POLYGON
XXVII. kötet, 2024.

A kétoldali közelítés, leszámlálás módszere

Máder Attila, Szalai Máté

1. Bevezetés

Az emelt szintű matematika érettségi szóbeli részének egyik témaköre rendszeresen a *Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában* címet viseli. Nem csak a diákok, de esetenként még a felkészítő, illetve vizsgáztató tanárok számára is gondot jelent, hogy a törzsanyag követelményeit tekintve pontosan mely módszerek is tekinthetők ide tartozónak, illetve, hogy a feleletre szánt rövid időbe mely módszerek kerüljenek bele, azokat mely tételeken keresztül mutassa be a vizsgázó, hogy az rövid, érthető legyen, de azért ne triviális. A legtöbb segédlet a következőket említi: direkt bizonyítás, indirekt bizonyítás, teljes indukció, skatulyaelv.

Sehol, vagy csak nagyon ritkán szerepel a kétoldali összeszámlálás módszere. Ennek ellenére ezt a módszert, illetve általában a kétoldali (meg)közelítést a matematika számos területén használhatjuk a formális bizonyítások kikerülésére, egyszerűsítésére, valamint „szép”, a lényeget kiemelő, szemléletes bizonyításokhoz. A módszert először Arkhimédész (i.e. 287 - i.e. 212) alkalmazta. A nézőpontváltás kifejezetten nehéz a matematikában is.

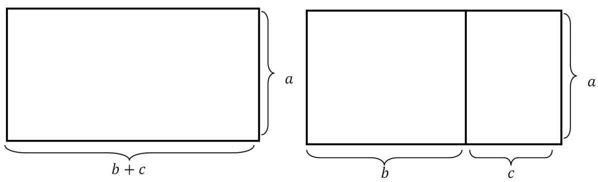
A többféle szemlélet, ugyanannak a dolognak a több szempontból, irányból, módszerrel történő megközelítése azonban lehetővé teszi a mögé látást, a valódi okok feltárását, a tényleges matematikai tartalomhoz való hozzáférést (1. ábra).

1. ábra. Béka, vagy ló? - Béka is, ló is

2. Algebra

2.1. Műveleti tulajdonságok

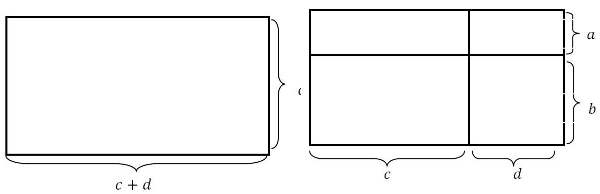
Általános iskolában kerülnek elő először absztrakt formájukban az algebrai kifejezések. A tanulók absztrakciós készsége ebben a korban még nem minden esetben van olyan szinten, hogy az $(b+c)a = ba + ca$ típusú azonosságokat (műveleti tulajdonságokat) a maguk absztrakt formájában el tudják sajátítani. A sokszor kizárólag absztrakt formában elsajátíttatni kívánt azonosságok tanulási nehézségei, illetve gyakran kudarca után nem csoda, hogy sokaknál később is gondot okoz a hasonló kifejezések kezelése. Segítségül hívva azonban egy egyszerű geometriai modellt - a téglalap (eddigre már) ismert területszámítási módját - a megértést segíthetjük egy ábrával, például a következő módon (2. ábra).



2. ábra. $(b+c)a = ba + ca$

A bal oldali ábrán egy téglalap látható, mely oldalainak hossza $b + c$ illetve a, így területe $(b + c)a$. Vágjuk fel téglalapunkat a jobb oldali ábrán látható módon két téglalapra. Így két téglalapot kaptunk, melynek oldalai b és a illetve c és a. Természetesen a két rész területének összege megegyezik az eredeti téglalap területével, vagyis: $(b + c)a = ba + ca$.

Megjegyzés. A két tag összegének két tag összegével vett szorzatában a *„minden tagot minden taggal”* formalizmusa is könnyen érthetővé, s a későbbiekben könnyebben előhívhatóvá tehető a fentiekhez hasonló vizuális reprezentáció segítségével. Most is, egy apró trükk segítségével egy megfelelő téglalapot fogunk az oldalaival párhuzamos vágásokkal feldarabolni, s a területét a darabolás előtti, illetve utáni állapotban felírni. Tekintsük ehhez a következő ábrát (3. ábra).



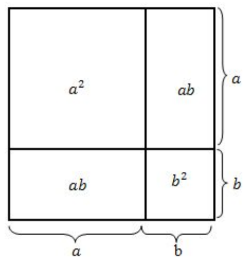
3. ábra. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

2.2. Nevezetes azonosságok

A kilencedik osztályos tananyag egyik jelentős része a nevezetes szorzatokkal, a szorzattá alakítás különböző módszereivel, az algebrai törtekkel való műveletekkel foglalkozik.

Ezen ismeretek eszközszintű birtoklása elengedhetetlen feltétele a továbbhaladásnak, viszont tanulásuk nehéz. Ennek egyik oka, hogy tanításuk, az alkalmazásokat is beleértve, formális.

A fenti, általános iskolában használható ábrák apró módosításával (pl. ha a 3. ábra megfelelő két téglalapja négyzet) középiskolában is jól használható segítséget kaphatunk (4. ábra).



4. ábra. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

A négyzet területének kétféle módon történő felírásával ugyanis: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ adódik.

2.2.1. Feladat. Igazoljuk, szemléltessük, hogy

(a) $a(b-c) = ab - ac$,

(b) $(a-b)(c+d) = ac + ad - bc - bd$,

(c) $(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$,

(d) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(e) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2.3. Nevezetes összegek - $\mathbf{1+2+3+\ldots+n}$

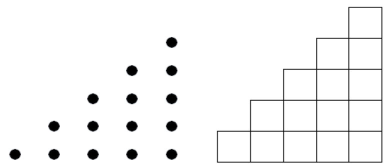
Az első n pozitív egész szám összegének zárt alakjára vonatkozó, a szájhagyomány alapján Gausstól származó szép bizonyítást sokan ismerik. Az így kapott összefüggést:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

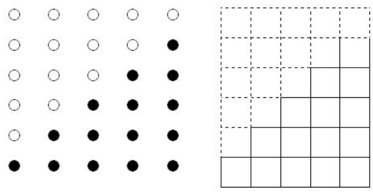
tanulmányozva, a bizonyítás ellenére is gyakran merülhet fel diákjainkban a *miért*, egész pontosan a *miért éppen ez* kérdése. A kérdés megválaszolható, s ezáltal az összefüggés lényege, a formula mögötti valódi matematika(i tartalom) megvilágítható egy alkalmasan választott (össze)számlálás kétféle módon történő végrehajtásával. Mindez persze segíthető, segítendő egy-egy jó ábrával. Az első n pozitív egész összege természetes módon szemléltethető a következő módon. Helyezzünk el kavicsokat (egységnyi területű négyzeteket) az 5. ábrán látható módon.

Amit kaptunk, az egy $n \times (n+1)$-es téglalap fele (6. ábra).

A fenti elrendezés kavicsainak száma (síkidom területe) kétféle módon is meghatározható. A kavicsokat (négyzetek területét) oszloponként összegezve a kavicsok száma (a terület): $1 + 2 + \ldots + n$. A kavicsokat (négyzetek területeit) egyszerre, a fél téglalap



5. ábra. $1 + 2 + 3 + \ldots$



6. ábra. Az $n \times (n+1)$-es téglalap és a fele

segítségével összeszámolva $\frac{n(n+1)}{2}$ számú kavicsot (nagyságú területet) kapunk. Így a kavicsok számának (a síkidom területének) kétféle módon történő összeszámlálásából kapjuk:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Megjegyzés. (A felfedeztetés fontosságáról) Az egyes kérdések megközelítése alapvetően kétféle úton történhet. Az egyik a hagyományos, „zárt” út a *Bizonyítsuk be, hogy...* típusú problémakitűzéssel. Ez azonban valójában nem problémakitűzés. A többletismerettel rendelkező felsőbbrendűségével ily módon megfogalmazott feladatok nehezek. Nehezek, mert idegenek a diákok számára, így értetlenül állnak előtte, s legfeljebb annyi várható el tőlük, hogy teljes indukcióval, vagy valamely más, akkortájt tanult, tehát reflexszerűen előugró módszerrel megpróbálják formálisan tárgyalni a kérdést. Ez azonban nem ad választ teljesen természetes módon felmerülő és jogos, de ugyanakkor megválaszolatlan (és jelen megközelítésben megválaszolhatatlan) *„Miért?”* típusú kérdésekre. Így jelen helyzetben nem is beszélhetünk (matematikai) problémamegoldásról, csak kizárólag formális tevékenységről. Ezekre a kérdésekre a legtöbb formális bizonyítási eljárás nem ad választ, s a további kérdésfelvetés sem segíti. Minden esetben célunk kellene, hogy legyen az új ismeret felfedeztetése. Ha a diák (irányított kísérletek sorozatával) maga jön rá az adott összefüggésre számos sikeres - és persze ezt megelőzendő számos értékes tapasztalattal szolgáló sikertelen - próbálkozás után, magáénak érzi azt, hiszen ő maga találta. A (kísérleti) fizikus, a kémikus folyamatosan kísérletezik, s a kísérleteiből származó tapasztalataiból alkotja meg új ismereteit. S kísérletezik a maga módján a matematikus is. Tanításunkban ennek sajnos vajmi kevés nyoma van. A zárt végű feladatok korlátozó, az önálló gondolatokat kizáró merev keretei helyett engedjünk hát teret a nyitott kérdések szabadságának.

2.3.1. Feladat. (a) Az $1, 1+2, 1+2+3, \ldots$ sorozat tagjait háromszögszámoknak is szokták nevezni. Miért?

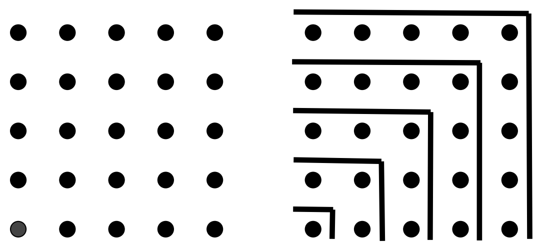
(b) Azt tudjuk, hogy az egymást követő háromszögszámok különbsége rendre $2, 3, \ldots$. De mit mondhatunk két szomszédos háromszögszám összegéről?

2.4. Nevezetes összegek - $\mathbf{1+3+5+\ldots+2n-1}$

Az, hogy az első n pozitív páratlan szám összege éppen n^2, különösen meglepő. A bizonyítás persze történhet a sokrétűen használható módszer, a teljes indukció alkalmazásával, de egy „szép" összefüggésre biztosan létezik a „Nagy Könyv"[1]-be illő bizonyítás is. Talán ilyen a következő. Új módszer keresése nem csak az üres formalizmus mellőzése miatt szükséges, hanem azért mert a teljes indukciós bizonyítás ebben az esetben sem ad választ a *miért*-re, pedig egy jó bizonyítástól ezt mindenképp elvárhatjuk.

Helyezzünk el n^2 számú kavicsot $n \times n$-es négyzet alakban (7. ábra). Osszuk fel négyzetünket, az ábrán látható módon. A kavicsok számának két úton történő meghatározásából:

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$



7. ábra. Az n^2 számú kavics és felosztásuk

2.4.1. Feladat. A fentiekhez hasonló módszerek segítségével keressünk zárt alakot az alábbi összegekre

(a) $2 + 4 + \ldots + 2n$,

(b) $1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 + n + n - 1 + n - 2 + \ldots + 2 + 1$,

(c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$,

(d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$,

(e) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2$, ahol f_n az n-edik Fibonacci-számot jelöli, azaz: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n > 2$.

2.4.2. Feladat. Igazoljuk, szemléltessük, hogy

(a) $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$,

[1]Erdős Pál szerint, kell léteznie egy „Nagy Könyv"-nek, minden tétel legszebb bizonyításával.

(b) $1+2+\ldots+n+n-1+n-2+\ldots+2+1=n^2$,

(c) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(d) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

(e) $f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2=f_nf_{n+1}$, ahol f_n az n-edik Fibonacci-számot jelöli.

2.4.3. Feladat. Vizsgáljuk a következő egyenlőségeket!

$$\begin{aligned} 1+3+1&=1^2+2^2,\\ 1+3+5+3+1&=2^2+3^2,\\ 1+3+5+7+5+3+1&=3^2+4^2. \end{aligned}$$

A fentiek segítségével keressük meg a szomszédos négyzetszámok összegének egy lehetséges előállítását.

2.4.4. Feladat. Fogalmazzunk meg észrevételeket az

$$\begin{aligned} 1&=1^3\\ 2+4+2&=2^3\\ 3+6+9+6+3&=3^3\\ 4+8+12+16+12+8+4&=4^3 \end{aligned}$$

egyenletek kapcsán és lássuk is be azokat.

2.5. Szöveges feladatok

Az úgynevezett „szöveges feladatok” megoldása évek óta egyre problémásabb területe a matematika tanításának, kimutathatóan rosszabbul sikerülnek pl. az ilyen formában kitűzött érettségi feladatok is. Egyre komolyabb gondot okoz már maga a szövegértés is, majd a modell felállítása, az eredmény értelmezése. (A modell formális használata, tehát az egyenlet, egyenletrendszer stb. megoldása kevéssé.) Pedig az ilyen típusú feladatok megoldásának, illetve a szöveghez tartozó egyenlet, egyenletrendszer, stb. felírásának, általában véve a modell megalkotásának egyik leghatékonyabb módja egyszerű: ugyanazt a mennyiséget két különböző módon is felírjuk az ismert adatok, illetve az alkalmas módon bevezetett ismeretlen(ek) segítségével. Az alábbiakban erre mutatunk egy példát.

2.5.1. Feladat. 1,3 kg sóoldathoz 8 kg 15%-os sóoldatot öntünk, s így 10%-os sóoldat jön létre. Hány %-os volt az eredeti oldat?

Megoldás. A modell megalkotását segíthetjük egy egyszerű táblázat kitöltésével, például a következő módon.

	tömeg (kg)	töménység (%)	oldott anyag mennyisége (kg)
1. oldat	1,3	x	$\frac{1{,}3\cdot x}{100}$
2. oldat	0,8	15	$\frac{0{,}8\cdot 15}{100}$
keverék	2,1	10	

A táblázatban üresen álló cellához tartozó érték, azaz a keverék oldott anyag tartalmát kétféleképp is fel tudjuk írni. Egyrészt, 2,1 kg 10%-os oldatról van szó, melynek (kg-ban mért) oldott anyag tartalma $\frac{2{,}1\cdot 10}{100}$, másrészt a keverék oldott anyag tartalma megegyezik az egyes összetevők oldott anyag tartalmának összegével, s így $\frac{1{,}3\cdot x}{100} + \frac{0{,}8\cdot 15}{100}$. Mivel ugyanazt a mennyiséget írtuk fel kétféleképp, kapjuk:

$$\frac{2{,}1 \cdot 10}{100} = \frac{1{,}3 \cdot x}{100} + \frac{0{,}8 \cdot 15}{100}.$$

Az egyenlet megoldása ($x = 7$) adja az első összetevő (százalékos) töménységét.

2.6. A valós kitevős hatvány fogalma

Általános iskolában bevezetjük a pozitív egész kitevős hatvány fogalmát. Erre épülően kilencedik osztályban a permanencia-elv segítségével definiáljuk a nulla, és a negatív egész kitevős hatvány fogalmát. Tizedik, tizenegyedik osztályban az n-edik gyök fogalmának felhasználásával alkotjuk meg a racionális kitevőjű hatvány fogalmat. Az exponenciális függvény bevezetése kapcsán pedig szükségünk van a valós kitevős hatvány fogalmára is. Ezt az akkor rendelkezésre álló absztrakciós szint, előismeretek, eszközök segítségével éppen a kétoldali közelítés segítségével tehetjük meg, például a következő módon.

Az $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvény szigorúan monoton nő. Célszerű tehát úgy definiálni az f függvény kiterjesztéseként a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x$ függvényt, hogy az is szigorúan monoton növekedő legyen. Ehhez megfelelő módon értelmet kell tulajdonítanunk az irracionális kitevőjű hatványoknak, például a $2^{\sqrt{2}}$ kifejezésnek is. Tekintsük a $\sqrt{2}$ következő kétoldali közelítését.

$$\begin{aligned} 1 &< \sqrt{2} < 2 \\ 1,4 &< \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,41 &< \sqrt{2} < 1,42 \\ 1,414 &< \sqrt{2} < 1,415 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ekkor

$$
\begin{aligned}
2 = 2^1 &< 2^{\sqrt{2}} < 2^2 = 4 \\
2,63 \approx 2^{1,4} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \approx 2,83 \\
2,657 \approx 2^{1,41} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \approx 2,676 \\
2,664 \approx 2^{1,414} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} \approx 2,666 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Ezeknek az intervallumoknak - az egymásba skatulyázott zárt intervallumokra vonatkozó tétel alapján - van pontosan egy közös pontja, ez lesz a $2^{\sqrt{2}}$ értéke. Hasonlóan definiálható az $a^x (a > 0, a \neq 1)$ kifejezés értéke is, tetszőleges x irracionális kitevő esetén ($0 < a < 1$ esetén szigorú monoton csökkenő, $a > 1$ esetén szigorú monoton növekvő módon).

3. Számelmélet

A kétoldali közelítés módszere a számelmélet területén is számos érdekes eredményt hozhat.

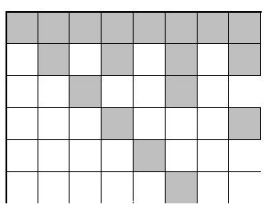
3.1. Az osztók száma

3.1.1. Feladat. Jelölje $d(n)$ az n pozitív egész szám osztóinak a számát. Igazoljuk, hogy

$$d(1) + d(2) + d(3) + \ldots + d(n) = n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right],$$

ahol $[a]$ az a valós szám (alsó) egészrészét jelöli, azaz az a-nál nem nagyobb egészek közül a legnagyobbat.

Megoldás. Legyen n rögzített pozitív egész, s tekintsünk egy $n \times n$-es táblázatot. A táblázatban az i-edik sor j-edik elemét fessük szürkére, ha $i|j$, különben meg fessük fehérre (8. ábra).



8. ábra. Az osztók száma

Vizsgáljuk meg, hány szürke mezőnk van oszloponként, illetve soronként összegezve. Világos, hogy a j-edik oszlopban éppen $d(j)$ számú szürke mező van, így a táblázat összesen $d(1) + d(2) + d(3) + \ldots + d(n)$ szürke mezőt tartalmaz. Soronként számolva, az első sor teljesen szürke, abban n szürke mező van, a másodikban $\left[\frac{n}{2}\right]$, a harmadikban $\left[\frac{n}{3}\right]$, és így tovább, az utolsó n-edik sorban csak $1 = \left[\frac{n}{n}\right]$. Így a teljes táblázatban $n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right]$ szürke mező van. A két összegnek meg kell egyeznie, hiszen mindketten a táblázatban lévő szürke mezők számát mutatják, vagyis kaptuk:

$$d(1) + d(2) + d(3) + \ldots + d(n) = n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right].$$

3.1.2. Feladat. A fentiek segítségével adjunk becslést a

$$\frac{d(1) + d(2) + d(3) + \ldots + d(n)}{n}$$

hányadosra.

Megoldás. Az egészrész definíciójából világos, hogy ha $1 \leq k \leq n$ akkor

$$\frac{n}{k} - 1 < \left[\frac{n}{k}\right] \leq \frac{n}{k}.$$

Így a fenti eredményünket használva kapjuk:

$$(n-1) + \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n} - 1\right) < d(1) + d(2) + \ldots + d(n) \leq n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \ldots + \frac{n}{n},$$

azaz

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - 1 < \frac{d(1) + d(2) + \ldots + d(n)}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Megjegyzés. A becslés érdekessége, hogy az alsó és felső becslés is minden határon túl nő, de különbségük 1.

4. Kombinatorika

A kétoldali össze/leszámlálás egyik „anyaterülete” a kombinatorika. Tekintsük a következő feladatot.

4.1. Binomiális együtthatók, és ami mögöttük van

4.1.1. Feladat. Igazoljuk, hogy $1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}$.

A fenti, és az ehhez hasonló feladat megoldás történhet például teljes indukcióval, vagy a binomiális együtthatók definícióját, tulajdonságait felhasználó formális átalakításokkal. Ezen megoldási módok egyike sem ad választ a már korábban is említett *„Miért”* típusú kérdésekre, a mögöttes, valódi matematikai tartalmat megvilágítatlanul hagyja.

Megjegyzés. Felépítéstől függően $\binom{n}{k}$ definiálásra sor kerülhet úgy, mint egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma, vagy $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formában is. Az első esetben tételként éppen az utóbbi előállítás látható be, míg az utóbbi definíció esetén az, hogy így éppen egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a számát kapjuk. A következőkben tárgyaltak kisebb átalakításokkal mindkét felépítésben használhatók.

A következőkben módszerünket alkalmazva megoldjuk a fenti feladatot.

Megoldás. A jobb oldalon egy $n+1$ elemű halmaz kételemű részhalmazainak a száma áll. Elég tehát belátni, hogy a bal oldalon is ez szerepel. Jelölje a halmaz elemeit $a_1, a_2, \dots a_n, a_{n+1}$. Soroljuk fel az összes kételemű részhalmazt a következő módon: Először vegyük azokat, amelyekben a_1 szerepel: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\dots$ $\{a_1, a_n\}$, $\{a_1, a_{n+1}\}$. Ezek száma n. Most vegyük azokat, amelyekben a legkisebb indexű elem a_2. Ezek: $\{a_2, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$, $\dots$, $\{a_2, a_{n+1}\}$. Ezen részhalmazok szám éppen $n-1$. Ezt folytatva, azon részhalmazok, melyekben szereplő legkisebb indexű elem a_k: $\{a_k, a_{k+1}\}$, $\{a_k, a_{k+2}\}$, $\dots$ $\{a_k, a_{n+1}\}$, számuk pedig $n+1-k$. Így tulajdonképpen az összes részhalmazt felsoroltuk, s az egyes csoportokban lévő halmazok száma rendre $n, n-1, \dots, 2, 1$.

$$\begin{array}{cccccc||c}
\{a_1,a_2\} & \{a_1,a_3\} & \{a_1,a_4\} & \{a_1,a_5\} & \dots & \{a_1,a_{n+1}\} & n \\
\{a_2,a_3\} & \{a_2,a_4\} & \{a_2,a_5\} & \dots & \{a_2,a_{n+1}\} & & n-1 \\
\{a_3,a_4\} & \{a_3,a_5\} & \dots & \{a_3,a_{n+1}\} & & & n-2 \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\{a_{n-1},a_n\} & \{a_{n-1},a_{n+1}\} & & & & & 2 \\
\{a_n,a_{n+1}\} & & & & & & 1
\end{array}$$

Felépítéstől függetlenül kiemelten fontos az a pont, amikor az ismétlés nélküli kombinációk összekapcsolódnak az ismétléses permutációk egy speciális típusával. A következőkben erre mutatunk egy példát, a felfedeztetést segítendő módon, a kétoldali összeszámlálás módszerét használva.

Képzeljünk el egy táblát, amelyik $n-k+1$ $(0 \le k \le n)$ lépés hosszú és $k+1$ lépés széles. Jelenleg a bal alsó sarokban egy egér ül, a tábla jobb felső sarkában egy

						S
E						

1. táblázat. Az egér és a sajt

darab sajt van. Egerünk csak felfelé vagy jobbra léphet, mindig szomszédos mezőre. Hányféleképp juthat el egerünk a sajthoz?

Először nézzük meg, hogy hány lépésre van szüksége egerünknek. Mivel az első sor első mezőjében van jelenleg, még $n-k$-t kell jobbra, és k mezőt kell felfelé lépnie. Okos egerünk kétféle módon is gondolkodhat.

1. Mivel összesen $n-k$ jobbra, és k felfele lépésre van szüksége, készít magának n számú kártyát, s ezek közül $n-k$-ra $\rightarrow$-t, k-ra pedig $\uparrow$-t rajzol. Most ahányféleképp ezeket a nyilakat sorba tudja tenni, annyiféleképp tud a sajthoz is eljutni. Ezen sorbarendezések száma pedig éppen $= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, hiszen n számú kártyája van, amelyekből k illetve $n-k$ egyforma.

2. Egerünk ezt végiggondolva túlságosan fárasztónak érzi, ezért így gondolkodik: Ha lépéseimet egytől n-ig megszámozom, és kiválasztom azokat, amelyeket fölfelé kívánok megtenni, egyértelmű, hogy a ki nem választott lépéseket jobbra kell megtennem. Így annyi út létezik a sajthoz, ahányféleképp ki tudok választani az $1, 2, \ldots, n$ számok közül k-t, ezen kiválasztások száma pedig éppen $\binom{n}{k}$.

Így beláttuk, hogy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Egy feladat nehézsége, megoldási sikeressége, diákok körében való népszerűsége, nem csak magán a problémán múlik (tehát a fentiek mindegyike szubjektív), hanem annak „tálalási módján” is. Ennek szemléltetésére tekintsük a következő feladatot.

4.1.2. Feladat. (a) Adjuk össze a Pascal-háromszög $0., 1., 2., \ldots$ sorában lévő elemeket! Mit tapasztalunk? Fogalmazzuk meg sejtésünket általánosan (az n. sorra), és bizonyítsuk is be!

(b) Igazoljuk, hogy egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^n.

(c) Igazoljuk, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában álló elemek összege 2^n.

(d) Bizonyítsuk be, hogy $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Megoldás. A Pascal-háromszög n-edik sorában, illetve a (d) egyenlőség bal oldalán egy n elemű halmaz összes részhalmazainak a száma áll. Legyenek a halmaz elemei $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Minden részhalmazra igaz, hogy a_1 vagy eleme, vagy nem. Így az a_1 elem kapcsán kétféleképp dönthetünk (vagy beletesszük az adott részhalmazba, vagy nem). Bárhogyan is döntünk, ezen döntésünktől függetlenül az a_2 elem esetében ismét döntenünk kell, hogy beletesszük-e a részhalmazba. Így az első két elem esetén már $2 \cdot 2 = 4$ lehetséges választás van. Az eljárás tovább folytatható, s akárhogyan is döntöttünk az első k elem esetén a következő elem figyelembe vételével a lehetőségek száma megkétszereződik. Így, az n-edik elemhez érve 2^n különböző részhalmazunk lesz.

A fenti módszer szemléletesebbé, és sokkal érthetőbbé válik, ha felsoroljuk a halmaz elemeit, és minden elem alá egy $+$ vagy $-$ jelet (esetleg 0-t vagy 1-et) írunk, aszerint, hogy szerepel-e az adott részhalmazban, vagy sem.

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots & a_{n-1}, & a_n \\ + & - & - & & + & - \end{array}$$

Így minden elem alatt egymástól függetlenül kétféle jel állhat, lehetőségeink száma tehát: $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

4.1.3. Feladat. Igazoljuk, szemléltessük, hogy

(a) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$,

(b) ha $2 \leq k \leq n$, akkor $\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k-2} + 2 \cdot \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$,

(c) ha $0 \leq j \leq k \leq n$, akkor $\binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}\binom{n+1-j}{k-i}$,

A Pascal-háromszög felépítése mögötti összefüggésre (a) is adhatunk szép, a kétoldali összeszámlálás módszerét alkalmazó bizonyítást, illetve ezen összefüggésből számos más, formálisan igencsak nehezen igazolható állítást, feladatot kreálhatunk, s igazolhatunk hasonló egyszerű, szemléletes módon.

Megoldás.

(a) Képzeljük el, hogy egy $n+1$ tagú osztályban k tagú küldöttséget kell választanunk. Ezt persze $\binom{n+1}{k}$ módon tehetjük meg. De ha külön figyelemmel kísérjük Ábel (aki persze tagja az osztálynak) sorsát, akkor ugyanerre a problémára egy újabb megoldást is találhatunk. Sokkal most sem bonyolultabb helyzetünk, Ábel vagy belekerül a küldöttségbe, vagy nem. Ha igen, akkor ő már ugye tag, tehát az osztály maradék n tagjából kell még $k-1$ küldöttet választani, ezt pedig $\binom{n}{k-1}$ módon tehetjük meg. Ha pedig Ábel nem tagja a küldöttségnek, akkor mind a k küldöttet az osztály többi, n számú tagja közül kell megválasztani, erre pedig $\binom{n}{k}$ lehetőségünk van. Így küldötteket összesen, egy más nézőpont szerint, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$-féle módon választhatunk.

(b) Most válasszuk külön azokat az eseteket, amikor az osztály két tagja, Ábel és Balázs közül mindketten, pontosan az egyikük, illetve egyikük sem tagja a bizottságnak.

(c) Kísérjük figyelemmel most az osztály j számú tanulójának sorsát.

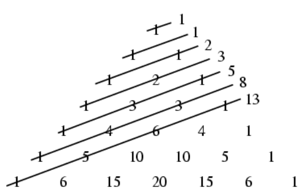
A kétoldali összeszámlálás módszerével nem csak a lényeget láttató, de egyszerű, szép, számolással, formális átalakítással nem járó megoldások is adhatók, olykor meglepő interpretációval is. Ezt szem előtt tartva oldjuk meg a következő feladatot.

4.1.4. Feladat. (a) $2^n \cdot \binom{n}{0} + 2^{n-1} \cdot \binom{n}{1} + 2^{n-2} \cdot \binom{n}{2} + \ldots + 2 \cdot \binom{n}{n-1} + 1 \cdot \binom{n}{n} = 3^n$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 3^n$.

A binomiális együtthatókat tartalmazó Pascal-háromszög és a Fibonacci-számok kapcsolatát tárgyalhatjuk módszerünk segítségével akár a következő módon is.

Kicsit tüzetesebben vizsgálva a Pascal-háromszöget, észrevehetjük, hogy a Pascal-háromszög sorait megfelelő módon „ferdén” összegezve épp a megfelelő Fibonacci-számokat kapjuk.



Maga az észrevétel meglepő lehet, sőt formulába öntve a következő, nem túl barátságos feladatot kapjuk.

4.1.5. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$f_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-k-1}{k},$$

ahol f_n az n-edik Fibonacci-számot jelöli.

Sem a kitűzés módja, sem az ebből valószínűsíthető megoldási módszerek nem adnak választ ezen meglepő összefüggés okára. Kissé távolabbról indulva azonban minden kérdést megválaszoló megoldást találhatunk. Oldjuk meg hát a következő feladatot (kétféle módon).

4.1.6. Feladat. Egy ház minden emeletét kékre vagy fehérre szeretnénk festeni, de két szomszédos emelet nem lehet egyszerre kék. Hányféle színezés lehetséges egy n emeletes ház esetén?

Megoldás. **(1.)** Jelölje tehát h_n egy n emeletes ház lehetséges színezéseinek számát. Egyemeletes ház esetén kétféleképp színezhetünk, vagy fehérre vagy kékre festjük az egyetlen emeletet. Két emelet esetén három lehetőségünk van a színezésre, a következőképp: fehér-fehér, fehér-kék, kék-fehér. Egy n emeletes ház esetén az n-edik emelet vagy fehér, vagy kék. Amennyiben fehér, akkor az alatta lévő $n-1$ emelet tetszőlegesen színezhető, azaz az ilyen n emeletes megfelelően színezett házak száma megegyezik az $n-1$ emeletes megfelelően színezett házak számával (h_{n-1}). Ha az utolsó, n-edik emelet színe kék, akkor az $n-1$-edik emelet szükségképpen fehér, így a maradék $n-2$ emeletet kell színezni, ami pontosan annyiféleképp lehetséges, ahányféleképp egy $n-2$ emeletes ház kifesthető a feltételeknek megfelelően (h_{n-2}). Ekkor: $h_1 = 2$, $h_2 = 3$, $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$ ha $n \geq 3$. Azaz: $h_n = f_{n+2}$. **(2.)** Legyen az n emeletes ház k emelete kék. Ekkor a maradék $n-k$ fehér emelet között, alatt és felett összesen $n-k+1$ hely van, ide helyezhetjük el a k darab kék emeletünket ami $\binom{n-k+1}{k}$ féleképp lehetséges. A kék emeletek száma 0-tól addig változhat, amíg a fenti elhelyezés lehetséges azaz:

$$\begin{aligned} k &\leq n-k+1 \\ 2k &\leq n+1 \\ k &\leq \left[\frac{n+1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Kaptuk tehát:

$$h_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n-k+1}{k}.$$

Az összefüggést $n+2$-ről n-re átírva készen vagyunk.

4.1.7. Feladat. Igazoljuk, szemléltessük, hogy

(a) $n\binom{n-1}{k} = k\binom{n}{k}$,

(b) $\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} = \binom{k}{l}\binom{n}{k}$,

(c) $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

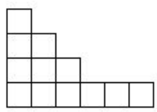
4.1.8. Feladat. Hány olyan n hosszúságú fej-írás sorozat van, melyben két fej nem állhat egymás mellett?

4.2. Partíciók

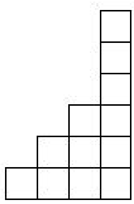
Egy n pozitív egész szám partíciói alatt értjük az n szám pozitív egészek összegeként való felírását, ahol az összeadandó tagok sorrendje nem számít.

4.2.1. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n, k \in \mathbb{N}^+$ akkor az n azon partícióinak száma, melyben minden tag legfeljebb k, megegyezik az n legfeljebb k tagot tartalmazó partícióinak számával.

Megoldás. Az n szám partícióinak száma természetes módon szemléltethető a következő módon. Helyezzünk el egységnégyzeteket egymás mellé illetve fölé úgy, hogy minden partíció a partíció méretének megfelelő számú egységnégyzetből álljon.



Forgassuk el az ábrát 90-kal! (Vagy egyszerűen csak nézzünk rá ugyanarra az ábrára egy másik irányból!



Ha az első ábrán található partíció minden tagja legfeljebb k, az éppen azt jelenti, hogy az elforgatott ábra egy olyan partíciót mutat, melynek legfeljebb k tagja van. Tehát minden legfeljebb k-t tartalmazó partícióhoz tartozó ábra ugyanakkor pontosan egy legfeljebb k tagú partíció ábrája is. Ezen észrevételünkkel állításunkat beláttuk.

5. Analízis

A következőkben néhány példát mutatunk az analízis területéről módszerünk megjelenésére, alkalmazási lehetőségeire.

5.1. Rendőr-elv

Elemi analízis egyik, sorozatok határértékére vonatkozó összefüggése a rendőr-elv néven is ismert tétel:
Tétel: Legyenek a_n, b_n, c_n valós számsorozatok, melyekre (majdnem) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \le b_n \le c_n$ teljesül. Ekkor ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, akkor a b_n sorozat is konvergens, és $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

5.1.1. Feladat. Határozzuk meg az $b_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$ sorozat határértékét.

Megoldás. Tekintsük a következő becslést, amely minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll:

$$a_n = \sqrt[n]{5^n} \le \sqrt[n]{3^n + 5^n} \le \sqrt[n]{5^n + 5^n} = c_n.$$

Mivel $a_n = 5$ és $c_n = \sqrt[n]{2} \cdot 5$, és így $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$, valamint $\lim_{n\to\infty} c_n = 5$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5.$$

5.2. Végtelen sorok - Egy mértani sor

Módszerünk segítségével (bizonyos típusú) végtelen összegek is kezelhetővé, tárgyalhatóvá válnak elemi eszközök segítségével.

5.2.1. Feladat. Régen árultak olyan csokoládét, amely papírjában egy szelvény volt, s tíz szelvényért egy újabb tábla csokoládét lehetett kapni. Valójában hány tábla elfogyasztható csokoládét ért egy ilyen tábla csokoládé? (A feladat Kalmár Lászlótól (1905-1976) származik.)

Megoldás. Minden tábla csokoládéban van egy szelvény, amely a szabályok értelmében egy tized csokoládét ér. De ebben a tized csokoládéban is rejlik egy tized cédula, amely szintén ér valamennyi csokoládét, s.í.t. Így egy tábla csokoládé valójában

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots$$

csokoládét ér.

Nézzük most kicsit más szemmel a csokoládénkat! Pisti 9 cédula birtokában bemegy a boltba, s megkéri az eladónőt, akivel jóban van, hiszen gyakran vásárol nála csokoládét, hogy egy pillanatra adjon oda neki a polcról egy csokit, s ő kisvártatva ki fogja azt fizetni. Pisti, amint megkapta a csokit, kibontja azt, s kiveszi belőle a fizetéshez hiányzó, tizedik szelvényt, majd a tíz szelvénnyel ki is fizeti a csokoládéját. Így 9 csoki áráért 10-et kapott, vagyis egy csoki valójában $\frac{10}{9}$ csokoládét ér. Ezzel beláttuk:

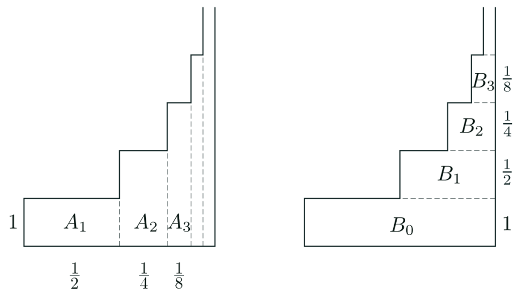
$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{10}{9}.$$

5.3. Egy nem mértani sor - egy geometriai modell

5.3.1. Feladat. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ sor összegét[2]!

Megoldás. Tekintsük a 9-es ábrát! A bal oldalon látható téglalapok területeinek összege: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$, ez világos, hogy megegyezik a jobb oldalon található téglalapok területének összegével - a két ábra eltolással egymásba vihető - amely: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$. Ezen összeg pedig - mivel egy konvergens mértani sor összege - könnyen számolható. Így kaptuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2.$$



9. ábra. Az összeg kétféleképp

Megjegyzés. A jobb oldali összeg is meghatározható, a konvergens mértani sorok ismerete nélkül is a következő feladat segítségével.

5.3.2. Feladat. Van egy kör alakú tortánk, melyet úgy szeretnénk teljesen megenni, hogy végtelen hosszú életünk minden napján együnk belőle. Hogyan járjunk el?

Megoldás. Az első napon együk meg a torta felét, a második napon a maradék rész felét, és így tovább. Így az n-edik napon a torta $\frac{1}{2^n}$-ed részét esszük meg, azaz: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \ldots = 1$.

A feladatban szereplő sor másképp is összegezhető, az emelt szintű középiskolás ismereteket meg nem haladó módon, az összeg a következő, ötletesen kiírt végtelen sok mértani sor összegének összegeként számolható.

---

[2]Richard Swineshead, angol matematikus egy fizikai probléma vizsgálata során foglalkozott először ezzel a sorral a XIV. században.

$$\begin{array}{l}\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots\\ \qquad\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots\\ \qquad\qquad\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots\\ \qquad\qquad\qquad\vdots\end{array}$$

A fenti mértani sorok összegeit összegezve a $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ mértani sor adódik melynek összege 2.

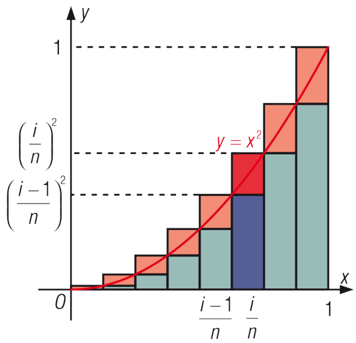
5.4. A határozott integrál és a grafikon alatti terület

Az analízis egyik, alkalmazások szempontjából is jelentős területe az integrálszámítás. Már a Kr.e. 1800 körül keletkezett híres Moszkvai Tekercsen is megtalálható a határozott integrálszámítás alapgondolata a csonka kúpok és csonka gúlák térfogatainak kiszámítása kapcsán. Az ókori görögöknél a módszer fejlettebb változatával találkozhatunk. Az ún. infinitezimálisokat (végtelenül kicsi mennyiségeket) először Arkhimédész használta, amellyel jelentős eredményeket ért el. Azonban azt meg kell említeni, hogy maga Arkhimédész sem tartotta pontosnak saját bizonyításait. A mai értelemben vett integrálszámítás Newton és Leibniz, valamint többek között Cauchy, illetve Riemann munkássága nyomán alakult ki.

Komoly gyakorlati jelentőséggel bír különböző síkidomok „nagyságának" kiszámítása. A sokszögeknél ez megfelelő adatok birtokában általában nem jelent problémát, azonban már a kör területének meghatározása (igazolása) sem feltétlen egyszerű. Következőben olyan eljárást ismertetünk, amelyet Arkhimédész dolgozott ki a parabolaszelet területének meghatározására. Ezt szokás hívni a kétoldali közelítés módszerének.

5.4.1. Feladat. Számítsuk ki az $y = x^2$ egyenletű parabola grafikonja alatti területet a $[0;1]$ zárt intervallumon!

Megoldás. A területre intuitíve rögtön tudunk egy becslést adni, hiszen legalább nulla, persze nagyobb is nála, illetve az egységnégyzet területének a felénél kisebb. Azonban ennél pontosabban szeretnénk meghatározni, sőt meg szeretnénk határozni a területet. Ezt a következőképpen tudjuk megvalósítani.



10. ábra. A grafikon alatti terület kétoldali közelítése

A keresendő területet jelöljük T-vel, amiről már tudjuk, hogy $0 < T < 1/2$. Osszuk fel a $[0;1]$ intervallumot n egyenlő részre, ahol $n \in \mathbb{N}$. A görbe alatti terület az i-edik részintervallumon alulról, illetve felülről becsülhető egy-egy téglalap területével. Az i-edik részintervallumhoz tartozó téglalapok területe az (ábra alapján):

$$\frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{(i-1)^2}{n^3}, \text{ illetve } \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{i^2}{n^3},$$

így a grafikon alatti T terület a $[0;1]$ intervallumon alulról és felülről is egyszerre becsülve:

$$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) \le T \le \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

Ekkor az első n pozitív egész négyzetének zárt alakjára vonatkozó

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

összefüggés segítségével a következő becslést tudjuk adni:

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \le T \le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6n}\right) \le T \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6n}\right).$$

Ekkor a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ határérték felhasználásával látható, hogy az egyenlőtlenség két oldalán álló sorozatok határértéke $\frac{1}{3}$, vagyis így $T = \frac{1}{3}$.

5.4.2. Feladat. Adott az $f : [0; a] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ függvény, ahol $a > 0$. Határozzuk meg a függvény grafikonja alatti zárt síkrész területét.

A terület ezen módon történő meghatározásának sikeressége az alsó, illetve a felső közelítő összegek kiszámításán is múlt. Így a kétoldali közelítés vezethet el egy korrekt, de a szemléletet erőteljesen kihasználó felépítésben a határozott integrál fogalmához.

Definíció. Egy $[a; b]$ zárt intervallumon értelmezett, korlátos f függvényt pontosan akkor nevezünk integrálhatónak, ha egyetlen egy olyan szám létezik, amely az f függvény egyetlen alsó közelítőösszegénél sem kisebb, és egyetlen felső közelítőösszegénél sem nagyobb. Ezt a számot az f függvény $[a; b]$-n vett határozott (Riemann) integráltjának nevezzük, és

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

módon jelöljük. Az ilyen tulajdonságú függvényeket szokás nevezni Riemann- integrálható függvényeknek.

Ezt a jelölést használva a fentiek alapján

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

adódik.

6. Geometria

6.1. Analitikus geometria - Vektorok skaláris szorzata

A derékszögű koordináta-rendszerben koordinátáival adott vektorok hajlásszöge kiszámításának egyik legegyszerűbb, tankönyvi módja, épp a vektorok skaláris szorzatának kétféle módon történő felírásából adódik. Legyenek adottak a koordinátasíkon az $\overrightarrow{a}(a_1; a_2)$ és $\overrightarrow{b}(b_1; b_2)$ vektorok, jelölje ezen vektorok hajlásszögét α. Ekkor a két vektor skaláris szorzata definíció szerint:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\alpha = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \cos\alpha.$$

a koordinátákkal kifejezve pedig

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

A skaláris szorzat kétoldali megközelítéséből adódik, hogy

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \cos\alpha = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \tag{1}$$

Innen a két vektor hajlásszögének koszinuszát kifejezve:

$$\cos\alpha = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Megjegyzés. A (1) egyenletből, figyelembe véve, hogy $\cos\alpha \leq 1$ egyszerűen adódik (két tagra) a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség is: Tetszőleges $a_1; a_2; b_1; b_2$ valós számokra:

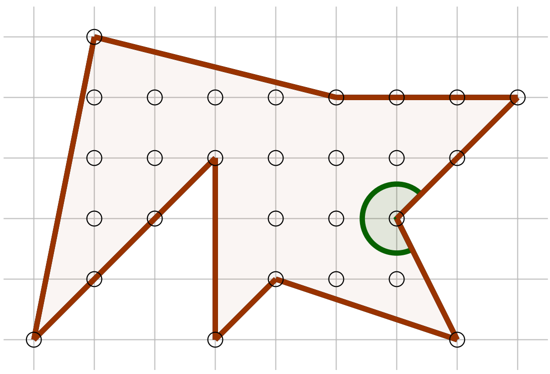
$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

6.2. Rácsgeometria - Pick-képlet

A geometria egyik érdekes (határ)területe a számelméleti tételek geometria megközelítésére lehetőséget biztosító rácsgeometria. A derékszögű koordinátarendszer egész koordinátájú pontjait rácspontoknak nevezzük. A rácssokszög olyan sokszög, amelynek minden csúcsa rácspont. (Érdekes például, hogy csak páros oldalszámú egyenlő oldalú rácssokszög létezik.) Egy rácsháromszöget üresnek nevezünk, ha csúcsain kívül sem a határán, sem a belsejében nem tartalmaz rácspontot. A rácsgeometria egy központi összefüggése a rácssokszögek területét a „kapcsolódó” rácspontok számának segítségével megadó Pick-képlet. Ehhez jutunk el módszerünk segítségével az alábbiakban. Felhasználjuk, hogy minden üres rácsháromszög területe $\frac{1}{2}$. Oldjuk meg először a következő feladatot.

6.2.1. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy rácssokszög határán h, belsejében b rácspont van, akkor a sokszög $h + 2b - 2$ üres rácsháromszögre bontható.

Megoldás. A rácssokszögek üres rácsháromszögekre bontása nem egyértelmű, viszont a felbontáshoz szükséges üres rácsháromszögek száma független a felbontás módjától, s a keresett összefüggés éppen ezen a meglepő állításon múlik, melynek igazolása módszerünkön nyugszik. Legyen egy adott felbontás (11. ábra) során keletkező üres rácsháromszögek száma n. Számítsuk ki a felbontásban szereplő háromszögek belső szögeinek összegét kétféle módon.
(1.) Az első „mód” igencsak egyszerű: n háromszög belső szögeinek összege $n \cdot 180°$.
(2.) Másrészt az összeg adódik a belső pontok körüli csúcsoknál keletkező 360°-os szögekből, másrészt a sokszögre mint 180°-os szögeket is tartalmazó h-szögre tekintve a „csúcsoknál” keletkező összesen $(h - 2)180°$-os szögekből.



11. ábra. Rácssokszög és felbontása

Ekkor a kétféle összeszámlálás közös eredményéből $n \cdot 180 = (h - 2)180 + b \cdot 360$, és így $n = h - 2 + 2b$ adódik.

Most felhasználva, hogy minden üres rácsháromszög területe: $t = \frac{1}{2}$ adódik, hogy egy rácssokszög határán h, belsejében b rácspont van, akkor a sokszög területe: $t = \frac{h}{2} + b - 1$, ez az ún. Pick-képlet.

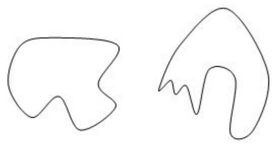
6.3. Szintetikus geometria - Területfogalom (Jordan-mérték)

Ebben a pontban a sík, illetve a tér bizonyos részhalmazainak a területét, illetve térfogatát fogjuk meghatározni a teljesség igénye nélkül, egy a korábbiakban látottól eltérő megközelítésben.

A terület fogalma és annak mérése már az általános iskola alsóbb osztályaiban is előkerül. Ekkor még axiómák helyett a következőt mondjuk: A terület alapegysége az 1 négyzetméter (m^2), az 1 m oldalhosszúságú négyzet területe.

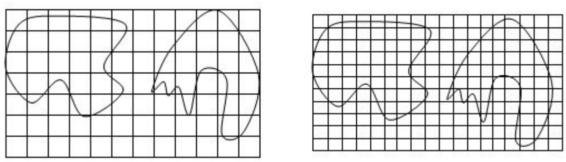
Már ilyen idős korban is kitűzésre kerül(het)nek a következőhöz hasonló feladatok:

6.3.1. Feladat. Keressünk módszert, amellyel el tudjuk dönteni, hogy az itt látható két „paca” (síkidom) (12. ábra) közül melyik területe a nagyobb!



12. ábra. Síkidomok területe

Megoldás. A megoldás ebben a korban például a következő módon képzelhető el: Vágjuk ki a síkidomokat, majd helyezzük őket egy 1 cm oldalhosszúságú négyzetrácsra (milliméterpapír) és számoljuk meg, hogy az egyes síkidomok belsejében hány négyzetrács van, illetve, hogy az egyes síkidomok hány négyzetráccsal fedhetők le. Ha ez a (területre vonatkozó) becslés nem segít, vizsgálódjunk 0,5 cm oldalhosszúságú négyzetekből álló négyzetrácson, s.í.t. (13. ábra)!



13. ábra. Síkidomok területe

Már ekkor is látható, hogy az apróbb „lépték” pontosabb munkát tesz lehetővé.

Egyszerű geometriai alakzatok hosszúsága, területe, térfogata már az ókorban ismertek és számolhatóak voltak. A terület fogalmát Peano és Jordan terjesztették ki a sík részhalmazainak egy bővebb rendszerére a XIX. század végén.

Legelőször az $\mathbb{R}^2$ tér részhalmazairól lesz szó. Ezeket szokás tartományoknak is nevezni. Az $\mathbb{R}^2$ tér egy négyszögén mindig olyan téglalapot értünk, amelynek oldalai az X_1X_2 tengelyekkel párhuzamosak, vagyis $\mathbb{R}^2$-nek egy

$$T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\} \tag{2}$$

alakú részhalmazát. Ennek területét a

$$t = (b - a)(d - c)$$

szorzattal értelmezzük az elemi geometriai ismeretek alapján. A (2)-ben szereplő intervallumot feloszthatjuk a következőképpen:

$$a = x_1^{(0)} < \ldots < x_1^{(n)} = b$$
$$c = x_2^{(0)} < \ldots < x_2^{(m)} = d$$

egyenlőtlenségnek megfelelőlen, akkor az $x_1 = x_1^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, és az $x_2 = x_2^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ egyenletű egyenesek halmazát négyszögrácsnak nevezzük, a

$$T_{ik} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^{(i-1)} \le x_1 \le x_1^{(i)}, x_2^{(k-1)} \le x_2 \le x_2^{(k)}\right\}$$

részhalmazt pedig elemi négyszögeknek vagy rácsszögeknek.

A következőkben legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz. Ekkor létezik egy olyan T négyszög, amellyel $A \subset T$. Ebben az esetben azt tudjuk mondani, hogy T az A halmazt lefedi. Ugyanilyen értelemben mondhatjuk azt is, hogy az A halmazt a T négyszög oldalainak felosztásával adódó négyszögrács is lefedi, hiszen nyilvánvaló, hogy $A \subset \cup_{i,k} T_{ik} = T$, ahol az egyesítés T összes elemi négyszögére vonatkozik.

Most vizsgáljuk meg A-t lefedő négyszögrácsok halmazát, és ezekben azoknak az elemi négyszögeknek a területösszegét, amelyek A-nak legalább egy pontját tartalmazzák. Ezeknek a területösszegeknek az alsó határát az A halmaz külső területének nevezzük. Az A halmaz belső területe pedig az A halmaz belsejébe eső elemi négyszögek területösszegének felső határa, feltéve, hogy egyáltalán léteznek ilyen négyszögek. Ha nincsenek, akkor A belső területét nullának tekintjük.

6.4. Jordan-mérték

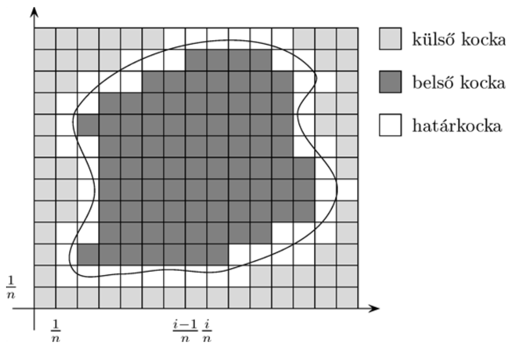
Ezek után értelmezhetjük az A halmaz mérhetőségének és területének fogalmát.

Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{R}^2$ halmaz Jordan-értelemben mérhető (vagy röviden Jordan mérhető) területű, ha A külső területe és belső területe egyenlő. A külső terület és belső terület közös mérőszámát az A halmaz területének nevezzük.

Eszerint egy síkbeli korlátos halmaz Jordan-szerinti külső mértéke legyen az őt lefedő véges sok sokszögből álló alakzatok területének pontos alsó korlátja, Jordan-szerinti belső mértéke pedig a benne fekvő véges sok sokszögből álló alakzatok területének pontos felső korlátja. Ha ezek egyenlőek, akkor a halmazt Jordan-mérhetőnek, ezen közös értéket pedig a halmaz Jordan-mértékének nevezzük. Ezt a mértéket szoktuk tehát általános- és középiskolában területnek nevezni. A fejezet elején mutatott naiv megközelítés kiállta a próbát. A fenti összefüggéseket a 14. ábra szemléltei.

A négyzetet $1/n$ oldalhosszúságú kis négyzetekre osztottuk fel, és minden esetben bejelöltük, hogy az adott síkidom esetében melyik az a rész, ami külső része, illetve belső része, értelemszerűen a határkocka mindkettő részhez tartozik, így egzaktul nem lehet eljelölni. Minél nagyobb n-eket veszünk annál pontosabb értéket kapunk ($n \in \mathbb{N}$).

A Jordan-mérték és a Riemann-integrál kapcsolata nagyon szoros, hiszen egy nemnegatív valós függvény pontosan akkor integrálható Riemann-szerint, ha a függvény görbéje alatti síkidom Jordan-mérhető. Ekkor a Riemann-integrál és a síkidom Jordan-mértéke megegyezik.



14. ábra. Lefedő külső és belső kockák

Az előzőekben vázlatosan megismert, $\mathbb{R}^2$-beli részhalmazok területének jelölésére használt eljárást az $\mathbb{R}^3$ tér korlátos részhalmazai térfogatának értelmezésére is tudjuk használni, és hosszúságmérés esetén is analóg eljárást használhatunk.

A három dimenziós térben természetesen

$$T = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, 3\right\}$$

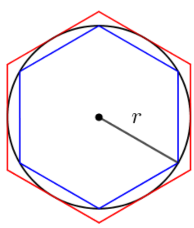
alakú három dimenziós téglákkal dolgozunk, melyek térfogatát a

$$t = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$$

képlettel definiáljuk, négyzetrácsok helyett pedig úgynevezett téglarácsokat alkalmazunk. Egy korlátos $A \subset \mathbb{R}^3$ halmaz külső és belső térfogata ilyen téglarács segítségével ugyanúgy értelmezhető, mint azt $\mathbb{R}^2$-ben láttuk, és a Jordan-mérhetőség és térfogatmérték is egyezik az előzőekben látott fogalommal.

6.4.1. Feladat. Határozzuk meg egy $r(> 0)$ sugarú kör területét!

Megoldás. Az ötlet itt is hasonló a fent eddig látott módszerekhez, közelítsük a területet két oldalról szabályos sokszögek segítségével, ahogy azt a 15. ábra is mutatja.



15. ábra. Kör kerületének közelítése $n = 6$ esetén

$$T_{\text{beírt sokszög}} \leq T_{\text{kör}} \leq T_{\text{köré írt sokszög}}$$
$$\frac{r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} n \leq T_{\text{kör}} \leq \frac{2r^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} n,$$

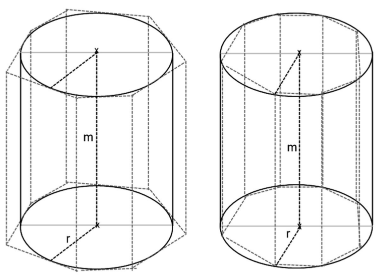
$\lim_{n\to\infty} \frac{r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} n = \lim_{n\to\infty} \frac{r^2}{2} 2\pi \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} = r^2\pi$, hiszen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Továbbá $\lim_{n\to\infty} r^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) n = \lim_{n\to\infty} r^2\pi \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = r^2\pi$. Ekkor a rendőr-elv alapján kapjuk, hogy $r^2\pi \leq T_{\text{kör}} \leq r^2\pi$, vagyis $T_{\text{kör}} = r^2\pi$.

6.4.2. Feladat. Határozzuk meg az m magasságú egyenes körhenger térfogatát, ha alapkörének sugara r.

Megoldás. Az egyenes körhenger térfogatának meghatározásához fel fogjuk használni, hogy a hasáb térfogata a következőképpen adódik:

$$V_{\text{hasáb}} = T_{\text{alapterület}} \cdot m_{\text{hasáb}}. \tag{3}$$

Az egyenes henger térfogatát köré- és beírt hasábok segítségével, a kétoldali közelítés módszerével határozzuk meg, ahogy ezt a 16. ábra is mutatja.



16. ábra. A henger közelítése hasábbal

A henger alapjába, vagyis az r sugarú körbe és a kör köré egy-egy szabályos sokszöget írunk, melyek oldalszámát jelölje n. A beírt hasáboknál a sokszög csúcsai a körvonalon helyezkednek el, a köré írtaknál pedig a sokszögek oldalai (az alap és fedőlap alapélei) érintik a henger alap ill. fedőkörét. A hasábok és a henger alap és fedőlapjai egy síkban vannak. A beírt hasábok térfogata mindig kisebb, a köré írt hasábok térfogata pedig mindig nagyobb a henger térfogatánál, felírhatjuk tehát a következő egyenlőtlenségeket:

$$T_{\text{be}} \cdot m = V_{\text{be}} \leq V_{\text{henger}} \leq V_{\text{köré}} = T_{\text{köré}} \cdot m, \tag{4}$$

ahol m a henger és a hasábok magassága, T_{be}, és $T_{\text{köré}}$ rendre a be-, illetve a köré írt hasábok alapjainak területe. A beírt és köré írt hasábok oldalszámának növelésével a beleírt sokszög területe, így a beírt hasáb térfogata is növekszik, míg a köré írt sokszög területe, vele együtt a hasáb térfogata csökken. A be- és a köré írt sokszögek oldalszámát növelve a két sokszög területe között a különbség bármilyen kicsivé tehető, és ez a kör területét, azaz $r^2\pi$-t adja (ld. **27. Feladat.**). Így tehát a henger térfogata: $V_{\text{henger}} = r^2\pi m$.

Alakzatok területének többféle módon történő felírása klasszikus tételek bizonyításában is segítségünkre lehet.

6.5. Szintetikus geometria - Elemi tételek bizonyítása: A Pitagorasz-tétel

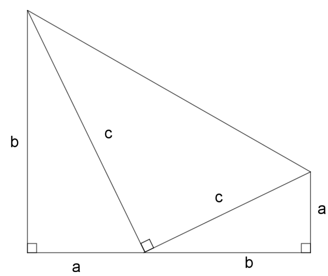
A tétel számos bizonyítása közül az egyik legegyszerűbb egy derékszögű trapéz területének kétféleképp történő felírásán alapszik. Valóban, a trapéz területét önmagában, illetve részei összegeként felírva:

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{2ab+c^2}{2}.$$

Ezt átrendezve,

$$a^2+b^2=c^2$$

adódik[3] (17. ábra).



17. ábra. A Pitagorasz-tétel bizonyítása

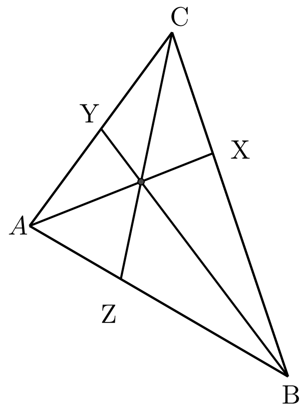
Az *„igazoljuk, hogy az összekötő szakaszok az a oldalon metszik egymást”*, vagy a *„ mutassuk meg, hogy a háromszögek beírt körei érintik egymást”* típusú, általában három vagy több egyenes, szakasz stb. egy pontra illeszkedését, illetve alakzatok speciális, például érintő helyzetének igazolását igénylő feladatok megoldása is lehetséges módszerünkkel. Azt, hogy három egyenes (e, f, g) egy ponton megy át, igazolhatjuk például úgy, hogy tekintjük az e és f egyenesek P, majd az e és g egyenesek Q metszéspontját, és igazoljuk, hogy $P = Q$, vagyis tulajdonképpen ugyanahhoz a ponthoz kétfelől közelítünk, egyrészről az e és f, másrészről az e és g egyenesek „irányából”. Az alábbiakban erre mutatunk néhány példát.

[3]Ezen bizonyítás állítólag az Egyesült Államok 20. elnökének, James A. Garfieldnek nevéhez fűződik.

6.6. Szintetikus geometria - Illeszkedési tételek bizonyítása: A Ceva-tétel megfordítása

Tekintsük először a következő fogalmat, és egy kapcsolódó tételt.

Definíció. Egy háromszögben a csúcsokat a szemközti oldal egy-egy pontjával összekötő szakaszokat Ceva[4]-féle szakaszoknak nevezzük, ha azok egy pontban metszik egymást (18. ábra).



18. ábra. A Ceva-féle szakaszok

Ceva-tétel: Az ABC háromszögben az AX, BY, CZ Ceva-féle szakaszokra $\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1$.

6.6.1. Feladat. Igazoljuk a Ceva-tétel megfordítását.

Ceva-tétel megfordítása: Ha az ABC háromszögben az AX, BY, CZ szakaszokra ahol X, Y, Z rendre a BC, CA, AB oldalak belső pontjai

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1 \tag{5}$$

fennáll, akkor a három szakasz egy pontra illeszkedik.

„Közelítsünk" a metszéspont(ok)hoz a kétféleképp, a következő módon. Az AX és BY szakaszok metszéspontját jelölje P. A P-n áthaladó harmadik Ceva-féle szakasz végpontját jelölje Z'. Ekkor Ceva tétele miatt

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ'}{Z'B} = 1 \tag{6}$$

(5) miatt pedig

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1,$$

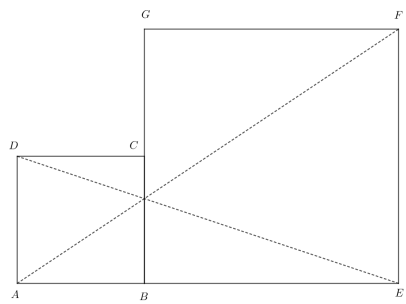
[4]Giovanni Ceva, olasz matematikus (1648-1736), 1678.

így (5) és (6) összevetéséből:

$$\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB} \Longrightarrow Z = Z'.$$

6.7. Szintetikus geometria - Illeszkedési feladatok megoldása

6.7.1. Feladat. Az ábrán látható $ABCD$ és $BEFG$ négyzetek AE és DF csúcsait összekötöttük. Igazoljuk, hogy az összekötő szakaszok a BG oldalon metszik egymást (19. ábra)!

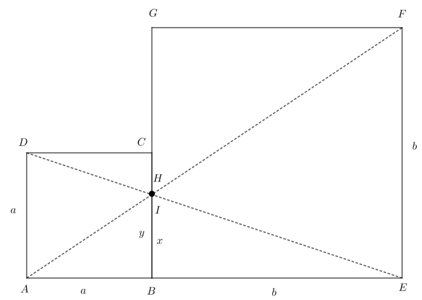


19. ábra. A négyzetek és az összekötő szakaszok

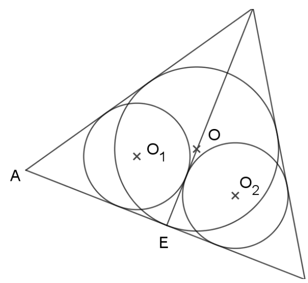
Megoldás. Jelölje az AF és GB szakaszok metszéspontját H, és legyen a DE és GB szakaszok metszéspontja I. Legyen továbbá $HB = x$ és $IB = y$ (20. ábra). Be kell látnunk, hogy $H = I$, s ez új jelöléseinknek köszönhetően, ekvivalens azzal, hogy $x = y$. Legyen az $ABCD$ négyzet oldalhossza a, a BEFG négyzeté b.

Vegyük észre, hogy $AHB\triangle \sim AFE\triangle$ mert oldalaik páronként párhuzamosak. A hasonlóságból következően a megfelelő oldalak hosszának aránya megegyezik, azaz $\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b}$. Hasonlóképpen $EIB\triangle \sim EDA\triangle$, így $\frac{y}{b} = \frac{a}{a+b}$. Ekkor az egyenletek összevetéséből kapjuk: $x = y$, vagyis $H = I$, azaz a két szakasza valóban a BG szakaszon metszi egymást.

6.7.2. Feladat. Legyen az ABC háromszög beírt körének a háromszög c oldalán lévő érintési pontja E. Igazoljuk, hogy az AEC háromszög és a CEB háromszög beírt körei érintik egymást (21. ábra).

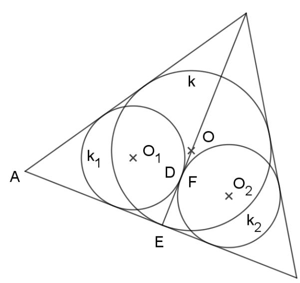


20. ábra. A négyzetek és az összekötő szakaszok



21. ábra. A háromszög és a beírt körök

Megoldás. Legyen az ABC háromszög beírt köre k, középpontja O, az ACE háromszög beírt köre k_1, középpontja O_1, jelölje továbbá a CEB háromszög beírt körét k_2, a kör középpontját O_2. Legyen továbbá a k_1 és k_2 körök CE-vel vett érintési pontja rendre D illetve F (22. ábra).



22. ábra. A háromszög és az érintési pontok

Ekkor a beírt kör érintési pontjainak a háromszög oldalaiból levágott szakaszok hosszaira vonatkozó összegfüggés alapján az ACE háromszögből: $DE = s_1 - b = \frac{CE+b+s-a}{2} - b = \frac{CE+s-b-a}{2}$, illetve a CEB háromszögből: $FE = s_2 - a = \frac{CE+a+s-b}{2} - a = \frac{CE+s-b-a}{2}$ írható, ahol s_1 az ACE, s_2 pedig a CEB háromszög félkerületét jelenti. Most az egyenletek összevetéséből $DE = FE$ vagyis $E = F$ adódik.

7. Valószínűségszámítás

A korábban a végtelen sorokra kapott eredményeinket, tapasztalatainkat felhasználva a valószínűségszámítás tárgykörében is eredményesen alkalmazhatjuk módszerünket.

7.1. Egy valószínűségi modell, egy mértani sor

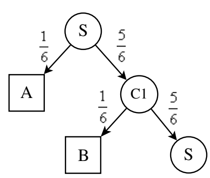
Előfordulhatnak olyan feladatok, melyeknél bizonyos események valószínűségét csak végtelen sorok segítségével tudjuk leírni. Egy másik modellt használva azonban végtelen sorok ismerete nélkül is eredményre juthatunk, illetve az adott probléma kétféle megközelítéséből módszerhez is juthatunk végtelen sorok összegzésére.

7.1.1. Feladat. Két játékos, Anna és Balázs egy szabályos dobókockával játszik. A játékot Anna kezdi és a kockát felváltva egyszer-egyszer feldobva az nyer, aki először dob hatost. Mi a valószínűsége annak, hogy Anna nyer?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy Anna nyer. Keressük $\mathbf{P}(A)$ értékét. Vezessük be a $\mathbf{P}(A_n)$ jelölést, mely jelentse azt, hogy Anna az n. ($n \in \mathbb{N}^+$) lépésben nyer. Tudjuk, hogy az $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ események diszjunktak, így a valószínűség σ-additív tulajdonságát felhasználva, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$. Könnyen látható, hogy n csak páratlan szám lehet, hiszen Anna csak páratlanadik dobásra nyerhet. Legyen $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), ekkor $\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(A_3) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^2$, hiszen ahhoz, hogy Anna a 3. dobásra nyerjen az kell, hogy az általa dobott első, és Balázs által dobott második dobás ne legyen hatos, míg az Anna által dobott 3. dobás éppen hatos legyen. Hasonló meggondolásokkal adódik, hogy $\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{n-1}$. Így a keresett valószínűséget a következő összeg formájában tudjuk felírni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k}.$$

Éljünk most egy más megközelítéssel! Tekintsük a következő ábrát (23. ábra).



23. ábra. Állapotok és valószínűségeik

Itt S jelöli a start állapotot, innen Anna dob, aki $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dob hatost, így jutunk az Anna nyert állapotba, illetve $\frac{5}{6}$ valószínűséggel nem hatost dob, így a C_1 állapotba jutunk, ahonnan Balázs dob. Ha hatost dob nyert, ennek valószínűsége most is $\frac{1}{6}$, ha pedig nem hatost dob, akkor ismét Anna következik, visszajutottunk tehát az S állapotba. Most Annának a start állapotból való nyerésének valószínűségét keressük, jelölje ezt $\mathbf{P}_S(A)$, s.í.t. a többi állapotra is. Ekkor a következő egyenletrendszerhez juthatunk.

$$\mathbf{P}_S(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\mathbf{P}_{C1}(A)$$
$$\mathbf{P}_{C1}(A) = \frac{5}{6}\mathbf{P}_S(A)$$

ahonnan $P_S(A) = \frac{6}{11}$ adódik. Így ugyanazon esemény valószínűségét kétféle módon kiszámolva kaptuk:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{6}{11}.$$

8. Néhány nehezebb feladat

A módszer nagyszerűségének szemléltetésére álljon itt néhány, a korábbiaknál jóval nehezebb feladat.

8.1. Fibonacci-számok és nem Fibonacci-számok

8.1.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < m < n$, akkor az $X = f_{2m+1} + f_{2m+3} + \cdots + f_{2n+1}$, és az $Y = f_{2m} + f_{2m+2} + \cdots + f_{2n}$ számok nem tagjai a Fibonacci-sorozatnak, ahol f_n az n-edik Fibonacci-számot jelöli.

Megoldás. Belátjuk, hogy X és Y két szomszédos Fibonacci-szám közé esik, tehát nem lehetnek Fibonacci-számok. Tekintsük az $X = (X + Y) - Y$ és az $Y = X - (X - Y)$ kifejezéseket! Ekkor

$$X = f_{2m} + f_{2m+1} + f_{2m+2} + f_{2m+3} + \ldots + f_{2n} + f_{2n+1} - f_{2m} - f_{2m+2} - \cdots - f_{2n} =$$
$$= f_{2m+2} + f_{2m+4} + \ldots + f_{2n+2} - f_{2m} - f_{2m+2} - \ldots - f_{2n} = f_{2n+2} - f_{2m}, \text{ valamint}$$
$$Y = f_{2m+1} + f_{2m+3} + \ldots + f_{2n+1} - (f_{2m+1} - f_{2m} + f_{2m+3} - f_{2m+2} + \ldots + f_{2n+1} - f_{2n}) =$$
$$= f_{2m+1} + f_{2m+3} + \ldots + f_{2n+1} - (f_{2m-1} + f_{2m+1} \ldots f_{2n-1}) = f_{2n+1} - f_{2m-1}.$$

Mivel $m < n$, így $f_{2m} < f_{2n}$, és $f_{2m-1} < f_{2n-1}$, így

$$f_{2n+2} > X = f_{2n+2} - f_{2m} > f_{2n+2} - f_{2n} = f_{2n+1}$$

és

$$f_{2n+1} > Y = f_{2n+1} - f_{2m-1} > f_{2n+1} - f_{2n-1} = f_{2n}$$

azaz X és Y is két szomszédos Fibonacci-szám közé esik, s így nem lehet Fibonacci-szám.

8.2. Egy valószínűségi modell, egy nem mértani sor

8.2.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}\right)=\sum_{L=1}^{\infty}\frac{\binom{2L}{n-1}}{2^{2L+1}}$$

Megoldás. Tekintsük a következő feladatot, és oldjuk meg kétféle módon.

8.2.2. Feladat. Anna és Balázs egy szabályos érmét feldobva játszik. Az nyer, aki az n-edik fejet dobja. Mi a valószínűsége, hogy Anna nyer, ha ő kezdi a játékot?

Irodalomjegyzék

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Bizonyítások a KÖNYVből*, Typotex Kiadó, Budapest, 2007.

[2] Ábrahám Gábor, Dr. Kosztolányiné Nagy Erzsébet, Tóth Julianna, *Matematika 9*, Maxim Könyvkiadó, Szeged, 2009.

[3] Judita Cofman, *Einblicke in der Geschichte der Mathematik I (Aufgaben und Materialen für die Sekundarstufe I)*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, 1999.

[4] Csordás Mihály, Konfár László, Kothencz Jánosné, Kozmáné Jakab Ágnes, Pintér Klára, Vincze Istvánné, *Sokszinű Matematika 5-7*, Szeged, Mozaik Kiadó, 2009.

[5] Dr. Gerőcs László, *Szóbeli érettségi nagykönyv - Matematika*, DFT Hungária Kiadó, Budapest, 2007.

[6] Hajnal Péter, *Kombinatorikai feladatok*, Polygon, **I./1.** (1991), 38-50, Szeged

[7] Hajnal Péter, *Egyenlőségek, oszthatóságok bizonyítása kombinatorikus módszerekkel*, Polygon, **IV./1.** (1994), 27-43, Szeged

[8] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István, *Sokszinű Matematika 9-12*, Szeged, Mozaik Kiadó, 2009.

[9] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin, *Diszkrét matematika*, Budapest, Typotex, 2006.

[10] Máder Attila, *Heads or Tails Gambling - What Can Be Learned about Probability?*, Teaching Mathematics and Computer Science, **6/1** (2008), 15-41, Debrecen

[11] Máder Attila, Matos Zoltán, *Variations autour d une formule*, Au Fil des Mathes, **533**, 2019.

[12] Roger B. Nelsen, *Proof Without Words - Exercies in Visual Thinking*, Washington, The Mathematical Association of America, 1993.

[13] Németh József, *Előadások a végtelen sorokról*, Szeged, Polygon, 2002.

[14] Németh József, Varga Antal, *Az integrálról*, Szeged, Polygon, 2007.

[15] Pintér Lajos, *Analízis I-II. (a gimnázium speciális matematika osztályai számára)*, Budapest, Tankönyvkiadó, 1987.

[16] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Budapest, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., 1999.

[17] Rényi Alfréd, *Napló az információelméletről*, Budapest, Gondolat, 1976.

[18] `http://demonstrations.wolfram.com/PicksTheorem/`

[19] `http://www.oh.gov.hu/`

Máder Attila SZTE, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1,
e-mail: madera@math.u-szeged.hu,
Szalai Máté SZTE, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1,
e-mail: szalaim@math.u-szeged.hu