

Az oktató és kutató Rédei professzor

SZENDREI JÁNOS

Rédei professzor matematikai kutatásait gimnáziumi tanárként kezdte a másodfokú valós és komplex számtest osztályszámának, osztálycsoportjának, gyűrű-osztálycsoportjának a vizsgálatával. Számelméleti vizsgálatain belül is több dolgot foglalkozik a Pell-féle egyenletek és az $rx^2 + sy^2 = z^{2n}$ diofantoszi egyenlet problémáival. Az euklideszi algoritmus kiterjesztése és felhasználása a másodfokú számtestekben is témája lett néhány dolgozatának. 1940-től már mint egyetemi tanár az előadásainak egy-egy témájából ragadott ki olyan problémákat, amelyeknek megoldása új eredményekhez vezetett.

Egyetemi előadásait gondosan építette fel, pontos megfogalmazásra törekedett. Hallgatósága éppen ezért tökéletesen jegyzetelhette előadásait. Kutatási részeredményeiről is gyakran beszámolt munkatársainak, azok pedig nyugodtan fordulhattak algebrai problémáikkal hozzá. Dolgozatait újra meg újra átírta, hogy azok teljesen korrektek legyenek, s még felesleges szavak se maradjanak bennük. E tekintetben aprólékos gondnal és kitartó szívóssággal fogalmazta és írta tanulmányait és könyveit.

Az alábbiakban néhány olyan tudományos eredményét ismertetjük, amelyek oktatási tevékenysége nyomán jöttek létre, ezek bizonyításait azonban – egy kivételével – itt nincs lehetőségünk bemutatni, pedig Rédei ötletei ezekben találhatók. E példák is azt igazolják, hogy részére az oktatás, illetve annak során folytatott kutatási tevékenysége milyen szorosan összefüggött.

Könyvei közül az első kettőnek a gyökerei az algebra, illetve a geometria alapjai című előadásaiiban találhatók meg, a harmadik pedig szemináriumi témájának volt az anyaga.

Végül a jelen ismertetésben egy olyan írását elevenítjük fel, amelyet gimnáziumi tanári időszakában publikált, de gondolatai ma is aktuálisak.

A középiskolai oktatás felé fordult a figyelme 1964-ben is. A tankönyvírás is foglalkoztatta, amiből néhány fejezet kéziratban elkészült. A „Hozzászólás a középiskolai matematikai oktatás és tankönyvek kérdéseihez” c. írása a Polygon jelen kötetében jelenik meg [9].

I. A négyzetes reciprocitás tétele

Bevezető számelméleti előadásainak állandó témája volt a négyzetes reciprocitás tétele, amelynek bizonyítására Gauss is többféle megoldást adott. Rédei ezeket a bizonyításokat újra és újra csiszolta, finomította, s ezeket három dolgozatában közölte ([1], [2], [6]). Bizonyításait a szemléletességre és matematikai eleganciára törekvés jellemzi.

II. Véges testek fölötti harmad-, negyedfokú egyenletek

Minden klasszikus algebrai előadásnak témája a magasabb fokú egyenletek vizsgálata. Egy K test fölötti $f(x) = 0$ egyenletnél felvethető az a kérdés, hogy az egyenletnek hány gyöke van magában a K -ban. A komplex számok esetében egy algebrai egyenletnek minden gyöke komplex szám. A valós számoknál már nem ilyen egyszerű a válasz. A másodfokú valós együtthatós egyenletnek is lehet két valós gyöke, vagy egy sem, harmadfokúaknak pedig vagy egy, vagy három valós gyöke van. A komplex gyökök ugyanis mindig párosával fordulnak elő, mert egy valós egyenletnek, ha egy komplex szám gyöke, akkor annak konjugáltja is gyöke.

Véges testek fölött még változatosabb válasz nyerhető. Ismert, hogy egy Kőnig és Rados nevéhez fűződő tétel megadja erre a választ az egyenlethez tartozó bizonyos mátrix rangja által.

Véges testek fölötti harmad- és negyedfokú egyenletekkel Rédei több dolgozatában is foglalkozik ([3], [4]), és a felvetett probléma megoldására egyszerűbb eljárást, megoldást dolgozott ki. Eredményei a következők:

Legyen a $K = GF(p^k)$ ($p > 3$) test fölötti

$$(*) \quad x^3 + ax + b = 0 \quad (a, b \neq 0)$$

többszörös gyök nélküli egyenlet diszkriminánsa $D = -4a^3 - 27b^2$ ($\neq 0$), továbbá n a $6^{-1}p^k$ -hoz legközelebb eső egész szám, és

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{2i+1} x^i.$$

Jelölje m a $(*)$ egyenlet gyökeinek a számát K -ban. Érvényes a következő állítás:

$$\begin{aligned} m = 1 &\Leftrightarrow \neg \exists c (c \in K \wedge c^2 = D), \\ m = 3 &\Leftrightarrow \exists c (c \in K \wedge c^2 = D) \wedge g(-27b^2D^{-1}) = 0, \\ m = 0 &\text{ egyébként.} \end{aligned}$$

Ugyanezen K test fölötti

$$(**) \quad x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (b \neq 0)$$

többszörös gyök nélküli negyedfokú egyenletnek legyen

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 - 4c)y - b^2 = 0$$

a kubikus rezolvense, továbbá n ennek a K -ban levő gyökeinek száma, n' ezek közül a K -beli négyzetelemeknek a száma. Ha m jelöli a $(**)$ egyenlet gyökeinek a számát K -ban, akkor a következő állítás igaz:

$$m = 1 \Leftrightarrow n = 0,$$

$$m = 2 \Leftrightarrow n = n' = 1,$$

$$m = 4 \Leftrightarrow n' = 3.$$

III. Az alternáló csoport egyszerű

Ismert, hogy az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes permutációi csoportot alkotnak, amit P_n jelöl. Ennek a páros permutációkból álló részcsoportja A_n , amit alternáló csoportnak hívnak. Minden permutáció transzpozíciók, azaz (ab) alakú ciklikus permutációk szorzatára bontható. Egy permutáció pontosan akkor páros, ha transzpozíciók szorzatára bontásnál a tényezők száma páros. Két transzpozíció szorzatát transzpozíciópárosnak fogjuk nevezni. Az A_n alternáló csoport elemei tehát az összes transzpozíciópárosokból álló szorzatok. (Természetesen megengedve a 0 és az egy transzpozíciópárosból álló szorzatot is.) Az is könnyen látható, hogy bármely transzpozíciópáros felírható három hosszúságú ciklusokból, hiszen

$$(ab)(ac) = (acb), \quad (ab)(cd) = (ab)(ac)(ac)(cd) = (acb)(acd).$$

Fordítva is igaz, bármely három hosszúságú ciklus felírható transzpozíciópárosként:

$$(abc) = (ac)(ab).$$

Ez tehát azt jelenti, hogy az A_n alternáló csoport elemei felírhatók három hosszúságú ciklusok szorzataként is.

A permutációcsoportoknak jelentős szerepe van a geometriai transzfomációcsoportokon kívül — a Galois-elmélet alapján — a magasabb fokú egyenleteknek gyökjelekkel történő megoldhatóságának problémájában. Az a tény, hogy a komplex együtthatós általános n -edfokú algebrai egyenleteknek ($n \geq 5$) esetében nincs gyökképlete, azon múlik, hogy az A_n ($n \geq 5$) alternáló csoport egyszerű, ami azt jelenti, hogy nincs valódi normális részcsoportja, azaz nincs olyan N valódi részcsoportja, amelyre minden $\alpha \in A_n$, és $\nu \in N$ elemre $\alpha\nu\alpha^{-1} \in N$ teljesül.

Rédeinek erre adott szellemes bizonyítása a következő [7]:

Legyen N az A_n -nek az egységelemtől különböző normális részcsoportja. Bizonyítandó, hogy $N = A_n$, azaz N tartalmazza az összes transzpozíciópárost.

1) Először azt bizonyítjuk, hogy N -ben van $(ab)(cd)$ alakú ún. idegen transzpozíciópáros, ahol a, b, c, d különböző. Legyen $\nu \in N$, amelynek páronként idegen ciklusokra való bontása hosszúságuk alapján ilyen alakú lehet:

$$\nu : (ab)(cd) \dots, (abc), (abc)(de \dots) \dots, (abcd \dots) \dots$$

Ezeknek megfelelően A_n -ből válasszuk a következő elemeket (s ez a bizonyítás alapötlete):

$$\alpha : (abc), (abd), (abd), (abc).$$

Képezzük ezekből az alábbi szorzatokat:

$$\nu\alpha\nu^{-1} : (bad), (bcd), (bce), (bcd),$$

$$\alpha^{-1} : (bac), (bad), (bad), (bac),$$

$$\nu(\alpha\nu^{-1}\alpha^{-1}) : (ac)(bd), (ab)(cd), (adceb), (adb) (\in N).$$

Az első két esetben tehát igaz az állítás, a harmadik esetet visszavezettük a negyedikre, ezt pedig a másodikra. Ezzel állításunkat igazoltuk.

2) Most azt látjuk be, hogy N tartalmazza az összes $(ab)(cd)$ idegen transzpozíciópárost. Feltehető, hogy $(1\ 2)(3\ 4) \in N$. Bármely $\alpha \in P_n$ permutáció esetén vagy $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ a & b & c & d & \dots \end{pmatrix} \in A_n$, vagy $\alpha' = \alpha(1\ 2) \in A_n$, ennél fogva

$$\alpha(1\ 2)(3\ 4)\alpha^{-1} = \alpha'(1\ 2)(3\ 4)\alpha'^{-1} = \alpha(1\ 2)(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2)\alpha^{-1} = (ab)(cd) \in N.$$

3) $n \geq 5$ miatt van két olyan $x, y (= 1, 2, \dots, n)$ elem, amelyek egymástól és a, b, c -től is különböznek, s így 2) alapján

$$(ac)(ab) = ((ac)(xy))((xy)(ab)) \in N$$

is teljesül, azaz N tartalmazza az összes transzpozíciópárost, ami azt jelenti, hogy $N = A_n$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $A_n (\geq 5)$ egyszerű csoport.

IV. A Heron-képlet általánosítása

Az i.e. 2.-1. században élt Heron alexandriai matematikustól származik az a, b, c oldalú háromszög területére vonatkozó képlet:

$$16T^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Síkbeli négyszögekre Staudt dolgozott ki hasonló formulát. Jelölje a, b, c, d a síkbeli négyszög oldalait, ahol a, b , ill. c, d a szemközti oldalak, és e, f a négyszög átlóit, akkor a T területre érvényes:

$$16T^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2.$$

E klasszikus tételeket általánosította Rédei tetszőleges síkbeli sokszögekre a következő módon [5]:

Ha T jelöli a síkbeli m oldalú sokszög területét, amelynek csúcspontjai $A_1, \dots, A_m$ és T' az n oldalú sokszög területét, amelynek csúcspontjai $B_1, \dots, B_n$, továbbá r_{ik} a A_i, B_k csúcspontok távolságát, akkor

$$16TT' = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} r_{ik}^2 & r_{i,k+1}^2 \\ r_{i+1,k}^2 & r_{i+1,k+1}^2 \end{vmatrix}.$$

Ebből következik, hogy az $A_1, \dots, A_m$ csúcspontú sokszög T területére teljesül a következő állítás:

$$16T^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \begin{vmatrix} s_{ik}^2 & s_{i,k+1}^2 \\ s_{i+1,k}^2 & s_{i+1,k+1}^2 \end{vmatrix},$$

ahol s_{ik} jelöli az A_i, A_k csúcspontok távolságát.

Ugyanebben a dolgozatban Szőkefalvi-Nagy Béla síkbeli „végtelen sok oldalú sokszögekre”, azaz két zárt görbe területére is kiterjesztette a Rédei-féle eredményt.

V. A háromszög nevezetes pontjai

Az iskolai oktatásban is évszázadok óta szerepel a téma: a háromszög nevezetes pontjai és vonalai. Szinte mindenki számára ismert a magasságvonalak, a súlyvonalak, a szögfelezők metszéspontja. Rédei professzort megelőzően senki sem tette fel matematikushoz illő módon: Miket nevezünk a háromszög nevezetes pontjainak? A probléma megoldását az Algebra I. német nyelvű 1959. évi kiadásában [K1a)] a Galois-elméletéről szóló fejezetben adta, ahol a következőket írja:

„Seit Anfang des vorigen Jahrhunderts wurden nach und nach etwa zwanzig weiterer merkwürdiger Punkte entdeckt und viele ihrer Eigenschaften weitläufig untersucht, jedoch wurde eine systematische Theorie der merkwürdigen Punkte, wohl wegen gewisser eigenartiger Schwierigkeiten, bisher nicht begründet, nicht einmal eine allgemeine Definition wurde für sie aufgestellt. Das soll hier in möglicher Kürze geschehen.”

Ez a „rövid”, nagyon tömör leírás is 14 oldalnyi terjedelmű. A nevezetes pont definícióját 12 axióma segítségével adja meg, amelyekben szereplő fogalmak külön-külön is alapos ismereteket tételeznek fel. A háromszög nevezetes pontjának definíciója alapján analitikus eszközökkel határozza meg azokat derékszögű, majd baricentrikus koordinátarendszer felhasználásával, és az algebrai eszközök szinte zsonglőri alkalmazásával.

Feladatul tűzi ki a háromszög nevezetes vonalainak és köreinek hasonló kidolgozását.

VI. Az iskolai matematikatanítás néhány tipikus problémája

1933-ban megjelent írásának [8] már a bevezetése is egyéniségének jellegzetes tükröződése:

„Néhány észrevételt kívánok tenni a mennyiségtan középiskolai oktatását illetően. Előbb azonban kérem tisztelt tanártársaimat, ne méltóztassanak soraimat feltolakodásnak venni; magam csak úgy tekintem, mint szaktársaimmal való beszélgetést. Még azzal is vétenék, ha különös gondot akarnék fordítani a következők tőlem telhető helyes összeállítására; ki-ki besorolja gondolataimat saját eszmevilágába, vagy elveti azokat.”

Az általa tárgyalt problémakörök közül csak azokat emeljük ki, amelyek ma is aktuálisak, mivel akkor olyan témakörök, például a komplex számok is tananyag-

ként szerepeltek, amelyek ma már csak speciális osztályok tantervében fordulhatnak elő.

Ma is szinte napi gond a zárójelek használata. Cikke megírásának időpontjában többéves tanári tapasztalattal s tudományos eredményekkel a háta mögött a következőket írja:

„Nehéz lenne egy kifogástalan, egyszerű utasítást adni arra, hogy (tényleg) mely esetekben teendők zárjelek, ellenben könnyen felismerhető, hogy egy zárjel mikor felesleges (tehát törölhető).”

Javaslatok inkább az, hogy példák sokaságán kell bemutatni a tanulóknak, hogy a zárójelek hol hagyhatók el, illetve hol nem.

Másik mindennapi probléma a negatív számok és az azokkal végzett műveletek, s különösen a szorzás (osztás) tanítása. Elmarasztalja a „vagyon – adósság” „fagypont alatti – fagypont fölötti hőmérséklet”, stb. felhasználását a negatív számok szorzásának indoklására. Rédei ezzel kapcsolatban véleményét így összegzi:

„A mennyiségtan, mint a való világ jelenségeinek leírására készített tudomány, szükségképpen fejlődött azzá, ami, szükségképpen jött létre s fejlődött a számfogalom, de a fejlődés egyes lépéseihez a zseni intuíciója kellett; nos ne akarjuk mindenkor és mindenáron az átlagtanulóval a miniatűr-zseni szerepét eljátszatni. Végre mindazt, amit a zseni kitalált, a tiszta ész feldolgozta úgy, hogy az értelem számára legkönnyebben felfogható legyen és ez a legkönnyebb felfogás nem mindig azon az úton történhetik, amely a felfedezés útja volt. És tényleg, ne áltassuk magunkat: ne akarjuk zseniális lépésre kényszeríteni a tanulót a negatív számoknak és a velük végzendő műveletek mikéntjének kitalálásával szemben, ugyanazt a tanulót, aki — sajna, előre tudjuk — még évek múlva is bizonyos nemtörődomséggel fogja kezelni a számok előjelét. Épp ezért, az intuíciót máshol igyekezzünk fejleszteni (van rá elég alkalmasabb terület) — itt inkább arra törekedjünk, hogy minél élesebbé tegyük a negatív szám fogalmát s világossá a rájuk vonatkozó műveleti szabályokat, így inkább remélve elejét venni a jövő tévedéseinek. Röviden kifejezve: egyenesen és ne tekervényes utakon!

Én így gondolom a munkát elvégezni: Órákkal előbb figyelmeztetem a tanulót, hogy a számok tisztán az emberi agy fogalomalkotásának tárgyai, melyek a körülöttünk levő világban nem léteznek. ... Mikor azután a negatív számokat akarom bevezetni, ezzel kezdem: Ma új számokat fogunk csinálni. Ezeket úgy jelöljük, hogy egy régi szám elé egy vonást írunk. ... Az összes új számot negatív számoknak nevezzük (a régieket élesebb megkülönböztetés kedvéért pozitíveknek — kivéve a zérust). Ezután elmondom, hogy a pozitív és a negatív számokra (és a zérusra) az egész emberiség a következő műveleti szabályokban állapodott meg: ... (itt tényleg elsorolom a lehető legáttekinthetőbb összeállításban az összeadás és szorzás műveleti szabályait (a kivonás és osztás, mint inverz műveletek, későbbre hagyhatók)). Végül megmutatom a negatív szám hasznát, kapcsolatban a való világgal (most jöhetnek a vagyon – adósság stb. példái), továbbá figyelmeztetek arra a nagy előnyre, hogy most már a négy alapművelet korlátlanul elvégezhető (leszámítva a zérussal való osztást.)”

Irodalom

- [1] Ein neuer Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **2** (1925), 134–138.
- [2] Kurze Darstellung des fünften Gauss'schen Beweises für den quadratischen Reziprozitätssatz, *Comment. Math. Helv.* **16** (1943–44), 264–265.
- [3] Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern, *Acta. Sci. Math. (Szeged)* **11** (1946), 96–105.
- [4] Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern“, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **11** (1947), 184–190.
- [5] Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron (Szókefalvi-Nagy Bélával), *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 42–50.
- [6] Einfacher Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes, *Math. Z.* **54** (1951), 25–26.
- [7] Die Einfachheit der alternierenden Gruppe, *Monatsh. Math.* **55** (1951), 328–329.
- [8] A mennyiségtan középiskolai oktatásáról, *Protestáns Tanügyi Szemle* **7** (1933), 10–16.
- [9] Hozzászólás a középiskolai matematikai oktatás és tankönyvek kérdéséhez, *Polygon* **X/2.** (2000), 11–16.

Rédei László könyveinek jegyzéke

- [K1] *Algebra, I* (magyarul), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
 - a) *Algebra, I* (németül), Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig, Leipzig, 1959.
 - b) *Algebra, I* (angolul), Akadémiai Kiadó, Budapest – Pergamon Press, Oxford, 1967.
- [K2] *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen*, Akadémiai Kiadó, Budapest – Physica Verlag, Würzburg – Teubner Verlag, Leipzig, 1963.
 - a) *The theory of finitely generated commutative semigroups*, Akadémiai Kiadó, Budapest – Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [K3] *Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach F. Klein*, Akadémiai Kiadó, Budapest – Teubner Verlag, Leipzig, 1965.
 - a) *Foundation of the Euclidean and non-Euclidean geometries according to F. Klein*, Akadémiai Kiadó, Budapest – Pergamon Press, Oxford, 1968.
- [K4] *Lückenhafte Polynome über endlichen Körpern*, Akadémiai Kiadó, Budapest – Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin – Birkhäuser Verlag, Basel, 1970.
 - a) *Lacunary polynomials over finite fields*, Akadémiai Kiadó, Budapest – North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [K5] *Endliche p -Gruppen, I*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.

