$

tehát $\delta_n(C_1)$ is legalább ennyi: $\delta_n(C_1) \ge n^n$.

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához legyenek $z_1, \ldots, z_n \in C_1$ tetszőlegesek. A $\prod_{j<i}(z_i - z_j)$ szorzat a

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Vandermonde-determináns értéke. Hadamard determinánsokra vonatkozó egyenlőtlensége azt mondja ki, hogy ha $\Delta = |a_{ij}|_{i,j=1}^n$ tetszőleges (komplex) számokból álló determináns, akkor az értéke abszolút értékben legfeljebb akkora, mint a soraiban álló vektorok hosszának szorzata:

$$|\Delta| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Mivel minden z_j-re és k-ra $|z_i^k| = 1$, azt kapjuk, hogy a fenti determinánsban a sorvektorok hossza $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} |z_i^j|^2} = \sqrt{n},$$

és így az eddigiekből

$$\left| \prod_{j<i} (z_i - z_j) \right| \leq (\sqrt{n})^n$$

adódik. A bal oldal négyzetének maximuma $\delta_n(C_1)$, amivel kapjuk, hogy $\delta_n(C_1) \leq n^n$.

Ezzel ismét igazoltuk, hogy

$$\delta_n(C_1) = n^n.$$

Ha D_1 a zárt egységkörlap, akkor ugyanez a bizonyítás adja, hogy

$$\delta_n(D_1) = \delta_n(C_1) = n^n,$$

csak annyit kell módosítani, hogy $z_1, \ldots, z_n \in D_1$ esetén

$$\sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} |z_i^j|^2} \leq \sqrt{n}.$$

A fentiek mutatják, hogy az n-edik egységgyökök egy n elemű Fekete-halmazt alkotnak (azaz rájuk $\prod_{i\neq j} |z_i - z_j|$ maximális), és tulajdonképpen csak ez az egyedüli extremális halmaz, nevezetesen ha $\prod_{i\neq j} |z_i - z_j|$ maximális, akkor $z_1, \ldots, z_n$ egy, az egységkörbe írt szabályos n-szög csúcsait adják.

Igazoltuk tehát, hogy egy R sugarú kör vagy körlap transzfinit átmérője R. Ez speciális esete az ellipszisnek: ha K ellipszis, amelynek féltengelyeinek hossza a és b, akkor $\delta(K) = (a+b)/2$.

4. Szakaszok transzfinit átmérője

A $[-1,1]$ szakaszra a δ_n értékét Stieltjes határozta meg 1885-ben (egy más kérdés kapcsán). Tétele szerint

$$\delta_n([-1,1]) = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots (n-2)^{n-2}}{3^3 5^5 \cdots (2n-3)^{2n-3}}, \tag{6}$$

és egy adott n-re a Fekete-pontok egyértelműen meghatározottak, azaz minden n-re csak egyetlen extremális ponthalmaz van, amelyre $\prod_{i \neq j} |z_i - z_j|$ maximális. Ezt úgy kapjuk meg, hogy az $n-2$ fokszámú ún. $(1,1)$ paraméterű Jacobi polinom zérushelyeihez hozzávesszük a ± 1 pontokat. Az $(1,1)$ paraméterű Jacobi polinomok azok a $p_k(x) = x^k + \cdots$, $k = 0, 1, \ldots$ polinomok, amelyekre igaz, hogy

$$\int_{-1}^{1} p_k(x) p_l(x)(1-x^2)dx = 0$$

ha $k \neq l$. Könnyű megmutatni, hogy ez a feltétel egyértelműen definiálja a p_k polinomokat.

Hogy a transzfinit átmérőt meghatározhassuk, vegyük észre, hogy (6)-ból következik, hogy

$$\left(\frac{\delta_n([-1,1])}{\delta_{n-1}([-1,1])}\right)^{1/n} = \left(\frac{n^n \cdot (n-2)^{n-2}}{(2n-3)^{2n-3}}\right)^{1/n} \to \frac{1}{4},$$

ami alapján egyszerű megfontolással kapható (ld. a 13. feladatot a dolgozat végén), hogy

$$\delta([-1,1]) = \lim_{n\to\infty} \delta_n([-1,1])^{1/n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Ebből végül nagyítással adódik, hogy egy tetszőleges l hosszú szakasz transzfinit átmérője $l/4$.

5. A Csebisev-szám

P. L. Csebisev orosz matematikus az 1860-as években egy mechanikai feladat során jutott el a következő problémához: mennyire jól lehet a $[-1,1]$ intervallumon megközelíteni az x^3 függvényt legfeljebb másodfokú polinomokkal? Mindjárt teljes általánosságban megoldotta kérdést: egy tetszőleges n természetes számra mi az x^n lehető legjobb megközelítése kisebb fokszámú polinomokkal? Ha P_{n-1} tetszőleges polinom, akkor az x^n vele való közelítésének hibáját

$$\|x^n - P_{n-1}(x)\|_{[-1,1]} \tag{7}$$

méri, ahol bármely K korlátos zárt halmazra

$$\|f\|_K = \|f(x)\|_K = \max_{x\in K} |f(x)|$$

az ún. maximum normája egy f folytonos függvénynek. Csebisev problémája tehát az, hogy minimalizáljuk a (7) normát az összes P_{n-1} legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomra. Ha P_{n-1} befutja a legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomok halmazát, akkor $x^n - P_{n-1}(x)$ befutja az összes 1 főegyütthatójú n-ed fokú polinomok halmazát, így Csebisev feladata így írható: mi az $\|x^n + \cdots\|_{[-1,1]}$ minimuma ha a minimumot az összes 1 főegyütthatójú n-ed fokú polinomra vesszük? Csebisev azt igazolta, hogy ez a minimum 2^{1-n}, és az ezt elérő polinom a $\cos(\arccos x)/2^{n-1}$ ún. Csebisev polinom (ld. a 16. feladatot).

A Csebisev-problémát bármely síkbeli K halmazra megfogalmazhatjuk: mi a

$$t_n(K) = \min \|z^n + \cdots\|_K$$

értéke, ahol a minimumot az összes, 1 főegyütthatójú, n-ed fokú polinomra vesszük.

Ha $T_n(z) = z^n + \cdots$ egy extremális polinom, amelyre tehát a $\|T_n\|_K$ norma minimális – ezt K Csebisev polinomjának is nevezik –, akkor világos, hogy $T_n(z)T_m(z) = z^{n+m} + \cdots$ normája legalább $t_{n+m}(K)$. Másrészről $\|T_nT_m\|_K \le \|T_n\|_K\|T_m\|_K$, így kapjuk, hogy $t_{n+m}(K) \le t_n(K)t_m(K)$. Tehát az $a_n = \log t_n(K)$ sorozat teljesíti az $a_{n+m} \le a_n + a_m$ tulajdonságot, amiből elemien levezethető (ld. a 14. feladatot), hogy az $\{a_n/n\}$ sorozat konvergál (vagy egy valós számhoz, vagy $-\infty$-hez). Tehát $\{t_n(K)^{1/n}\}$ konvergens sorozat, és ha a határértékét $t(K)$-val jelöljük, akkor ez a $t(K)$ a K halmaz ún. Csebisev-száma:

$$t(K) = \lim_{n\to\infty} t_n(K)^{1/n}. \tag{8}$$

Mármost Fekete egy szép tétele szerint a transzfinit átmérő és a Csebisev-szám ugyanaz bármely síkbeli korlátos és zárt K halmazra:

$$t(K) = \delta(K). \tag{9}$$

Hogy ezt igazoljuk, legyenek $z_1, \ldots, z_n \in K$ Fekete-pontok egy adott n-re, amelyekre tehát a $\prod_{i\neq j}|z_i - z_j|$ szorzat maximális, értéke $\delta_n(K)$. Ha $z \in K$ egy további K-beli pont, akkor a $z, z_1, \ldots, z_n$ egy $(n+1)$ elemű rendszer K-ból, amelyre a pontok távolságának szorzata a $z_1, \ldots, z_n$ választása miatt $\delta_n(K)|z-z_1|^2\cdots|z-z_n|^2$, és ez a $\delta_{n+1}(K)$ definíciója miatt legfeljebb $\delta_{n+1}(K)$. Az adódik, hogy bármely $z \in K$-ra

$$|z - z_1|^2 \cdots |z - z_n|^2 \le \frac{\delta_{n+1}(K)}{\delta_n(K)},$$

azaz a $P_n(z) = (z - z_1)\cdots(z - z_n)$ polinom K-n vett normája legfeljebb $(\delta_{n+1}(K)/\delta_n(K))^{1/2}$. Ezért

$$t_n(K) \le \frac{\delta_{n+1}(K)^{1/2}}{\delta_n(K)^{1/2}}. \tag{10}$$

Egy fordított irányú egyenlőtlenséghez legyen $T_{n-1}(z) = z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2}\cdots + a_0$ a K $(n-1)$-ed fokú Csebisev polinomja, amelyre tehát $\|T_{n-1}\|_K$ minimális, és legyenek $z_1, \ldots, z_n$ Fekete-pontok K-ból. Az (5) Vandermonde-determinánsban, ha az i-edik oszlop a_i-szeresét hozzáadjuk az utolsó oszlophoz, akkor az utolsó oszlop elemei a $T_{n-1}(z_j)$ számok lesznek, azaz

$$\delta_n(K)^{1/2} = (5) \text{ abszolút értéke} = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & T_{n-1}(z_1) \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & T_{n-1}(z_2) \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & T_{n-1}(z_n) \end{vmatrix} \text{ abszolút értéke.}$$

Ha itt a jobb oldali determinást kifejtjük az utolsó oszlopa szerint, és figyelembe vesszük, hogy a $T_{n-1}(z_j)$ együtthatójaként fellépő aldeterminánsok abszolút értéke mind $\leq \delta_{n-1}(K)^{1/2}$ a $\delta_{n-1}(K)$ definíciója szerint, és még azt is, hogy viszont $|T_{n-1}(z_j)| \leq t_{n-1}(K)$ minden j-re, azt kapjuk, hogy

$$\delta_n(K)^{1/2} \leq n t_{n-1}(K) \delta_{n-1}(K)^{1/2}. \tag{11}$$

(10) és (11) szerint

$$t_n(K)^{1/n} \leq \frac{\delta_{n+1}(K)^{1/2n}}{\delta_n(K)^{1/2n}} \leq (n+1)^{1/n} t_n(K)^{1/n}.$$

Itt mind a bal, mind a jobb oldal $t(K)$-hoz konvergál ha n a végtelenbe tart, ezért a középső tag is oda kell, hogy tartson, azaz a $(\delta_{n+1}(K)/\delta_n(K))^{1/n}$ sorozat limesze $t(K)^2$. Ebből egyszerű analízis adja (ld. a 13. feladatot), hogy $\delta_n(K)^{1/n(n-1)} \to t(K)$, és mivel a bal oldal határértéke másrészről $\delta(K)$, a (9) formula adódik.

6. A logaritmikus kapacitás

Legyen K ismét egy korlátos zárt halmaz a síkon. Tekintsünk K-ra mint vezetőre: valamely K-ra tett egységnyi töltés szabadon mozoghat a K-n belül. Végül a töltés egyensúlyba kerül (nincs már töltésmozgás K részei között), és ezt az egyensúlyi állapotot az jellemzi, hogy ekkor a töltés eloszlása olyan, hogy a belső energiája minimális. Matematikailag ha ω az egyensúlyi töltéseloszlás, akkor ez az ω minimalizálja az

$$I(\omega) = \int\int \log \frac{1}{|z-t|} d\omega(z) d\omega(t)$$

energiát. Ha $I(K)$ a minimális energia, akkor a K logaritmikus kapacitását, $\mathrm{cap}(K)$-t, a $\mathrm{cap}(K) = e^{-I(K)}$ formula definiálja. Igazolható, hogy ez ismét megegyezik a transzfinit átmérővel, ami nem nagyon meglepő, hiszen $\log 1/\delta_n(K)$ a

$$\sum_{i \neq j} \log \frac{1}{|z_i - z_j|}$$

mennyiség minimuma $z_1, \ldots, z_n \in K$-ra, ami a fenti energia diszkrét változatának tekinthető.

Kimondhatjuk tehát az alábbi tételt:

Tétel. *Bármely síkbeli K korlátos zárt halmazra a transzfinit átmérő, a Csebisev-szám és a logaritmikus kapacitás ugyanaz:*

$$\delta(K) = t(K) = \mathrm{cap}(K).$$

7. Robin-konstans, konform-sugár

A komplex sík valamely tartományán értelmezett differenciálható (komplex értékű) függvényeket analitikusnak nevezzük. Analitikus függvény minden pontja körül a pont valamely környezetében konvergens hatványsorba fejthető. Egy ilyen f függvényt konform leképezésnek hívunk, ha ráadásul még 1–1 értelmű is (következésképpen a deriváltja sehol sem 0). A matematika egyik legszebb tétele Riemann konform leképezés-tétele: ha G_1 és G_2 két egyszeresen összefüggő, az egész síktól különböző síkbeli tartomány, akkor van egy konform megfeleltetés G_1 és G_2 között. Itt az egyszeres összefüggőség azt jelenti, hogy pl. G_1-ben nincsenek "lyukak": bármely G_1-ben haladó zárt görbe folytonosan összehúzható egy pontra mindig G-ben haladva.

Legyen most K egy egynél több pontot tartalmazó összefüggő korlátos és zárt halmaz a síkon. Ekkor K komplementere a komplex sík végtelen távoli pontjával együtt egyszeresen összefüggőnek tekinthető: bármely $\mathbf{C}\setminus K$-beli zárt görbe folytonos transzformációval kivihető a végtelenbe anélkül, hogy $\mathbf{C}\setminus K$-t elhagynánk. Mivel ugyanez igaz a D_1 egységkörlap külsejére is, a Riemann-tétel miatt van egy φ konform leképezés $\mathbf{C}\setminus K$-ról $\mathbf{C}\setminus D_1$-re. φ minden pont körül, így a végtelen távoli pont körül is hatványsorba fejthető. A végtelen távoli pont körüli hatványsora

$$\varphi(z) = \gamma z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots$$

alakú, és itt az egyenlőség fennáll a végtelen távoli pont egy környezetében, azaz valamilyen M-re fennáll minden $|z| > M$ számra. A $\gamma = \gamma(K)$ számot a K halmaz Robin-konstansának nevezik, és $R(K) = 1/\gamma(K)$ az ún. konform-sugár:

$$h(z) := \frac{1}{\gamma}\varphi(z) = z + \frac{a_0}{\gamma} + \frac{a_{-1}}{\gamma z} + \frac{a_{-2}}{\gamma z^2} + \cdots$$

olyan konform leképezés, amely $\mathbf{C}\setminus K$-t az origó körüli $R(K)$ sugarú kör külsejére képezi le, és amelyben a végtelen pont körüli sorfejtés főtagja z (ez az $R(K)$ sugár egyértelműen meghatározott).

Mármost kiderül, hogy a konform-sugár is megegyezik a transzfinit átmérővel, azaz összefüggő halmazokra fennáll, hogy

$$\delta(K) = t(K) = \operatorname{cap}(K) = R(K) = \frac{1}{\gamma(K)}.$$

Ez a formula az egyik leghatékonyabb eszköz a transzfinit átmérő kiszámolására. Pl. a $\Phi(z) = z + 1/z$ ún. Zsukovszkij leképezés leképezi az egységkör külsejét a $[-2,2]$ szakasz külsejére, ezért az inverze Φ^{-1} fogja a $\mathbf{C}\setminus[-2,2]$ halmazt leképezni az egységkör külsejére. Mivel $\Phi(z)$-ben a végtlen körül a főtag z, ugyancsak z lesz a főtag Φ^{-1}-ben. Tehát $[-2,2]$ konform sugara 1, ezért a transzfinit átmérője is 1. Ebből nagyítással kapjuk, hogy l hosszú szakasz transzfinit átmérője $l/4$.

8. Feladatok

Igazoljuk az alábbi állításokat.

1. $\delta_n(K)$ akkor és csakis akkor 0, ha K-nak n-nél kevesebb pontja van. Speciálisan adódik, hogy véges halmaz transzfinit ámérője 0. Általánosabban: ha egy halmazhoz hozzáteszünk véges sok pontot, akkor a transzfinit átmérő nem változik.

2. Ha K a 0 pontból és egy 0-hoz konvergáló sorozatból áll, akkor a transzfinit átmérője 0.

3. Ha $K_1 \subset K_2$, akkor $\delta(K_1) \le \delta(K_2)$, ill. ha egy K halmazt λ-szorosára nagyítunk vagy kicsinyítünk, akkor a transzfinit átmérője λ-szorosára változik.

4. Ha K síkbeli és $z_1, \dots, z_n$ Fekete-pontok K-ban, akkor egyik z_i sem lehet K belsejében.

5. Ha $H : K \to V$ olyan ráképezés, amely két pont távolságát soha nem növeli, akkor $\delta(V) \le \delta(K)$.

6. Ha K egy l átmérőjű összefüggő zárt halmaz, akkor $\delta(K) \ge l/4$. (Útmutatás: vetítsük K-t egy olyan szakaszra, amelynek két végpontja K-ban van, és a lehető legtávolabb vannak egymástól.)

7. Ha K egy l hosszú (sima) görbe, akkor a transzfinit átmérője legfeljebb $l/4$. (Útmutatás: használjuk az 5. feladatot egy, az ívhossz segítségével megadott leképezésre egy l hosszú szakaszra.)

8. Ha K tetszőleges kompakt halmaz és n egy adott természetes szám, akkor K csak véges sok olyan n-ed fokú algebrai számot tartalmaz, amelynek minden algebrai konjugáltja is K-ban van. (Útmutatás: használjuk fel a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket).

9. Ha M tetszőleges adott szám, akkor van olyan 0 transzfinit átmérőjű K halmaz, hogy K tartalmaz legalább M db. olyan algebrai egész számot, amelyek minden konjugáltja is K-ban van. (Útmutatás: álljon K az $N!$-adik egységgyökökből valamilyen nagy N-re.)

10. Mutassunk olyan 1 transzfinit átmérőjű zárt K halmazt, amelyik végtelen sok olyan algebrai egészet tartalmaz, amelyeknek minden algebrai konjugáltja is a halmazban van. (Útmutatás: tekintsük az egységgyököket az egységkörön.)

11. Egy 0 transzfinit átmérőjű halmaz tartalmazhat végtelen sok olyan algebrai számot, amelyek minden konjugáltja is K-ban van (ekkor tehát nincs a nevezőre feltevés mint Fekete tételében.)

12. Ha K az egységkör vagy az egységkörlap, akkor $t_n(K) = 1$ minden K-ra.

13. Ha egy pozitív tagú $\{a_n\}$ sorozatra igaz, hogy $(a_n/a_{n-1})^{1/n} \to L$, akkor $a_n^{2/n(n-1)} \to L$, amint $n \to \infty$.

14. Ha egy $\{a_n\}$ sorozatra $a_{n+m} \le a_n + a_m$ igaz, akkor $\{a_n/n\}$ konvergál, és a határértéke az a_n/n számok infimuma.

15. Ha $P_n(z) = z^n + \cdots$ egy 1 főegyütthatójú n-ed fokú polinom, akkor $\|P_n\|_K \ge \delta(K)^n$.

16. a. $\cos(\arccos x)$ ($x \in [-1, 1]$) egy n-ed fokú polinom, amelynek főegyütthatója 2^{n-1} (Útmutatás: használjuk a $2\cos(nu)\cos u = \cos(n+1)u + \cos(n-1)u$ azonosságot, és alkalmazzunk indukciót.)

b. $\cos(\arccos x)/2^{n-1}$ a $[-1,1]$ intervallumon $(n+1)$-szer veszi fel a $\pm 1/2^{n-1}$ értékeket váltakozó előjellel.

c. $t_n([-1,1]) = 1/2^{n-1}$. (Útmutatás: ha lenne olyan $P_n(x) = x^n + \cdots$ polinom, amelynek normája $1/2^{n-1}$-nél kisebb, akkor a b. rész szerint a $\cos(\arccos x)/2^{n-1} - P_n(x)$ különbségnek legalább n zérushelye lenne, ami lehetetlen, hiszen ez legfeljebb $n-1$-ed fokú nem azonosan 0 polinom.)

Hivatkozások

[1] D. H. Armitage and S. J. Gardiner, *Classical Potential Theory*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.

[2] M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Mathematische Zeitschrift*, **17**(1923), 228–249.

[3] M. Fekete and and G. Szegő, On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set, *Math. Z.*, **63**(1955), 158–172.

[4] M. Pap and F. Schipp, Equilibrium conditions for the Malmquist-Takenaka systems, *Acta Sci. Math.* (Szeged), megjelenés alatt.

[5] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[6] R. M. Robinson, Conjugate algebraic integers in real point sets, *Math. Z.*, **84**(1964), 415–427.

[7] I. Schur, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Mathematische Zeitschrift*, **1**(1918), 377–402.

[8] T. J. Stieltjes, Sur quelques théorémes d´algébre, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **100**(1885), 439–440.

[9] M. Tsuji, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo, 1959.

Totik Vilmos
MTA-SZTE Analízis és Sztochasztika Kutatócsoport
Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem
Szeged, Aradi v. tere 1, 6720
totik@mail.u-szeged.hu