

A Rubik-kocka és a csoportok koszorúszorzata

HUHN ANDRÁS*

1. Csoportelmélet

1.1. Permutációcsoportok. Legyen H véges halmaz. H -nak önmagára való (szükségképpen egy-egyértelmű) leképezéseit a H halmaz permutációinak nevezzük. A permutáció jelölése történhet úgy, hogy felsoroljuk a H halmaz elemeit, alatta pedig a permutáció melletti képüket. Például

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

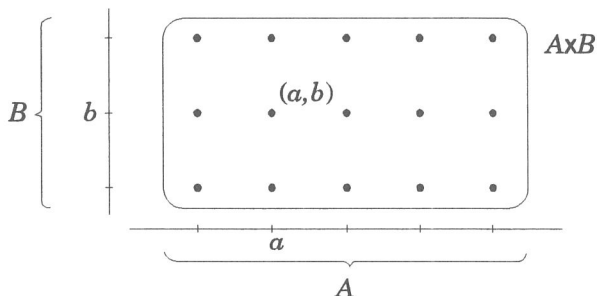
az a permutáció, amely az 1, 2, 3, 4 elemeket rendre a 2, 3, 1, 4 elemekbe viszi. A permutációk mint leképezések szorozhatók, két permutáció szorzatának az egymásutáni végrehajtásuk által keletkező leképezést (ez is permutáció!) nevezzük. A szorzatot olyan sorrendben írjuk, amilyen sorrendben a leképezéseket végrehajtjuk. Egy $h \in H$ elemnek a π permutáció melletti képét $h\pi$ -vel jelöljük. A permutációk szorzása asszociatív, egységelemes és invertálható. Ez utóbbiak azt jelentik, hogy létezik (szükségképpen egy és csak egy) olyan ε permutáció, hogy $\varepsilon\pi = \pi\varepsilon = \pi$ teljesül minden π permutációra, és minden π permutációhoz van (egy és csak egy) olyan π' amelyre $\pi\pi' = \pi'\pi = \varepsilon$. ε -nak az identikus leképezés vehető és veendő, míg π' -nek

* Huhn András (1947–1985) a szegedi Bolyai Intézet docense, a hálóelmélet és az univerzális algebra nemzetközi hírnevű kutatója. Számos algebrai és számelméleti eredménye közül kiemelendő a disztributív háló fogalmának gyümölcsöző általánosítása. Munkásságát a szakirodalomban világszerte gyakran idézik. A hagyatékából előkerült jelen cikk mutatja, hogy az algebra alkotó művelése mellett annak oktatásával és népszerűsítésével is kedvvel, magas színvonalon foglalkozott.

a π inverz leképezése. Egy asszociatív, egységelemes és invertálható szorzással ellátott halmazt csoportnak nevezünk. Amit eddig mondtunk, azt jelenti, hogy a H véges halmaz összes permutációi csoportot alkotnak. Ezt a csoportot S_H -val jelöljük.

Ha S_H egy (valódi vagy nem valódi) részhalmaza is zárt a szorzásra, tartalmazza az egységelemet és minden elemének inverzét, akkor ezt a részhalmazt S_H részcsoporthjának nevezzük. Általában, ha transzformációcsoportokról beszélünk, ezeken valamely S_H részcsoporthjait értjük.

1.2. A koszorúszorzat Legyenek A és B véges halmazok, és jelöljük $A \times B$ -vel azon elempárok halmazát, amelyek első eleme A -ból, második eleme B -ből van: $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ (1. ábra).



1. ábra

Az ábra által sugallt analógia alapján beszélni fogunk $A \times B$ sorairól. Az $\{(a, b) | a \in A\}$ ($b \in B$ rögzített) alakú részhalmazokat nevezzük így. Tekintsük most $A \times B$ azon permutációit, amelyek „megőrzik a sorokat”, abban az értelemben, hogy egy sorban lévő elempárokat egy sorban lévő elempárokbá visznek át. Ha π ilyen permutáció, akkor π -hez természetesen hozzárendelhető B -nek egy permutációja, az a permutáció (jelölje ezt π_B), amely B -nek b_1 elemét akkor és csak akkor viszi b_2 -be, ha π a $(, b_1)$ sor elemeit $(, b_2)$ alakú elemekbe viszi. Továbbá, bárhogy választjuk ki B -nek egy b elemét, π -hez és b -hez tartozik A -nak egy permutációja (jele π^b), amely a_1 -hez akkor és csak akkor rendeli a_2 -t, ha π az (a_1, b) elempárt olyan elempárba viszi, amelynek első eleme a_2 . Ekkor ez az elempár szükségképpen

$(a_2, b\pi_B)$. π_B nyilvánvalóan permutáció. Hogy π^b is az, abból következik, hogy ha valamely $a_1 \neq a_2$ esetén $a_1\pi^b = a_2\pi^b$ lenne, akkor

$$(a_1, b)\pi = (a_1\pi^b, b\pi_B) = (a_2\pi^b, b\pi_B) = (a_2, b)\pi$$

következne, ami ellentmond π egy-egyértelmű voltának.

Mindez lehetővé teszi, hogy definiáljuk két permutációcsoport koszorúszorzatát. Legyen $G \subseteq S_A$, $H \subseteq S_B$ egy-egy permutációcsoportot, Jelölje $G \circ H$ az $S_{A \times B}$ azon π elemeinek halmazát, amelyekre

- (1) π megörzi a sorokat,
- (2) $\pi^b \in G$ minden $b \in B$ esetén, és
- (3) $\pi_B \in H$.

Az 1.4. pontban meg fogjuk mutatni, hogy $G \circ H$ részcsoportha $S_{A \times B}$ -nek. Ezt a részcsoporthot nevezzük G és H koszorúszorzatának.

1.3. Egy példa. Tegyük fel, hogy három (megkülönböztethető) pénzérménk van, és az asztalon három hely van kijelölve az érmék számára. Az érmék két elhelyezését e három helyen csak akkor tekintjük azonosnak, ha a két elhelyezésben az érmék ugyanott állnak, és minden i -re ($i = 1, 2, 3$) az i -edik helyen álló pénzdarabnak ugyanaz az oldala van felül az egyik elhelyezésben, mint a másikban. Az érmék átrendezésében ennek megfelelően egy olyan utasítást értünk, amely bármely elhelyezésből egy másikat hoz létre, azáltal, hogy minden i -re megadja, hogy az i -edik helyen álló pénzdarab melyik helyre kerül, és hogy az a fele kerül-e felülre, amelyik eddig felül volt, vagy a másik. Így az átrendezések olyan leképezések, amelyek a lehetséges elhelyezések halmazát önmagába képezik le, de definíciójuknál fogva jellemezhetők mint a

$$\{ \text{fent, lent} \} \times \{ \text{első hely, második hely, harmadik hely} \} = \\ = \left\{ \begin{array}{cc} (\text{fent, első hely}) & (\text{lent, első hely}) \\ (\text{fent, második hely}), & (\text{lent, második hely}) \\ (\text{fent, harmadik hely}), & (\text{lent, harmadik hely}) \end{array} \right\}$$

halmaz bizonyos permutációi, és nyilvánvalóan éppen azok a permutációk veendők tekintetbe, amelyek megőrzik a sorokat. Erre a példára később még visszatérünk.

1.4. Egy bizonyítás. Tartozunk annak bizonyításával, hogy az (1), (2), (3) feltételekkel definiált $G \circ H$ részcsoportha $S_{A \times B}$ -nek. Tegyük fel, hogy π és ϱ eleget tesz az (1), (2), (3) feltételnek. $\pi \cdot \varrho$ nyilván eleget tesz (1)-nek. (3) bizonyításához észrevevesszük, hogy $b_1(\pi\varrho)_B = b_2$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\pi\varrho$ a $(\sim, b_1)$ alakú elemeket $(\sim, b_2)$ alakúba viszi, azaz ha van olyan $b \in B$, hogy a $(\sim, b_1)$ alakú elemek π szerinti képei $(\sim, b)$ alakúak, ezek ϱ szerinti képei pedig $(\sim, b_2)$ alakúak. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $b_1\pi_B = b$ és $b\varrho_B = b_2$, azaz $b_1\pi_B\varrho_B = b_2$. Innen $(\pi\varrho)_B = \pi_B\varrho_B$, ez utóbbiak pedig H -ban vannak. (2) bizonyítása hasonló, csak azt kell észrevennünk, hogy $(\pi\varrho)^b = \pi^b\varrho^{b\pi_B}$. Analóg megfontolásokkal következik, hogy π -vel együtt π' (az inverz leképezés) is eleget tesz (1), (2), (3)-nak, és ugyanez nyilvánvaló az identikus leképezésre.

1.5. Még egyszer az előbbi példáról. Ezen a ponton jogos az ellenvetés, hogy bár megmutattuk, hogy az érmék átrendezései azonosíthatók egy koszorúszorzat elemeivel, mégis az átrendezések az érmék összes lehetséges elhelyezései halmazának önmagában való leképezései, és nagyon is elképzelhető, hogy az átrendezések egymásutáni végrehajtása már nem felel meg a hozzájuk tartozó koszorúszorzatbeli permutációk egymásutáni végrehajtásának. Ha így lenne, az átrendezések összessége nem lenne a koszorúszorzat elfogadható példája. Erre a következőt válaszolhatjuk. Az érmék egy elhelyezése is leképezés. Ha a pénzérméink egy egyforintos, egy kétforintos és egy ötforintos, akkor az elhelyezések a

$$\{ \text{fej, írás} \} \times \{ 1\text{Ft}, 2\text{Ft}, 5\text{Ft} \}$$

halmaznak egy-egyértelmű leképezései a

$$\{ \text{lent, fent} \} \times \{ 1. \text{ hely}, 2. \text{ hely}, 3. \text{ hely} \}$$

halmazba. Mármint az átrendezés általunk adott definíciójából következik, hogy ha ϕ egy elhelyezés, π eleme az 1.3. alatti koszorúszorzatnak és σ_π (tetszőleges π -re) a π -hez tartozó átrendezés, akkor az az elhelyezés (ezt $\phi\sigma_\pi$ -vel jelöljük), amelyet a σ_π átrendezés ϕ -ből létrehoz, éppen $\phi\pi$, a ϕ és π leképezések szorzata. Ha most ϱ a koszorúszorzat egy másik eleme, akkor a leképezés-szorzás asszociativitása folytán

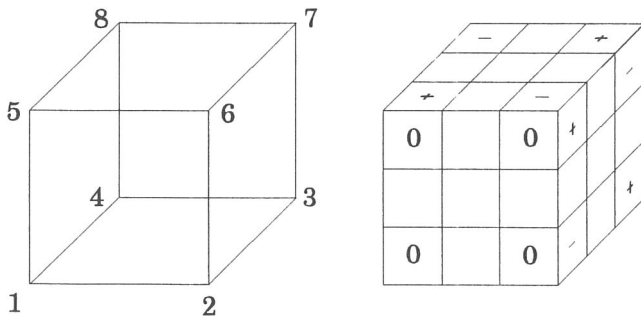
$$\phi(\sigma_\pi\sigma_\varrho) = (\phi\sigma_\pi)\sigma_\varrho = (\phi\pi)\varrho = \phi(\pi\varrho) = \phi\sigma_{\pi\varrho},$$

azaz az átrendezések szorzása megfelel a koszorúszorzatbeli szorzásnak.

2. A bűvös kocka csúcsai

2.1. Az átrendezések csoportja. Tekintsük most az élidomok nélküli bűvös kockát, vagy másként azt a bűvös kockát, amelyen az élközepeken lévő minden kiskocka mindkét oldala fekete papírral van leragasztva. A kocka egy szétszedését majd ezt követő összerakását nevezzük a kocka egy átrendezésének. A lapközepek helye azonban egyszemindenkorra rögzített, tehát mindig ugyanaz a lap fog felfelé illetve felénk nézni. Az eddigiek alapján könnyű lesz megmutatni, hogy az átrendezések csoportot alkotnak és leírni ezt a csoportot.

Számozzuk meg a bűvös kocka csúcsait, helyesebben azokat a helyeket, ahol a csúcsok vannak 1-től 8-ig, ahogy a 2. ábrán látható, és állapodjunk meg abban, hogy a kocka átrendezéseikor a számok ne vándoroljanak együtt a csúcsokkal, hanem maradjanak rögzítve.



2. ábra

Írjunk 0-kat a szemközti és a túlsó lapra a csúcsokhoz, és írjunk a többi lapokra a csúcsokhoz + és - jeleket úgy, hogy a 0, +, - jelek minden csúcs körül pozitív forgásirányban következzenek egymásra. Mint az előbb, ezek a jelek se mozduljanak el, ha a csúcsokat átrendezzük. Hasonlóan a pénzdarabok esetéhez a kocka egy átrendezését is jellemzi az az utasítás, amely minden i -re megadja, hogy az i -edik helyen lévő csúcs melyik helyre

kerül, továbbá, hogy a csúcson a $0, +, -$ pozícióban lévő oldalai rendre a $0, +, -$ pozíciók melyikébe kerülnek. Álljon G a következő permutációkból:

$$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ 0 & + & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & + & - \\ + & - & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix},$$

és legyen H az $\{1, 2, \dots, 8\}$ halmaz összes permutációinak halmaza. Ekkor az átrendezések csoportja leírható, mint a G és H csoportok $G \circ H$ koszorúszorzata. Valóban, a bizonyítás pontos másolata az 1.3 és 1.5 pontokban szereplőnek, azzal kell kiegészítenünk, hogy minden $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ esetén $\pi^i \in G$, ha π a koszorúszorzatnak átrendezéshez tartozó eleme*, ez pedig abból következik, hogy a kocka átrendezéseikor a csúcsokon a színek körüljárási iránya változatlan marad.

2.2. A forgáscsoport. Megengedett átrendezésnek azokat az átrendezéseket nevezzük, amelyek a kocka szétszedése nélkül megvalósíthatók. Ezek nyilván csoportot alkotnak. Ezt a csoportot fogjuk az (egyelőre élidomok nélküli) kocka forgáscsoportjának nevezni. Mostantól az átrendezéseket azonosítjuk $G \circ H$ megfelelő elemeivel. Megmutatjuk, hogy a forgáscsoport $G \circ H$ azon π elemeiből áll, amelyekre

$$(4) \quad \pi^1 \cdot \pi^2 \cdot \dots \cdot \pi^8 = \varepsilon,$$

az identikus permutáció. Ebben a pontban azt igazoljuk, hogy a forgáscsoport elemei mind eleget tesznek a (4) feltételnek.

Nézzük először a jobboldali réteg negyedfordulattal előre való elfordítását. Ha a fixen maradó csúcsokat nem írjuk ki, ezt az átrendezést a következő permutáció írja le:

$$\pi = \begin{pmatrix} (0, 2) (+, 2) (-, 2) (0, 6) (+, 6) (-, 6) (0, 7) (+, 7) (-, 7) (0, 3) (+, 3) (-, 3) \\ (-, 6) (0, 6) (+, 6) (+, 7) (-, 7) (0, 7) (-, 3) (0, 3) (+, 3) (+, 2) (-, 2) (0, 2) \end{pmatrix}$$

és már $\pi^2 \pi^6 = \pi^3 \pi^7 = \varepsilon$, ahonnan (észrevéve, hogy G kommutatív) $\pi^1 \pi^2 \dots \pi^8 = \varepsilon$. A többi rétegek negyedfordulattal való elfordítására a bizonyítás hasonló.

* π^i persze az eddigiekhez hasonlóan most sem hatványozást jelöl.

Most megmutatjuk, hogy ha π és ϱ egyaránt eleget tesz (4)-nek, akkor $\pi\varrho$ is eleget tesz (4)-nek. Valóban, a $B = \{1, 2, \dots, 8\}$ jelöléssel

$$\begin{aligned} (\pi\varrho)^1(\pi\varrho)^2 \dots (\pi\varrho)^8 &= (\pi^1\varrho^{1\pi_B})(\pi^2\varrho^{2\pi_B}) \dots (\pi^8\varrho^{8\pi_B}) = \\ &= (\pi^1\pi^2 \dots \pi^8)(\varrho^{1\pi_B}\varrho^{2\pi_B} \dots \varrho^{8\pi_B}) = \\ &= (\pi^1\pi^2 \dots \pi^8)(\varrho^1\varrho^2 \dots \varrho^8) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Mivel minden megengedett átrendezés negyedfordulatok egymásutánja, a bizonyítás kész.

2.3. A bizonyítás befejezése. Először is vegyük észre, hogy

$$\begin{pmatrix} (0, 1) & (+, 1) & (-, 1) & (0, 2) & (+, 2) & (-, 2) \\ (0, 2) & (+, 2) & (-, 2) & (0, 1) & (+, 1) & (-, 1) \end{pmatrix}$$

megengedett átrendezés. Erről a legkönnyebben úgy győződhetünk meg, hogy szétszedjük a kockát, végrehajtjuk ezt az átrendezést, majd megpróbáljuk, mostmár szétszedés nélkül, rendezni a csúcsoakat. Bármely rendezési algoritmussal sikerülni fog. Persze az élek nem mennek a helyükre. Ha feljegyezzük a rendezés lépéseit, akkor azokat visszafelé végrehajtva épp a kívánt átrendezést kapjuk. Ugyanígy látható be, hogy a

$$\begin{pmatrix} (0, 1) & (+, 1) & (-, 1) & (0, 2) & (+, 2) & (-, 2) \\ (+, 1) & (-, 1) & (0, 1) & (-, 2) & (0, 2) & (+, 2) \end{pmatrix}$$

átrendezés megengedett. Ebből már következik, hogy bármely két csúcscicserélhető, azaz a csúcsoakat bármely átrendezése megvalósítható megengedett módon, méghozzá úgy, hogy a csúcsoakat forgásállapota, azaz oldalainak a 0, +, - pozíciókban való elhelyezkedése változatlan marad. Az is következik továbbá, hogy a csúcsoakat helybenhagyva megtehetjük, hogy két kiszemelt csúcscicserélhető irányban változtatjuk.

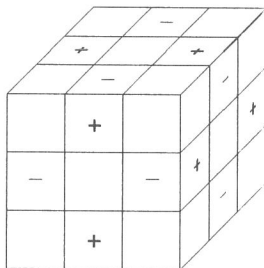
Tekintsünk most egy a (4)-nek eleget tevő π permutációt. Elő fogjuk állítani π -t megengedett átrendezéssel. Vigyük először egy ϱ permutációval a csúcsoakat a (π szerinti) helyükre. Ekkor $\varrho_B = \pi_B$. Állítsuk be az első csúcsoat π szerinti forgásállapotába, úgy hogy közben a nyolcadik csúcsoat ellenkező irányban forgatjuk, majd tegyük ugyanezt a második, harmadik

..., hetedik csúcsokkal, a forgatást mindig a nyolcadik csúcson kompenzálva. Jelölje ϱ és ezen forgatások egymásutóját τ . Akkor $\tau_B = \pi_B$, $\tau^1 = \pi^1$, $\tau^2 = \pi^2$, ..., $\tau^7 = \pi^7$. Továbbá

$$(\tau^1 \dots \tau^7) \tau^8 = \varepsilon = (\pi^1 \dots \pi^7) \pi^8.$$

Ezt balról szorozva $\tau^1 \dots \tau^7$ inverzével és felhasználva a már bizonyított $\pi^i = \tau^i$, $i = 1, 2, \dots, 7$ egyenlőségeket és a G kommutativitását, azt kapjuk, hogy $\tau^8 = \pi^8$. De τ_B és a τ^i komponensek egyértelműen meghatározzák τ -t, így τ csakis π lehet. π tehát egy megengedett átrendezés.

2.4. Feladat. Tekintsük a csúcsidomok nélküli bővös kockát. Számozzuk meg valahogy az éleket 1-től 12-ig, és írjunk $+$ és $-$ jeleket az élidomok oldalaira, a jelek elhelyezését a nem látható oldalakon is folytatva, ahogy a 3. ábrán tettük.



3. ábra

Ezt felhasználva bizonyítsuk be, hogy a csúcsidomok nélküli kocka forgáscsoportja

$$S_{\{+,-\}} \circ S_{\{1,2,\dots,12\}}$$

azon π elemeiből áll, amelyekre $\pi^1 \pi^2 \dots \pi^{12} = \varepsilon$.

3. Csúcsok és élek

3.1. Páros és páratlan permutációk. Könnyű ellenőrizni, hogy bármely permutáció előállítható olyan permutációk, úgynevezett transzpozíciók szorzataként, amelyek csak két elemet mozgatnak, és ezt a két elemet egymásba viszik. Az $\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix}$ transzpozíciót egyszerűbben így is jelöljük: $(i \ j)$. Megmutatjuk, hogy ha egy permutáció előáll páros számú transzpozíció szorzataként, akkor nem állítható elő páratlan számú transzpozíció szorzataként és viszont. Tegyük fel, hogy nem így van,

$$\pi = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{2k} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{2l+1}.$$

Akkor jobbról szorozva egymásután $\sigma_{2l+1}, \dots, \sigma_2, \sigma_1$ -gyel, a jobb oldalon az identikus permutációt kapjuk, a bal oldalon páratlan számú transzpozíció szorzatát:

$$(5) \quad \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{2m+1} = \varepsilon.$$

Tegyük fel, hogy az ε páratlan számú tényező előállításai között az (5) előállítás már olyan, hogy a benne szereplő ϱ_s transzpozíciók által mozgatott elemek száma a lehető legkisebb. Legyen i a ϱ_s -ek által mozgatott elemek egyike. Könnyen ellenőrizhető, hogy érvényesek a következő szabályok:

- (a) $(k \ l) (i \ j) = (i \ j) (k \ l)$
- (b) $(j \ k) (i \ j) = (i \ k) (j \ k)$
- (c) $(i \ k) (i \ j) = (i \ j) (j \ k)$
- (d) $(i \ j) (i \ j) = \varepsilon.$

Ezek alkalmazásával (5) átalakítható úgy, hogy legfeljebb az első tényezőben szerepel i . De ha ott szerepel, akkor az első tényező által mozgatott másik elem i -be megy át, a többi tényező pedig ezt az elemet onnan már nem mozdtja el, ami ellentmond a szorzat identikus voltának. Így i egyáltalán nem szerepel az ε új szorzat-előállításában, és ez az előállítás is páratlan számú tényezőt tartalmaz, mert (a)-(d) nem változtatja meg a tényezők számának párosságát. Ez ellentmond annak, hogy a ϱ_s -ek által mozgatott elemek száma minimális volt.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a π permutáció transzpozíciók szorzataként való előállításában szereplő tényezők számának párossága csak a π permutációtól függ, az előállítástól független. Ha ez a szám páros, akkor a π permutációt párosnak, egyébként páratlannak nevezzük.

3.2. A direkt szorzat. Legyen az A és B véges halmazok közös része, $A \cap B$ az üres halmaz. Jelölje $S_A \times S_B$ az $A \cup B$ egyesítési halmaz azon permutációinak halmazát, amelyek A (és hasonlóan B) elemeit egymás között permutálják. Ha $\pi \in S_A \times S_B$, akkor legyen π_A (illetve π_B) a π megszorítása A -ra (illetve B -re). Használni fogjuk a $\pi = \pi_A \times \pi_B$ jelölést is. Legyenek $G \subseteq S_A$, $H \subseteq S_B$ részcsoportok. G és H direkt szorzatán (jele $G \times H$) azon $\pi \in S_{A \cup B}$ permutációk csoportját értjük, amelyekre

$$(6) \quad \pi \in S_A \times S_B,$$

$$(7) \quad \pi_A \in G,$$

$$(8) \quad \pi_B \in H.$$

3.3. Feladat. Ne különböztessük most meg a bűvös kocka két állapotát, ha az azonos színű lapokkal fedett él- és sarokkockák (esetleg egymáshoz képest elforgatva) ugyanazon a helyen vannak. Bizonyítsuk be, hogy a kocka forgáscsoportja ekkor az $S_8 \times S_{12}$ -be tartozó páros permutációkból áll. (Itt és ezentúl S_i jelöli az $S_{\{1,2,\dots,i\}}$ csoportot és A_i jelöli az S_i -beli páros permutációk csoportját).

Útmutatás. Vegyük észre, hogy bármely réteg negyedfordulattal való elforgatása páratlanul permutálja az éleket egymás között és páratlanul permutálja a csúcsokat, összességében tehát páros. Vegyük észre, hogy végrehajtható két élpár cseréje (feltehető, hogy ezek szemközti lapon vannak, a többi eset erre visszavezethető). Ugyanez érvényes két csúcspár és egy élpár, egy csúcspár cseréjére. Végül vegyük észre, hogy ilyenekből minden páros permutáció előáll.

3.4. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a (teljes) bűvös kocka forgáscsoportja az

$$(A_3 \circ S_8) \times (S_2 \circ S_{12})$$

csoport azon $\pi = \varrho \times \sigma$ ($\varrho \in A_3 \circ S_8, \sigma \in S_2 \circ S_{12}$) elemeiből áll, amelyekre

$$(9) \quad \varrho^1 \varrho^2 \dots \varrho^8 = \varepsilon$$

$$(10) \quad \sigma^1 \sigma^2 \dots \sigma^{12} = \varepsilon$$

$$(11) \quad \varrho_{S_8} \text{ és } \sigma_{S_{12}} \text{ párossága megegyezik.}$$

3.5. Feladat. Használjuk fel a 3.4. feladat eredményét a bűvös kocka állapottai számának meghatározására.

Útmutatás. $A_3 \circ S_8$ elemei egy-egyértelmű kapcsolatban vannak a $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_8)$ kilenceseikkel ($\varrho \in S_8, \varrho_i \in A_3$), ezek száma $3^8 \cdot 8!$, ám a (9) feltétel ezeknek csak harmadrészét engedi meg. Figyelembe véve (10)-et és (11)-et is, az állapotok száma $\frac{1}{12} \cdot 3^8 \cdot 2^{12} \cdot 8! \cdot 12!$.

IRODALOM

- [1] Neumann, Peter M., The group theory of the Hungarian magic cube, Chapter 19, pp. 299-307 in: P.M. Neumann—G.A. Stoy—E.C. Thompson Groups and Geometry, Lecture Notes, Math. Institute 24-29 St. Giles, Oxford, OX1 3LB, UK.