

## Racionális, algebrai és transzcendens hatványokról

MAKAY GÉZA

Amikor analízis témájú órát tartok, akkor az exponenciális függvényt a következőképpen szoktam definiálni. Legyen  $a > 0$  valós szám az exponenciális függvény alapja. Ekkor

1.  $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  az  $a$  pozitív egész kitevős hatványa, ahol a jobb oldalon  $n$  tényező van.
2.  $a^0 = 1$ .
3.  $a^{-n} = 1/a^n$ .
4.  $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$  az  $x^n$  függvény inverzéből.
5.  $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ , ahol  $p, q$  egész számok és  $q > 0$ .
6. Az így definiált racionális számokon értelmezett exponenciális függvény monoton, így minden irracionális helyen van bal- és jobboldali határértéke is, és belátható, hogy azok egyenlőek. Irracionális helyeken legyen az exponenciális függvény értéke ez a határérték.

A definícióból és a levezetésből egyúttal az is következik, hogy az exponenciális függvény folytonos. Példaként, érdekességként meg szoktam mutatni, hogy van olyan irracionális szám, amelynek irracionális kitevős hatványa racionális. Amikor az embert megkérlik, hogy mondjon egy irracionális számot, akkor elsőnek a  $\sqrt{2}$  szokott beugrani, hát használjuk ezt. Ha a  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  racionális szám, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor ezt, mint irracionális számot  $\sqrt{2}$  hatványra emelve az eredmény

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

ami racionális szám, és készen vagyunk.

Ez egy egyszerű levezetés, könnyen érthető akár középiskolás szinten is, de nem ad meg egy konkrét példát. Egy másik ötlettel bebizonyítható, hogy ha a kitevő irracionális (az alap lehet racionális vagy irracionális), akkor van olyan példa, amire

az eredmény irracionális. Valóban: az irracionális számok száma kontinuum, és ha az alap nem 0 vagy 1, akkor az exponenciális függvény szigorú monotonitásából következik, hogy kontinuum sok különböző eredményt kapunk, ha az összes irracionális kitevőt behelyettesítjük. Mivel a racionális számok száma megszámlálható, az eredmények között kell legyen irracionális is. De persze ez sem konstruktív bizonyítás. Hogy racionális szám irracionális kitevőn lehet-e racionális, arról egyik fenti módszerrel sem tudunk meggyőződni, bonyolultnak tűnik.

Egyik órámra készülve elgondolkodtam azon, hogy meg lehetne-e adni egy konkrét példát is a fenti esetekre. A fő probléma ezzel az, hogy mivel az irracionális kitevős hatvány egy (az  $a = 1$  esetet kivéve) szigorúan monoton függvény határértékeként van megadva, semmi esély nincs rá, hogy megmondjuk, hogy az a határérték racionális vagy irracionális lesz. Ezért (mivel a kitevővel van baj) fordítottam egyet a dolgon: legyen adott az alap (pl. egy irracionális szám) és az eredmény (pl. egy racionális szám), és ellenőrizzük le, hogy a kitevő irracionális-e. Vagyis egy  $a^x = b$  alakú egyenletet kellene megoldanunk ismert  $a, b > 0, a \neq 1$  számok esetén. A megoldás persze egyszerű:  $x = \log_a b$ . Vagyis olyan irracionális  $a$  és racionális  $b$  számokat kellene keresnünk, amire  $\log_a b$  irracionális. A "szokásos" irracionális számunkból kiindulva legyen  $a = \sqrt{2}$ , és hogy a logaritmus ne legyen racionális, vegyük az első olyan pozitív egész számot, amire van esélyünk, hogy ne legyen az, ez pedig a  $b = 3$ . Tegyük fel, hogy a logaritmus mégis racionális, és nézzük meg, mire jutunk ebből a feltevésből:

$$\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}^{\frac{p}{q}} = 3 \Rightarrow 2^p = 3^{2q}$$

Ez nyilván nem lehetséges, hiszen a baloldali egész számban csak 2-es, a jobboldaliban csak 3-as prímtényezők vannak. Így kaptunk egy konkrét példát, amelyben egy irracionális szám irracionális kitevős hatványa racionális:

$$\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3$$

Ezen felbuzdulva, megpróbáltam konkrét példát adni az összes lehetséges esetre: az alap, a kitevő és az eredmény is lehet racionális, vagy irracionális. A racionális kitevőkkel nincs is különösebb probléma, hiszen azokat régebb óta ismerjük, sokkal otthonosabban mozgunk a köreikben. Az irracionális kitevőkre pedig a fentiek alapján szerkeszthetünk példákat. Ekkor a következő táblázathoz juthatunk (itt

rac.=racionális, irrac.=irracionalis):

| alap   | kitevő | eredmény | példa                                            |
|--------|--------|----------|--------------------------------------------------|
| rac.   | rac.   | rac.     | $2^2 = 4$                                        |
| rac.   | rac.   | irrac.   | $2^{1/2} = \sqrt{2}$                             |
| irrac. | rac.   | rac.     | $\sqrt{2}^2 = 2$                                 |
| irrac. | rac.   | irrac.   | $(\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$                     |
| rac.   | irrac. | rac.     | $2^{\log_2 3} = 3$                               |
| rac.   | irrac. | irrac.   | $2^{\log_2 \sqrt{3}} = \sqrt{3}$                 |
| irrac. | irrac. | rac.     | $\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3$               |
| irrac. | irrac. | irrac.   | $\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}} = \sqrt{3}$ |

Vegyük észre, hogy a táblázatban szereplő logaritmusokról nem kell egyesével belátnunk, hogy mindegyik irracionális: mivel egymás racionális számszorosai, ezért az egyik irracionalitásából (amit már beláttunk) következik a többié is:

$$\log_2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log_2 3 \quad \log_{\sqrt{2}} 3 = 2 \log_2 3 \quad \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \log_2 3$$

Hát ez gyönyörű: minden esetre tudtunk példát hozni. De gondoljuk tovább egy kicsit a dolgot. A racionális számok, mint két egész szám hányadosai, tekinthetők elsőfokú, egész együtthatós polinomok gyökeinek. Lépünk túl ezen, és tekintsük az (akárhányad fokú) egész együtthatós polinomok gyökeit. Ezeket algebrai számoknak hívjuk, például a  $\sqrt{2}$  is az, mert az  $x^2 - 2$  polinom gyöke. Ha ilyen számokat kívánunk hatványozni, akkor tudnunk kellene, hogy például racionális és irracionális kitevős hatványaik milyenek.

Amikor racionális vagy valós számokról beszélünk, akkor igazából számtestekről beszélünk: ezek zártak az alapműveletekre, az összeadásra, kivonásra, szorzásra és osztásra. Vajon az algebrai számok is számtestet alkotnak? Vizsgáljuk meg a kérdést.

Érdekes módon, a legbonyolultabb esetet könnyű megválaszolni.

**Állítás.** *Ha a egy algebrai szám, akkor a reciproka is az.*

**Bizonyítás.** Valóban, ha az  $a$  szám a

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$n$ -edfokú polinom gyöke, akkor a

$$q(y) = y^n p\left(\frac{1}{y}\right) = a_n + a_{n-1} y + \dots + a_1 y^{n-1} + a_0 y^n$$

is polinom, és az  $\frac{1}{a}$  gyöke lesz, mert  $0 = p(a) = a^n q(\frac{1}{a})$ .

Egyszerű még a különbség esete is.

**Állítás.** *Ha  $a$  egy algebrai szám, akkor  $-a$  is az.*

**Bizonyítás.** Ha az  $a$  szám a  $p(x)$  polinom gyöke, akkor a  $-a$  gyöke lesz a  $p(-x)$  polinomnak.

Az összegre és a szorzatra való zártág bizonyításához komolyabb eszközökhöz kell nyúlnunk.

Először is vegyük észre, hogy ha egy egész együtthatós polinomot végigosztunk a főegyütthatóval, akkor racionális együtthatós polinomot kapunk, illetve ha egy racionális együtthatós polinomot megszorozzuk az együtthatók nevezőinek legkisebb közös többszörösével, akkor egész együtthatós polinomra jutunk. Eközben persze a polinomok gyökei nem változnak. Ebből következik, hogy az algebrai szám definíciójában mondhattuk volna azt is, hogy azok a racionális együtthatós polinomok gyökei. De mehetünk akár egy még általánosabb definíció irányába tovább.

**Állítás.** *Az algebrai számok a racionális elemekkel rendelkező négyzetes mátrixok sajátértékei.*

**Bizonyítás.** Ha  $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  egy négyzetes mátrix, akkor a sajátértékek a  $\det(A - \lambda I) = 0$  egyenlet megoldásai ( $I$  az  $n \times n$ -es egységmátrix), és így a determináns egy racionális együtthatós polinomja lesz  $\lambda$ -nak. De ez csak a bizonyítás egyik iránya, be kellene még látnunk, hogy minden racionális együttható polinom előáll ilyen determináns alakban.

Racionális együtthatós polinomnál mindig elérhető, hogy a főegyüttható 1 legyen: egyszerűen leosztunk a főegyütthatóval. Ezek szerint egy ilyen alakú polinomunk van:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

ahol  $a_i \in \mathbb{Q}$ . Az ehhez tartozó ún. Frobenius-mátrix ([1]) a következő alakban áll elő:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ha kifejtjük a  $\det(A - \lambda I)$  determinánst az első oszlop szerint, akkor a következőt

kapjuk:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$- \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ebből az első determináns egy teljes indukciós bizonyítással

$$(-1)^{n-1}(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1)$$

alakú, míg a második determinánst az első sor szerint kifejtve a  $(-1)^n a_0$  számot kapjuk, így a fenti kifejezés kiadja a

$$(-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$$

polinomot, amivel beláttuk az állítást.

A Frobenius-mátrixok segítségével már be fogjuk tudni látni az algebrai számok összeadásra és szorzásra való zártságát. Ehhez szükségünk van egy  $\otimes$  jellel jelzett műveletre, amit a következőképpen definiálunk. Ha  $A = (a_{ij})$  egy  $n \times n$ -es, és  $B = (b_{kl})$  egy  $m \times m$ -es mátrix, akkor az  $A \otimes B$  mátrix  $(mn) \times (mn)$ -es,  $n \times n$  darab  $m \times m$ -es blokkból áll elő így:

$$(a_{ij} \cdot B)_{i,j=1}^n$$

Az  $\otimes$  műveletet értelmezhetjük egy  $n$  dimenziós  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  és egy  $m$  dimenziós  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  vektor esetén is, az egy  $nm$  dimenziós vektor lesz a következő alakban:

$$v \otimes w = (v_1 \cdot w, v_2 \cdot w, \dots, v_n \cdot w)$$

Legyen most az  $a$  algebrai szám az  $A$  mátrix sajátértéke a  $v$  sajátvektorral, a  $b$  algebrai szám pedig a  $B$  mátrix sajátértéke a  $w$  sajátvektorral, vagyis

$$A \cdot v = a \cdot v \quad \text{és} \quad B \cdot w = b \cdot w$$

Számoljunk egy kicsit. Ha az  $(A \otimes B) \cdot (v \otimes w)$  szorzatban blokkonként végezzük el a műveleteket először, akkor a  $B$  mátrix  $a_{ij}$ -szereseit szorozzuk a  $w$  vektor  $v_j$ -szereseivel. Ezekből a szorzatokból a  $w$  vektor  $b \cdot a_{ij} \cdot v_j$ -szereseit kapjuk, hiszen a  $w$  vektor a  $B$  mátrix sajátvektora a  $b$  sajátértékkel. Ez utóbbi két tényezőt összeadva  $j$ -re és a műveletet végrehajtva  $i = 1, 2, \dots, n$ -re megkapjuk a  $v$  vektor  $a$ -szorosát, vagyis összességében a  $v \otimes w$  vektor  $ab$ -szeresét. Ezek szerint az  $A \otimes B$  mátrixnak a  $v \otimes w$  vektor sajátvektora az  $ab$  sajátértékkel, így  $ab$  algebrai szám. Az alábbi számolás ezeket a lépéseket végzi el:

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1w \\ \vdots \\ v_nw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}v_jBw \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}v_jBw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Av)_1bw \\ \vdots \\ (Av)_nbw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1bw \\ \vdots \\ av_nbw \end{pmatrix}$$

ami pontosan az  $ab(v \otimes w)$  vektor.

Egy hasonló számolással az is belátható, hogy az  $a + b$  is algebrai. Vegyük most az  $(A \otimes I_m) + (I_n \otimes B)$  mátrixot, ahol  $I_k$  a  $k$  dimenziós egységmátrix. Ennek a fenti jelölésekkel a  $v \otimes w$  vektor sajátvektora lesz  $a + b$  sajátértékkel:

$$(A \otimes I_m)(v \otimes w) = \begin{pmatrix} a_{11}I_m & \dots & a_{1n}I_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}I_m & \dots & a_{nn}I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1w \\ \vdots \\ v_nw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Av)_1w \\ \vdots \\ (Av)_nw \end{pmatrix} = a(v \otimes w)$$

és

$$(I_n \otimes B)(v \otimes w) = \begin{pmatrix} B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1w \\ \vdots \\ v_nw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1bw \\ \vdots \\ v_nbw \end{pmatrix} = b(v \otimes w)$$

Összeadva a kettőt kapjuk, hogy

$$((A \otimes I_m) + (I_n \otimes B))(v \otimes w) = (a + b)(v \otimes w)$$

Vagyis az algebrai számok valóban testet alkotnak.

De minket leginkább a hatványozás érdekel. Eszerint algebrai számok egész kitevős hatványai is algebraiak, ha felhasználjuk a szorzásra és a reciprokképzésre való zárttságot. De minket nem csak egész kitevős hatvány érdekelne, hanem racionális, algebrai, sőt nem algebrai (vagyis transzcendens) kitevő is. Menjünk sorban. Megint egy érdekes dolog, hogy a racionális kitevős hatvány esete egyszerű. Mindez azon múlik, hogy a polinomjainkban (nem feltétlenül lineáris) változó transzformációkat végrehajtva azok inverzei jelennek meg a gyökökben, mint a reciprok és a negált esetben is, csak ott esetleg ez nem volt annyira feltűnő.

**Állítás.** *Ha  $a$  egy algebrai szám, akkor  $\sqrt[n]{a}$  is ( $n$  pozitív egész).*

**Bizonyítás.** Ha az  $a$  szám a  $p(x)$  polinom gyöke, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy a  $p(x^n)$  is polinom lesz, és az  $\sqrt[n]{a}$  gyöke lesz.

Ezek alapján kimondhatjuk, hogy algebrai számok racionális kitevős hatványai is algebraiak.

Most tekintsük az algebrai számok algebrai (de nem racionális) kitevős hatványait. Amikor először belefutottam ebbe a kérdésbe, nem okozott különösebb meglepetést, hogy nem egyszerű dologról van szó. Olyannyira nem, hogy ez volt Hilbert 1900-ban a II. Nemzetközi Matematikai Kongresszuson Párizsban felvetett problémái közül a hetedik ([2]), ami így szólt:

*Ha  $a$  0-tól és 1-től különböző algebrai szám,  $b$  pedig irracionális algebrai szám, akkor  $a^b$  transzcendens.*

Ezt az állítást Gelfond ([3]), és tőle függetlenül Schneider ([4]) bizonyította be, ma Gelfond-Schneider-tételnek ismerjük. A bizonyítás nem egyszerű, messze túlmutat ennek a cikknek a keretein. De ebből például következik, hogy a  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  szám (amit a cikk elején emlegettünk) nemhogy irracionális, hanem még transzcendens is.

Térjünk vissza az eredeti célunkhoz, ami most már az, hogy megvizsgáljuk, és ha lehet példát adjunk olyan hatványokra, ahol az alap, a kitevő és az eredmény lehet racionális, irracionális algebrai, illetve transzcendens (27 eset). Nyilván nem triviális példákat szeretnénk adni, tehát a "transzcendens a racionális hatványon transzcendens" esetre lehetne példa a

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^1$$

mint ahogy a "racionális a transzcendens hatványon racionális"-ra is lehetne példa az

$$1^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}$$

de ezeket triviálisnak tekintjük. Vagyis olyan példákat szeretnénk látni (ha vannak), amelyekben sem az alap, sem a kitevő nem 0 és nem 1.

Ugyanazt az ötletet próbáljuk meg továbbvinni, mint fent: legyen az alap és az eredmény adott, és a kitevőről bizonyítjuk be, amit be kell bizonyítanunk. Vagyis továbbra is az  $\log_a b$  alakú számokat kell vizsgálnunk, de most már általánosabb esetben, amikor  $a$  és  $b$  akár algebrai számok is lehetnek. Ezzel kapcsolatos a következő

**Állítás.** *Ha  $a$  és  $b$  algebrai számok, akkor  $\log_a b$  racionális vagy transzcendens.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy  $\log_a b$  algebrai szám. Ekkor ha ez a szám irracionális, akkor a Gelfond-Schneider-tétel szerint

$$a^{\log_a b} = b$$

transzcendens kellene legyen, ami ellentmondás, vagyis ha  $\log_a b$  algebrai, akkor csak racionális lehet.

| alap  | kitevő | eredmény | példa                                                            | megjegyzés |
|-------|--------|----------|------------------------------------------------------------------|------------|
| rac.  | rac.   | rac.     | $2^2 = 4$                                                        |            |
| rac.  | rac.   | alg.     | $2^{1/2} = \sqrt{2}$                                             |            |
| rac.  | rac.   | tran.    | —                                                                | (1)        |
| rac.  | alg.   | rac.     | —                                                                | (2)        |
| rac.  | alg.   | alg.     | —                                                                | (2)        |
| rac.  | alg.   | tran.    | $2^{\sqrt{2}}$                                                   | (3)        |
| rac.  | tran.  | rac.     | $2^{\log_2 3} = 3$                                               |            |
| rac.  | tran.  | alg.     | $2^{\log_2 \sqrt{3}} = \sqrt{3}$                                 |            |
| rac.  | tran.  | tran.    | $2^{\sqrt{2} \log_2 3} = 3^{\sqrt{2}}$                           |            |
| alg.  | rac.   | rac.     | $\sqrt{2}^2 = 2$                                                 |            |
| alg.  | rac.   | alg.     | $(\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$                                     |            |
| alg.  | rac.   | tran.    | —                                                                | (1)        |
| alg.  | alg.   | rac.     | —                                                                | (2)        |
| alg.  | alg.   | alg.     | —                                                                | (2)        |
| alg.  | alg.   | tran.    | $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$                                            | (3)        |
| alg.  | tran.  | rac.     | $\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3$                               |            |
| alg.  | tran.  | alg.     | $\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}} = \sqrt{3}$                 |            |
| alg.  | tran.  | tran.    | $\sqrt{2}^{\sqrt{2} \log_{\sqrt{2}} 3} = 3^{\sqrt{2}}$           |            |
| tran. | rac.   | rac.     | —                                                                | (4)        |
| tran. | rac.   | alg.     | —                                                                | (4)        |
| tran. | rac.   | tran.    | $(2^{\sqrt{2}})^2 = 2^{2\sqrt{2}}$                               | (5)        |
| tran. | alg.   | rac.     | $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$                                  |            |
| tran. | alg.   | alg.     | $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}/4} = \sqrt{2}$                         |            |
| tran. | alg.   | tran.    | $(2^{\sqrt[4]{2}})^{\sqrt[4]{2}} = 2^{\sqrt{2}}$                 |            |
| tran. | tran.  | rac.     | $(2^{\sqrt{2}})^{\log_{2^{\sqrt{2}}} 3} = 3$                     |            |
| tran. | tran.  | alg.     | $(2^{\sqrt{2}})^{\log_{2^{\sqrt{2}}} \sqrt{3}} = \sqrt{3}$       |            |
| tran. | tran.  | tran.    | $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2} \log_{2^{\sqrt{2}}} 3} = 3^{\sqrt{2}}$ |            |

Ebből következik, hogy a cikk elején használt  $\log_2 3$  és társai is transzcendens számok. Ha ezt tudjuk, akkor már nem nehéz feladat kitölteni a táblázatunkat, csak egy kicsit meg kell variálni a logaritmusok alapját és argumentumát, hogy azok megfelelő típusúak legyenek. A táblázatban mind a 27 esetről eldöntjük, hogy lehetséges-e, és példát adunk rá, ha igen. A rac.=racionális, alg.=irracionalis algebrai, tran.=transzcendens jelöléseket használjuk, továbbá:

- (1) Ilyen nincs: algebrai szám racionális kitevős hatványa is algebrai.
- (2) Ilyen nincs (kivéve a triviális esetet): Gelfond-Schneider-tétel.
- (3) Minden alap és kitevő jó (kivéve a triviális esetet): Gelfond-Schneider-tétel.
- (4) Ilyen nincs: ha az eredmény algebrai lenne, akkor a racionális kitevő miatt az alapnak is algebrainak kellene lennie (Gelfond-Schneider-tétel).
- (5) Minden alap és kitevő jó (kivéve a triviális esetet): mivel algebrai szám racionális kitevős hatványa is algebrai, ezért transzcendens szám racionális kitevős hatványa transzcendens kell legyen.

Az olvasóra bízunk annak bizonyítását, hogy a táblázatban szereplő, logaritmus függvényt is tartalmazó kifejezések valóban transzcendens számokat adnak.

## Referencia

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Companion\\_matrix](https://en.wikipedia.org/wiki/Companion_matrix)
- [2] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Hilbert-problémák>
- [3] A. Gelfond, Sur le septième problème de Hilbert, Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na, 1934, no. 4, 623-634.
- [4] T. Schneider, Transzendenzenuntersuchungen periodischer Funktionen, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, volume 172, 1934, pp. 65-69, 70-74.

---

Makay Géza, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.,  
makayg@math.u-szeged.hu

