POLYGON
XVIII.köt., 2.sz., 2010. febr.

Niels Henrik Abel és az Abel-díj

Móricz Ferenc

1. Bevezetés: Életrajz és az eddigi díjazottak

Niels Henrik Abel, a híres norvég matematikus 1802-ben született és 1829-ben bekövetkezett haláláig három világhírű eredményt ért el, amelyeket még napjainkban is a matematika kiemelkedő teljesítményei, illetve módszerei között tartanak számon.

Ezek között az első az általános ötödfokú algebrai egyenlet gyökvonásokkal való megoldhatatlanságának bizonyítása volt 1824-ben, amely a *Ruffini-Abel tétel* néven vonult be a matematika történetébe. *Paolo Ruffini* (1765-1822) olasz orvos és egyben műkedvelő matematikus volt, aki először adott a fentebb említett egyenlet megoldhatatlanságára hiányos bizonyítást. Abel hibátlan bizonyítását egy tömör hatoldalas cikkben írta meg, amely az 1826-ban induló Crelle Journal 1. kötetében jelent meg nyomtatásban. Ezen folyóiratot *August Leopold Crelle* (1780-1855) német matematikus és kiadó alapította a „Journal für die reine und angewandte Mathematik" címmel, amelynek szószerinti magyar fordítása a következő: „Folyóirat a tiszta (azaz elméleti) és alkalmazott matematika számára". Az alapítójára való utalással röviden Crelle Journal-nak nevezett folyóirat több, mint 100 éven át a világ legrangosabb matematikai folyóirata volt, és még napjainkban is a legrangosabb matematikai folyóiratok egyike. Abel teljesítményének elismerését mutatja az a tény is, hogy róla nevezték el *Abel csoportnak* azon algebrai strukturákat, amelyekben egy kommutatív, asszociatív és invertálható művelet van értelmezve. Mindezekről a 2. részben részletesen írunk.

Ugyancsak Abel nevéhez fűződik a $\sum u_k v_k$ alakú véges összegek ún. *Abel átrendezése*, amelyet ő alkalmazott először a szintén róla elnevezett *Abel folytonossági tétel* bizonyításában. Ez a tétel konvergens hatványsoroknak a konvergencia intervallum végpontjaiban való viselkedésére vonatkozik, amelyet a 3. részben fogunk ismertetni. Az Abel átrendezés módszerét sikerrel alkalmazták a 19. század második harmadában gyors fejlődésnek indult Fourier sorok elméletében is, amelyre ugyancsak a 3. részben adunk példát.

A harmadik terület, ahol Abel szintén alapvető eredményeket ért el, az ún. *elliptikus függvények* elmélete. Ezeket a függvényeket *Carl Gustav Jakob Jacobi* (1804-1851) német matematikus és fizikus vezette be, mint az elliptikus integrálok inverz függvényeiként. A vizsgálatokba Abel is bekapcsolódott, és az elliptikus integrálok egy speciális osztálya az *Abel integrálok* nevet viseli. Speciálisan a geometriából jólismert ellipszis ívhosszának kiszámítására szolgáló integrál is elliptikus integrál. A 4. részben ezekről adunk részletes bevezető áttekintést.

Niels Henrik Abel

Most pedig összefoglaljuk Abel rövid életpályájának főbb állomásait. Niels Henrik Abel 1802. augusztus 5-én a teológus és filozófus Soren Georg Abelnek és Ane Marie Simonsonnak fiaként született Norvégia Findø nevű szigetén egy kis falucskában, Stavanger város közelében. Hat leánytestvére volt. 1821-ben Abel ösztöndíjjal beiratkozott Christiania (ma Osló) egyetemére, amit a következő évben már el is végzett. 1825-től 1827-ig ösztöndíjjal külföldön tartózkodott, főként Párizsban, Berlinben és Göttingenben (Németország). A legyengült szervezetű Abel 10 hónapos párizsi tartózkodása alatt tüdőbajban megbetegedett. További négy dolgozatát ezen utazások alatt írta, amelyek mindegyike a már fentebb említett Crelle Journalban jelent meg. 1827-ben visszatért Norvégiába, ahol a Christiania Egyetem és Mérnökiskola docenseként dolgozott. 1829. április 6-án tuberkulózisban halt meg Norvégia Froland nevű városában.

Születésének 200. évfordulója alkalmából a norvég király és kormány Abel-díjat alapított, amit az 1900-ban alapított svéd Nobel-díj mintájára évenként adnak át a világ legkiválóbb egy vagy két matematikusának. A díj összege 6 millió norvég korona, amely közelítőleg 750 000 Euro, illetve 1 millió US Dollár értékű.

Az Abel-díj első átadására 2003-ban került sor. Az első díjazott Jean-Pierre Serre (Collège de France, Franciaország) volt, akinek kutatási eredményei kulcsszerepet játszottak a matematika több modern fejezetének kialakításában, különösen a topológiában, algebrai geometriában és számelméletben.

A 2004. évben két kitüntetett vehette át a díjat: Michael F. Atiyah (University of Edinburgh, Egyesült Királyság) és Isadore M. Singer (Massachusetts Institute of Technology, az ún. MIT, USA) az index tétel felfedezéséért és bizonyításáért, amely a topológia, geometria és analízis több területét összekapcsolta; és kiemelkedő szerepükért a matematika és elméleti fizika kapcsolatának további erősítéséért.

2005-ben a magyar származású Peter D. Lax-nek (Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, USA) ítéltél oda a díjat a parciális differenciálegyenletek elméletében, megoldásainak numerikus kiszámításában és alkalmazásaiban áttörést jelentő eredményeiért.

2006-ban Lennart Carleson (Royal Institute of Technology, Svédország) kapta a díjat alapvető és fejlődést elindító hozzájárulásaiért a harmonikus anaízisben és a síma dinamikus rendszerek elméletében.

2007-ben az indiai származású Srinivasa S. R. Varadham (Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, USA) volt a díjazott a valószínűségszámításban elért alapvető eredményeiért, különösen a nagy eltérések egységesített elméletének megteremtéséért.

2008-ban ismét két kitűntetett vehette át a díjat: John Griggs Thomson (University of Florida, USA) és a vallon származású Jacques Tits (Collège de France, Franciaország) az algebrában elért mély eredményeikért, különösen a modern csoportelmélet kialakításáért.

2009-ben az orosz Mikhail Leonidovich Gromov-nak (Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette, Franciaország, és Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, USA) ítélték oda a díjat a forradalmian új geometriai vizsgálataiért.

A 2010. évi Abel-díjra való felterjesztés határideje 2009. szeptember 15. volt. Az ajánlásokat az Abel Bizottságnak kellett elküldeni, amely azokat értékelésével ellátva a Norvég Tudományos és Irodalmi Akadémiához (Norwegian Academy of Science and Letters) terjeszti fel, ahol a díj odaítéléséről döntenek. Az Abel-díjazott nevét 2010. márciusában fogják nyilvánosságra hozni.

2. A Ruffini-Abel tétel

Az algebra alaptétele biztosítja az algebrai egyismeretlenes egyenletek megoldásának egzisztenciáját a komplex számtest alapulvétele mellett. Az n-ed fokú

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

algebrai egyenletnek, ahol $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ együtthatók adott valós vagy komplex számok, a multiplicitásokkal számítva pontosan n gyöke van (amelyek általában komplex számok). Az algebrai egyenlet megoldását ilyen módon biztosított létezésétől élesen meg kell különböztetnünk azonban azt a problémát, hogy milyen módon számíthatjuk ki egy adott egyenlet gyökeit. A klasszikus algebrában az *algebrai megoldást* úgy definiáljuk, mint olyan eljárást, amely az egyenlet megoldását az egyenlet együtthatóiból kizárólag a négy alapművelet és pozitív egész kitevőjű gyökvonás véges számú lépésben történő alkalmazásával adja meg.

Középiskolai tanulmányainkból tudjuk, hogy az

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

általános *másodfokú egyenlet* gyökei mindig előállíthatók algebrailag; gondoljunk a jólismert *gyökképletre*, amely szerint

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Egyetemi tanulmányaink során megismerkedünk az

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

általános *harmadfokú egyenlet* megoldásával. Ezen egyenlet az a_0 főegyütthatóval való leosztás, majd az

$$y := x + \frac{a_1}{3a_0}$$

helyettesítéssel az

$$y^3 + py + q = 0$$

egyszerűbb alakra hozható, ahol p és q az a_0, a_1, a_2, a_3 együtthatókból egyszerűen megkapható. Ezen utóbbi egyenlet gyökeit az ún. *Cardano képlet* szolgáltatja:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Fontos tudni, hogy a képlet alkalmazásánál a két köbgyökvonás által szolgáltatott három-három értéket megfelelő körültekintéssel kell értékpárba állítanunk, hogy valóban a szóban forgó harmadfokú egyenlet gyökeit kapjuk meg. A részleteket illetően Szele Tibor kitűnő algebra könyvére utalunk.

Megjegyezzük, hogy a harmadfokú egyenlet megoldóképlete körül részben máig sem teljesen tisztázott vita alakult ki. Állítólag *Scipione del Ferro* (1465-1526), a bolognai egyetem matematika professzora megtalálta a harmadfokú egyenlet megoldóképletét. Csak barátainak beszélt róla, de nem hozta nyilvánosságra. Halálra után *Fontana Nicolo Tartaglia* [ejtsd: tártájja; egyébként Tartaglia csak a gúnyneve volt, ami dadogót jelent] (1500-1557), kiváló velencei számolómester egy tudományos párbaj során harmadfokú egyenletet oldott meg, akinek állítólag Ferro árulta el a harmadfokú egyenlet megoldásának titkát. Eljárását ő sem publikálta, hiszen ez számára „műhelytitok" volt. *Girolamo Cardano* (1501-1576), olasz orvos, fizikus és matematikus többszöri unszolására Tartaglia neki elárulta a képletet, de Cardanonak ígéretét vette a titoktartásra. Az 1545-ben megjelent *„Ars magna"* című könyvében azonban Cardano nyilvánosságra hozta a megoldást, és a képlet szezőjeként Tartagliát jelölte meg. Mégis a megszegett ígéret Tartaglia és Cardano között kölcsönös sértegetésekkel járó, óriási vitát keltett. E vitában Cardano mellé állt fiatal tanítványa, *Ludovico Ferrari* (1522-1565) és védte Tartagliával szemben az 1547-48. években. A felfedezés elfogultságoktól sem mentes története éppen Tartaglia és Ferrari vitairataiból vált ismertté 1548-ban. Ezen szövevényes történet ellenére hangsúlyozni kívánjuk, hogy az általános harmadfokú egyenlet megoldása volt az első olyan európai matematikai felfedezés, amely az ókori görög matematikai eredményeket túlszárnyalta.

Cardano „Ars magna című könyvében még *Ferrari módszere* is közlésre került, amellyel első ízben oldott meg általános *negyedfokú egyenletet* harmadfokú egyenletre való visszavezetéssel. Ettől kezdve az általános negyedfokú egyenlet megoldására is létezett gyökképlet, bár ez a képlet olyan nagyterjedelmű, bonyolult és áttekinthetetlen, hogy gyakorlatilag sokkal célszerűbb helyette a megoldási eljárás lépéseit megjegyezni.

Ezután évszázadokon át a legnagyobb erőfeszítések történtek az általános ötödfokú matematikai egyenlet megoldásainak algebrai előállítására, azaz gyökképletének megtalálására, míg végül kiderült, hogy minden ilyen törekvés eleve sikertelenségre van ítélve. *Niels Henrik Abel* (1802–1829) nevéhez fűződik annak a meglepő nevezetes eredménynek szabatos bizonyítása, hogy az *általános ötöd- és magasabbfokú egyenlet* tisztán algebrai úton nem oldható meg. Az általános ötödfokú egyenlettel kapcsolatban *Paolo Ruffini* (1765-1822) olasz orvos és műkedvelő matematikus még Abelt megelőzően, az 1799-ben megjelent *„Az egyenletek elmélete..."* című könyvében mondta ki ezt a tételt, amely akkor forradalmi jelentőségű volt. Ruffini azonban még nem adott teljesen precíz bizonyítást rá. Az első kifogástalan bizonyítást Abel találta meg, ezért nevezzük ezt a tételt *Ruffini-Abel tételnek*.

Mai szemmel nézve a Ruffini-Abel tétel már nem tűnik annyira megdöbbentőnek, mint felfedezésének korában. Ezen tétel valódi jelentése ma már egyszerűen az, hogy az egyenletek algebrai megoldásának definíciója olyan kevés eszköz használatát engedi meg, hogy kizárólag ezek használatával nem állíható elő bármely algebrai egyenlet megoldása. A Ruffini-Abel tétel természetesen azt nem zárja ki, hogy a négy alapművelet és gyökvonás alkalmazása mellett más eszköz igénybevételével ki lehessen számítani magasabb fokú egyenletek megoldásait is az egyenlet együtthatóiból. Például, a numerikus matematikából jól ismert Newton-Raphson iterációs módszerrel tetszőleges fokszámú algebrai egyenlet valós gyökei előre megadott pontosságig gyorsan meghatározhatók. Megjegyezzük, hogy már a harmad- és negyedfokú egyenletek algebrai úton történő megoldása is többnyire olyan sok számítási nehézséggel jár, hogy a gyakorlatban ezeket is a numerikus matematika iterációs módszereivel oldják meg.

A Ruffini-Abel tétellel kapcsolatban még egy megjegyzést teszünk. A tétel azt állítja, hogy egy algebrai egyenlet gyökei nem minden esetben számíthatók ki az egyenlet együtthatóiból a négy alapművelet és gyökvonás útján, amennyiben az egyenlet fokszáma négynél nagyobb. Ugyanekkor ez nem zárja ki annak lehetőségét, hogy a negyedfokúnál magasabb fokú algebrai egyenletek közül bizonyos egyszerűbb típusúak gyökeit a négy alapművelet és gyökvonás véges számú lépésben történő alkalmazásával mégis kiszámíthatjuk. Például az ötödfokú

$$x^5 - 1 = 0$$

egyenlet is megoldható algebrai úton. Világos, hogy ez (mint bármelyik $x^n - 1 = 0$ egyenlet) *reciprok egyenlet*, azaz, bármelyik $x = \alpha$ gyökével együtt $x = 1/\alpha$ is gyöke az egyenletnek, mégpedig ugyanazon multiplicitással. Az $x = 1$ nyilván gyöke a fenti ötödfokú egyenletnek. Az $(x - 1)$ gyöktényezővel való osztással az

$$\frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

negyedfokú egyenlethez jutunk. Mivel $x = 0$ ennek nem gyöke, ezért az x^2-tel való osztás nem vezet gyökvesztéshez. Az így kapott

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \end{aligned}$$

egyenlet az

$$y := x + \frac{1}{x}$$

helyettesítéssel az

$$y^2 + y - 1 = 0$$

másodfokú egyenletbe megy át, amelynek megoldásai a gyökképlet szerint

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{és} \qquad y_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Hátra van még az

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{és} \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

másodfokú egyenletek megoldása, amelyeknek gyökei a következők:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \text{és} \qquad x_{3,4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Ezek alkotják az $x_5 = 1$ gyökkel együtt a fentebbi ötödfokú egyenlet gyökeit. Egyébként ezek az ún. ötödik egységgyökök és a fenti ötödfokú egyenlet megoldásának visszavezetése másodfokú egyenletek megoldására teszi lehetővé a szabályos ötszög szerkesztését körző és vonalzó segítségével.

Tehát algebrai módszerrel akkor tudunk négynél magasabb fokú egyenletet megoldani, ha valamilyen fogással sikerül alacsonyabb fokúra visszavezetni az egyenlet megoldását. Mivel negyedfokú egyenleteket még meg tudunk algebrailag oldani, a fentebb látott $y := x + \frac{1}{x}$ helyettesítéssel az

$$x^n - 1 = 0$$

egyenlet még az $n = 6, 7, 8$ és 9 esetekben is megoldható algebrai módszerrel.

Befejezésül megemlítjük, hogy az algebrai egyenletek algebrai megoldhatóságának teljesen áttekinthető, világos és a dolgok gyökerét megvilágító, mély elmélete *Évariste Galois* [ejtsd: gáloá] (1811-1832) francia matematikustól származik, aki szintén a 19. század első felében élt és fiatalon halt meg, mint Abel. Az ún. *Galois elmélet* mindmáig a modern algebra egyik legszebb fejezete.

3. Abel folytonossági tétele

Legyen $\{a_k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ adott valós számsorozat (az egyszerűség kedvéért, bár komplex számsorozatot is vehetnénk), és tekintsük a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots =: f(x) \tag{1}$$

hatványsort, amelynek konvergenciasugara $R > 0$. Jól ismert, hogy az (1) hatványsor abszolút és egyenletesen konvergál mindegyik $[-r, r]$ intervallumon, ahol $0 < r < R$. Viszont a konvergenciaintervallum $x = \pm R$ végpontjaiban (feltéve, hogy $R < \infty$) a hatványsor konvergálhat is, de divergálhat is. Például, a

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < R := 1,$$

geometriai hatványsor az $x = \pm 1$ végpontokban divergál. Viszont a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \qquad |x| < R := 1,$$

hatványsor az $x = 1$ végpontban divergál (mivel a $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ harmonikus sor divergens), míg az $x = -1$ végpontban konvergál (mivel a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ alternáló előjelű harmonikus sor Leibniz tétele szerint konvergens). De az is előfordulhat, hogy a hatványsor a $(-R, R)$ konvergenciaintervallum mindkét végpontjában konvergál; ilyen hatványsor például

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, \qquad |x| < R := 1.$$

Tudjuk, hogy ha a hatványsor konvergenciasugara $R > 0$, akkor a hatványsor $f(x)$ összege a konvergenciaintervallum belsejében, azaz a $(-R, R)$ nyitott intervallum pontjaiban differenciálható, így szükségképpen folytonos is. *Abel folytonossági tétele* azt mondja ki, hogy ha a hatványsor a konvergenciaintervallum valamelyik végpontjában is konvergens, akkor az $f(x)$ összegfüggvénye még abban a végpontban is folytonos (vagy balról, vagy jobbról attól függően, hogy melyik végpontról van szó). Ezen tételt képletekkel a következőképpen fogalmazzuk meg.

1. Tétel (Abel folytonossági tétele). *Legyen az* (1) *hatványsor konvergenciasugara* $R > 0$. *Ha a hatványsor az* $x = R$ *helyen is konvergens és összege itt* s, *azaz*

$$s := f(R) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k R^k, \tag{2}$$

akkor a hatványsor $f(x)$ *összege az* $x = R$ *helyen balról folytonos, képletben:*

$$\lim_{x\to R-0} f(x) = f(R).$$

Nyilvánvaló, hogy hasonló állítás érvényes az $x = -R$ helyen is, ha ott a hatványsor konvergens (amely esetben jobboldali folytonosság áll fenn).

1. Tétel bizonyítása. Vezessünk be új változót:

$$r := \frac{x}{R}, \qquad \text{azaz} \qquad x = rR.$$

Nyilvánvaló, hogy ha $0 < x < R$, akkor $0 < r < 1$; és mivel $x \to R - 0$, ezért $r \to 1 - 0$. Jelöljük $s_n(x)$-szel a hatványsor n-edik részletösszegét:

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

és legyen

$$s_n := s_n(R) = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Egyből látható, hogy

$$s_0 = a_0 \quad \text{és} \quad s_n - s_{n-1} = a_n R^n, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

így az $s_n(x)$ részletösszeg képletét a következő módon is felírhatjuk:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= s_n(rR) = a_0 + a_1 rR + a_2 r^2 R^2 + \cdots + a_n r^n R^n \\ &= s_0 + (s_1 - s_0)r + \cdots + (s_{n-1} - s_{n-2})r^{n-1} + (s_n - s_{n-1})r^n \\ &= s_0(1 - r) + s_1(r - r^2) + \cdots + s_{n-1}(r^{n-1} - r^n) + s_n r^n \\ &= (1 - r)(s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots + s_{n-1} r^{n-1}) + s_n r^n \\ &= (1 - r) \sum_{k-0}^{n-1} s_k r^k + s_n r^n. \end{aligned} \tag{3}$$

Ezt az átlakítást azóta is *Abel átrendezésnek* nevezzük, mivel Abel alkalmazta először a Crelle Journalban megjelent dolgozatában.

Feltevésünk szerint az $\{s_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ sorozat konvergens (amelynek határértéke $s := f(R)$), ezért az $\{s_n\}$ sorozat korlátos. Tekintve, hogy $0 < r < 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} s_n r^n = 0.$$

Tehát rögzített $x = rR \in (0, R)$ esetén $0 < r < 1$, és így (3)-ból az $n \to \infty$ határmenettel az következik, hogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k \quad \text{sor is konvergens és}$$

$$f(rR) = \lim_{n\to\infty} s_n(rR) =: (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k, \quad 0 < r < 1. \tag{4}$$

A geometriai sor jólismert képlete szerint

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad -1 < r < 1.$$

Ezért írhatjuk, hogy

$$f(R) = s = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s r^k. \tag{5}$$

A (4) és (5) egyenlőségek különbségeként kapjuk, hogy

$$f(x) - s = f(rR) - f(R) = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) r^k.$$

Ez utóbbi előállítás alapján a tétel bizonyítása már egyszerű. E célból a jobb oldalon álló összeget két részre vágjuk szét:

$$f(x) - s = (1-r)\sum_{k=0}^{n_0} (s_k - s) r^k + (1-r)\sum_{k=n_0+1}^{\infty} (s_k - s) r^k, \tag{6}$$

ahol az n_0 majd alkalmasan választott természetes szám lesz.

A feltevés szerint $s_k \to s$, ha $k \to \infty$. Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy

$$|s_k - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha} \quad k > n_0.$$

Nyilván bármely $0 < r < 1$ esetén fennáll az, hogy

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=n_0+1}^{\infty}(s_k - s)r^k\Big| &\leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty}|s_k - s|r^k < \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n_0+1}^{\infty}r^k = \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{r^{n_0+1}}{1-r} < \frac{\varepsilon}{2(1-r)}, \quad 0 < r < 1,\end{aligned} \tag{7}$$

mégpedig az n_0 választásától függetlenül. Másrészt, az

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n_0}(s_k - s)r^k$$

(n_0+1)-ed fokú polinom az r változóban, és így a számegyenes bármely pontjában folytonos; tehát az $r = 1$ pontban is folytonos, amely pontban a polinom értéke zérus. Következésképpen, fennáll a

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\sum_{k-0}^{n_0}(s_k - s)r^k = 0$$

határérték. Ezért a fenti ε-hoz megadható olyan $\delta < 1$ pozitív szám, amelyre

$$\Big|(1-r)\sum_{k=0}^{n_0}(s_k - s)r^k\Big| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha} \quad 1-\delta < r < 1. \tag{8}$$

Összefoglalva, a (7) és (8) egyenlőtlenségek felhasználásával (6)-ból következik, hogy

$$|f(rR) - f(R)| = |f(x) - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 1-\delta < r < 1.$$

Mivel tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható ilyen $0 < \delta < 1$ szám, ezért fennáll a

$$\lim_{r\to 1-0} f(rR) = \lim_{x\to R-0} f(x) = f(R)$$

határérték. Ezzel a tétel állítását bebizonyítottuk. ■

Megjegyzés. A tétel megfordítása már nem áll fenn; azaz, ha egy hatványsor konvergenciasugara $R > 0$ és a hatványsor összege a konvergenciaintervallum jobboldali végpontjában balról folytonos, akkor a hatványsor az $x = R$ végpontban már nem feltétlenül konvergens. Például, a

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots = \frac{1}{1+x}, \quad -1 < x < 1,$$

hatványsor összege folytonos a konvergenciaintervallum jobboldali végpontjában:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

de ez a hatványsor az $x = 1$ pontban divergens:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots.$$

A (3) képletsorban előforduló átalakítást *Abel átrendezésnek* (angolul: Abel's transformation) szokás nevezni, mivel ezt az eljárást ő alkalmazta először híres klasszikus tételének bizonyításában. A hatványsortól elvonatkoztatva, az Abel átrendezés általános képlete a következő:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

ahol

$$U_k := u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \tag{10}$$

vagy még általánosabb formában (amelyet hamarosan mi is alkalmazni fogunk) a következő:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k &= u_{m+1}v_{m+1} + u_{m+2}v_{m+2} + \cdots + u_n v_n \\
&= (U_{m+1} - U_m)v_{m+1} + (U_{m+2} - U_{m+1})v_{m+2} + \cdots \\
&\qquad + (U_{n-1} - U_{n-2})v_{n-1} + (U_n - U_{n-1})v_n \\
&= -U_m v_{m+1} + U_{m+1}(v_{m+1} - v_{m+2}) + \cdots \\
&\qquad + U_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + U_n v_n \\
&= -U_m v_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n,
\end{aligned} \tag{11}$$

ahol $\{u_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$ és $\{v_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$ tetszőleges valós (vagy akár komplex) számsorozatok, $m \geq -1$ és $n \geq m+2$ egész számok.

Mivel a (11) képlet a parciális integrálás

$$\int_a^b u(x)V(x)dx = \big[U(x)V(x)\big]_{x=a}^b - \int_a^b U(x)v(x)dx$$

képletére emlékeztet, ahol

$$U'(x) = u(x) \qquad \text{és} \qquad V'(x) = v(x), \quad a \leq x \leq b,$$

ezért az Abel átrendezést *parciális összegzésnek* (angolul: summation by parts) is szokás nevezni.

Az alábbi két korollárium számos esetben haszonnal alkalmazható, amelyekben előforduló egyenlőtlenséget *Abel egyenlőtlenségnek* nevezik.

1. Korollárium. *Ha nemnegatív számok $\{v_k\}$ sorozata monoton csökkenő:*

$$v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \cdots \geq v_n \geq 0,$$

akkor

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k\Big| \leq 2v_{m+1} \max_{m+1\leq k\leq n} |U_k|, \quad 0 \leq m < n-1. \tag{12}$$

Ennek bizonyítása (12) alapján roppant egyszerű:

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k\Big| &= \Big| - U_m v_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1} + U_n v_n\Big| \leq \\ &\leq |U_m| v_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} |U_k|(v_k - v_{k+1}) + |U_n| v_n \leq \\ &\leq \Big(\max_{m+1\leq k\leq n} |U_k|\Big)\{v_{m+1} + (v_{m+1} - v_{m+2}) + \cdots \\ &\qquad\qquad + (v_{n-1} - v_n) + v_n\} = \\ &= 2v_{m+1} \max_{m+1\leq k\leq n} |U_k|.\end{aligned}$$

■

2. Korollárium. *Ha nemnegatív számok $\{v_k\}$ sorozata monoton növekvő:*

$$0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n,$$

akkor

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k\Big| \le 2v_n \max_{m+1\le k\le n} |U_k|, \quad 0 \le m < n-1.$$

Ezt az 1. Korolláriumhoz hasonlóan bizonyíthatjuk.

Az 1. Korolláriumra támaszkodva bizonyítjuk a következő tételt, amely végtelen trigonometrikus sorok konvergenciájára ad elegendő feltételt.

2. Tétel. *Ha*

$$a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_k \ge \ldots \ge 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

akkor az

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \qquad \textit{és} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

trigonometrikus sorok egyenletesen konvergálnak a $\delta \le x \le 2\pi - \delta$ *intervallumon tetszőleges* $0 < \delta < \pi$ *esetén.*

Bizonyítás. A *koszinusz sor* esetében legyen

$$u_0 := \frac{1}{2}, \quad u_k := \cos kx \quad \text{és} \quad v_k := a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Először az

$$U_n(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

összegekre adunk zárt képletet. E célból szorozzuk meg ezen egyenlőség mindkét oldalát $2\sin\frac{x}{2}$-vel és alkalmazzuk a

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

azonosságot. Nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big)U_n(x) &= \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \cdots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx \\ &= \sin\frac{x}{2} + \Big(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\Big) + \cdots + \Big(\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2}\Big) \\ &= \sin\frac{(2n+1)x}{2},\end{aligned}$$

lévén a fenti összeg ún. teleszkópikus összeg, amelyben a zárójelek felbontása és az összevonások elvégzése során a tagok kölcsönösen kioltják egymást, egy tag kivételével. Tehát

$$U_n(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{és} \quad 0 < x < 2\pi.$$

Megemlítjük, hogy a Fourier sorok elméletében ezen $U_n(x)$-et a *Dirichlet magfüggvénynek* nevezik és $D_n(x)$-szel jelölik.

Nyilvánvaló, hogy

$$\text{(15)} \qquad \left|U_n(x)\right| \le \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \le \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}}, \quad \text{ha} \quad \delta \le x \le 2\pi - \delta.$$

Ezen előzmények után tekintsük a koszinusz sor

$$s_n(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

részletösszegeinek sorozatát. A konvergencia bizonyítását a Cauchy konvergencia-kritérium alapján végezzük. Legyen $0 \le m < n$. A (13) és (14) jelöléseket használva, a (12) és (15) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\begin{aligned}
\left|s_n(x) - s_m(x)\right| &= \Big| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \cos kx \Big| \\
&= \Big| -U_m(x) a_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} U_k(x)(a_k - a_{k+1}) + U_n(x) a_n \Big| \le \\
&\le 2a_{m+1} \max_{m+1 \le k \le n} \left|U_k(x)\right| \le \frac{a_{m+1}}{\sin \frac{\delta}{2}}, \quad \text{ha} \quad \delta \le x \le 2\pi - \delta.
\end{aligned}$$

Feltevés szerint $a_{m+1} \to 0$, ha $m \to \infty$. Tehát

$$\left|s_n(x) - s_m(x)\right| \to 0, \quad \text{ha} \quad m, n \to \infty,$$

mégpedig az $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ pontok esetében egyenletesen. Ezzel beláttuk, hogy a koszinusz sor részletösszegeinek $\{s_n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ sorozata egyenletesen Cauchy sorozat a $[\delta, 2\pi - \delta]$ intervallumon. Ezért ott a koszinusz sor konvergens és a konvergencia egyenletes.

A *szinusz sorra* vonatkozó állítást hasonló módon tudjuk bebizonyítani. Az

$$\widetilde{U}_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin kx, \quad n = 1, 2, \dots$$

összegekre szintén úgy adhatunk zárt képletet, hogy ezen egyenlőtlenség mindkét oldalát $2\sin\frac{x}{2}$-vel szorozzuk, és a

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

azonosságot alkalmazzuk. Ezáltalán nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big)\widetilde{U}_n(x) &= 2\sin\frac{x}{2}\sin x + \cdots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx\\ &= \Big(\cos x - \cos\frac{3x}{2}\Big) + \cdots + \Big(\cos\frac{(2n-1)x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\Big)\\ &= \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2},\end{aligned}$$

mivel a fenti összeg is teleszkópikus összeg. Tehát

$$\widetilde{U}_n(x) := \sum_{k=1}^{m} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad n = 1, 2\ldots \quad \text{és} \quad 0 < x < 2\pi.$$

Ezen $\widetilde{U}_n(x)$-et a Fourier sorok elméletében a *konjugált Dirichlet magfüggvénynek* nevezik, és $\widetilde{D}_n(x)$-szel jelölik. A (15) egyenlőtlenséghez hasonólan most az áll fenn, hogy

$$\Big|\widetilde{U}_n(x)\Big| \le \frac{2}{2\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}, \quad \text{ha} \quad \delta \le x \le 2\pi - \delta.$$

Ezen egyenlőtlenségre támaszkodva, a bizonyítást ugyanúgy fejezzük be, mint a koszinusz sor esetében. Ennek átgondolásást az olvasóra bízzuk. ■

4. Elliptikus függvények és elliptikus integrálok

Egy elliptikus függvény a komplex számsíkon definiált olyan komplex-értékű függvény, amely két irányban is periodikus (röviden: kétszeresen periodikus). Történetileg az elliptikus függvényeket mint az elliptikus integrálok inverz függvényeiként vezették be. Speciálisan az ellipszis ívhosszának kiszámítására szolgáló integrál is elliptikus integrál; innen ered elnevezésük. Elsőként Carl Jacobi, német matematikus és fizikus vezette be az elliptikus függvényeket és az ún. théta függvényeket. Az utóbbiak ugyan nem kétszeresen periodikusak, de az idők során nagyon hasznosnak bizonyultak különféle problémák egységes tárgyalásában. Mi is ezt a „modern" tárgyalásmódot követjük az alábbi vázlatos ismertetésünkben.

Az ún. *théta függvények* bevezetésével kezdjük az ismertetést, amelyek közül kettő a *hővezetés* (angolul: heat conduction) egyenletének megoldásával kapcsolatos. Tegyük fel, hogy olyan nagyméretű szilárd anyag tölti ki a háromdimenziós derékszögű koordinátarendszernek a $z = 0$ és $z = \pi$ síkok által határolt részét, nevezzük ezt a formációt *lemeznek*, amelyben az anyag hőmérséklete az x és y koordinátáktól nem függ; tehát a hő áramlása csak a z-tengellyel párhuzamosan történhet. Jelöljük θ-val az anyag hőmérsékletét, amely a fenti feltevés szerint csak a hely z koordinátájától és a t időpillanattól függ. Az elméleti fizika törvényeiből levezethető, hogy a hővezetés fizikai folyamatát a

$$\kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{16}$$

parciális differenciálegyenlet írja le, ahol $\theta = \theta(z,t))$ és κ az ún. hővezetési együttható, amely a szóbanforgó anyagra jellemző állandó.

Megjegyezzük, hogy a hivatalos brit hőegység neve „therm” és ennek a szónak a kezdőbetűje a görög ábécé θ-val jelölt „théta” betűje. A magyar nyelvben is használt termosz (=hőpalack), termosztát (=hőszabályzó), termodinamika (=elméleti hőtan), stb. szavak is a görög nyelvből erednek.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a (16) differenciálegyenlet megoldása a

$$\theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \tag{17}$$

peremfeltételt és a

$$\theta(z,0) = f(z), \quad 0 < z < \pi, \tag{18}$$

kezdetiérték feltételt elégíti ki, ahol $f(z)$ integrálható függvény(Riemann vagy Lebesgue szerint) a $[0,\pi]$ intervallumon. Jól ismert, hogy ha a változók szétválasztásának módszerével oldjuk meg a (16) differenciálegyenletet, miközben a (17) és (18) feltételeket is figyelembe vesszük, akkor a megoldást a

$$\theta(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\kappa t} \sin nz$$

végtelen sor szolgáltatja, amelyben a b_n együtthatók a (18) kezdetiérték feltételben szereplő $f(z)$ függvény szinusz Fourier együtthatói:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(z) \sin nz \, dz, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Abban a speciális esetben, amikor

$$f(z) = \pi \delta\Big(z - \frac{\pi}{2}\Big), \tag{20}$$

ahol $\delta(z)$ a *Dirac egységnyi impulzus* függvény (az ún. Dirac delta) és a $z = 0$ és $z = \pi$ síkok által határolt részt kitöltő lemez kezdeti hőmérséklete mindenütt zérus, kivéve a $z = \pi/2$ középsík (lap) kicsiny környezetét, amelyben a hőmérséklet nagyon magas (például annak következtében, hogy a $t = 0$ időpillanatban erre a részre nagy mennyiségű hőt injektálunk be). Az ún. *disztribúció elmélet* szerint, ebben a speciális esetben (19) a következő alakú lesz:

$$b_n = 2\int_0^\pi \delta\Big(z - \frac{\pi}{2}\Big)\sin nz\,dz = 2\sin\Big(\frac{1}{2}n\pi\Big), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

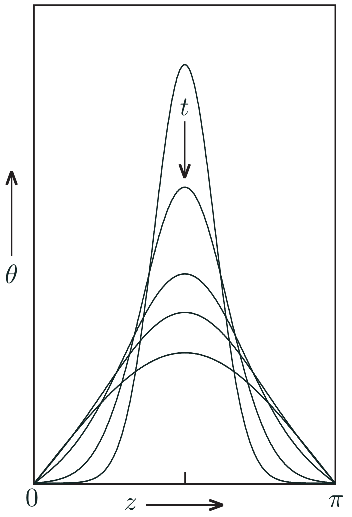
Mivel

$$\sin\Big(\frac{1}{2}n\pi\Big) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros szám,} \\ (-1)^m, & \text{ha } n = 2m+1 \text{ páratlan szám;} \end{cases}$$

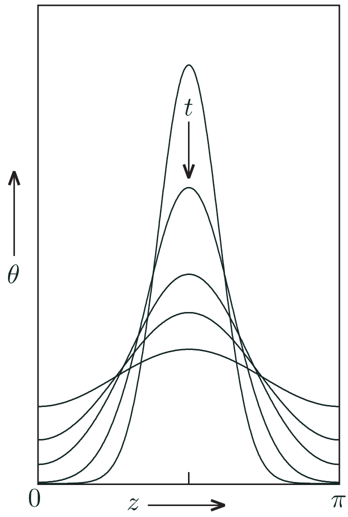
ezért a (17) peremfeltétel és (18) kezdetiérték feltétel esetén a hőterjedést a

$$\theta(z,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{(2n+1)^2\kappa t}\sin(2n+1)z \tag{21}$$

végtelen sor írja le.



1. ábra



2. ábra

A $\theta = \theta(z,t)$ hőmérsékletnek a z helytől való függését az 1. Ábrán mutatjuk be. Ezen jól látható, hogy a t idő múlásával a hő egyre jobban szétterjed a középponti $z = \pi/2$ rétegtől a határrétegek irányában, és $t \to \infty$ esetén az egész lemez hőmérséklete zérussá válik, mivel a $z = 0$ és $z = \pi$ síklapok által határolt lemezből a hő kiáramlik a két határlapon.

Ha bevezetjük a

$$q := e^{-4\kappa t} \tag{22}$$

jelölést, akkor a (20) képletben szereplő sor a

$$\theta = \theta_1(z, q) := 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n + 1)z \tag{23}$$

alakot veszi fel, és ez az ún. *első théta függvény* definíciója.

A következőkben azt tételezzük fel, hogy a $z = 0$ és $z = \pi$ síkokkal határolt lemez hőszigetelt, vagyis a hő nem áramolhat ki a két határrétegen, akkor a (17) peremfeltétel helyett az alábbi peremfeltétellel kell számolnunk:

$$\frac{\partial\theta(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial\theta(\pi, t)}{\partial t} = 0, \qquad t > 0. \tag{24}$$

Ha a kezdeti feltételt most is (18)-cal adjuk meg, akkor a (16) differenciálegyenlet megoldását a

$$\theta(z, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\kappa t} \cos nz$$

végtelen sor adja meg, amelyben az a_n együtthatók a (18) kezdeti feltételben szereplő $f(z)$ függvény koszinusz Fourier együtthatói:

$$a_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(z) \cos nz \, dz, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Abban a speciális esetben, amikor $f(z)$ éppen a (20) képlettel megadott függvény, akkor (25) a következő alakú lesz:

$$a_n := 2 \int_0^{\pi} \delta\Big(z - \frac{\pi}{2}\Big) \cos nz \, dz = 2 \cos\Big(\frac{1}{2} n\pi\Big).$$

Mivel

$$\cos\Big(\frac{1}{2} n\pi\Big) = \begin{cases} (-1)^m & \text{, ha } n = 2m \text{ páros szám,} \\ 0 & \text{, ha } n \text{ páratlan szám;} \end{cases}$$

ezért a (24) peremfeltétel és (18) kezdeti feltétel esetén a hőterjedést a

$$\theta(z, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n)^2\kappa t} \cos(2nz)$$

végtelen sor írja le; majd bevezetve a (22)-beli jelölést, a

$$\theta = \theta_4(z, t) := 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} \cos(2nz) \tag{26}$$

végtelen sor adja meg, és ez az ún. *negyedik théta függvény* definíciója.

Most a $\theta = \theta(z, t)$ hőmérsékletnek a z helytől való függését a 2. Ábrán mutatjuk be. Ezen jól látható, hogy a t idő múlásával a hő ismét egyre jobban szétterjed a középponti $z = \pi/2$ rétegtől a határrétegek irányában, de ebben az esetben a $z = 0$ és $z = \pi$ síkok hőszigetelése következtében a lemez hőmérséklete egyre jobban kiegyenlítődik és $t \to \infty$ esetén egyensúly áll be.

A hőterjedés fizikai problémájának megoldása után, az *első théta függvényt* a (23) sorral definiáljuk minden z és q komplex számra, amelyre $|q| < 1$. Ha a szinusz függvényt az *Euler-Moivre képlet* által adott

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\frac{i}{2}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big)$$

egyenlőség jobboldalával helyettesítjük, akkor a

$$\theta_1 = \theta_1(z, q) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z}$$

képletet kapjuk. Ha a (26) képletben a koszinusz függvényt szintén az Euler-Moivre képlet által adott

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

egyenlőség jobboldalával helyettesítjük, akkor a *negyedik théta függvényre* a

$$\theta_4 = \theta_4(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2inz}$$

képletet kapjuk. A *második* és *harmadik théta függvények* definíciója pedig a következő:

$$\theta_2 = \theta_2(z, q) := 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z},$$

$$\theta_3 = \theta_3(z, q) := 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2inz}, \qquad |q| < 1.$$

Nyilvánvaló, hogy a θ_1 és θ_2 függvények 2π szerint periodikusak, a θ_3 és θ_4 függvények pedig π szerint periodikusak.

A $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ és $\operatorname{dn} u$ elliptikus függvényeket a théta függvények hányadosaival a következőképpen definiálják:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn} u &:= \frac{\theta_3(0)\theta_1(z)}{\theta_2(0)\theta_4(z)},\\
\operatorname{cn} u &:= \frac{\theta_4(0)\theta_2(z)}{\theta_2(0)\theta_4(z)},\\
\operatorname{dn} u &:= \frac{\theta_4(0)\theta_3(z)}{\theta_3(0)\theta_4(z)}, \qquad \text{ahol} \quad z := \frac{u}{\theta_3^2(0)}.
\end{aligned}$$

Az elliptikus függvényekre több olyan azonosság érvényes, amely a trigonometrikus függvényekre érvényes azonosságokra emlékeztet. Például,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1,\\
&\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1, \quad \text{ahol} \quad k := \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)};\\
&\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u = (k')^2, \quad \text{ahol} \quad k' := \frac{\theta_4^2(0)}{\theta_3^2(0)};\\
&k^2 + (k')^2 = 1.
\end{aligned}$$

Az ún. *elliptikus integrálok* kiszámítása éppen az elliptikus függvények inverzei segítségével történik. Például,

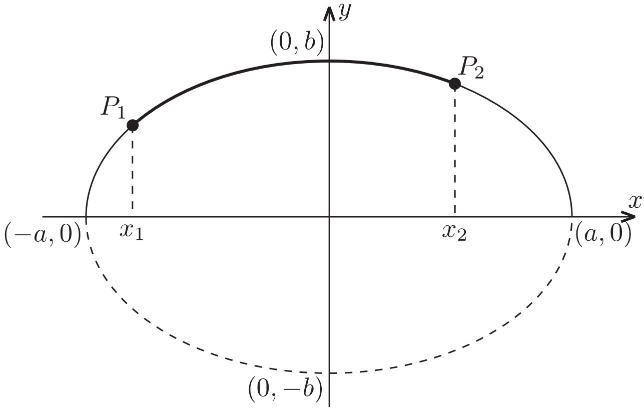
$$\begin{aligned}
&\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \operatorname{sn}^{-1}(x,k), \quad 0 \le x < 1;\\
&\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)((k')^2+k^2t^2)}} = \operatorname{cn}^{-1}(x,k), \quad 0 \le x \le 1;
\end{aligned}$$

ahol $\operatorname{sn}^{-1}(x,k) =: u$ az $\operatorname{sn} u$ függvény inverze, azaz $x = \operatorname{sn} u$. Hasonlóképpen, ha $u := \operatorname{cn}^{-1}(x,k)$, akkor $x = \operatorname{cn} u$. Ezek ún. *elsőfajú elliptikus integrálok.*

A Kalkulus elsőéves egyetemi előadásából ismert, hogy az $y = f(x)$ függvény grafikonjának az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontok közé eső ívhosszát az

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx, \qquad x_1 < x_2,$$

képlettel lehet kiszámítani; feltéve, hogy $f'(x)$ létezik és egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy korlátos is az (x_1, x_2) nyitott intervallumon.



3. ábra

A középiskola matematika tagozatos osztályában jól ismert a derékszögű koordinátarendszer origójára szimmetrikus *ellipszis* egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad -a\le x\le a \quad \text{és} \quad -b\le y\le b,$$

ahol $a>0$ és $b>0$ az ellipszis féltengelyeinek hossza (lásd az 3. Ábrán). A szimmetria következtében elegendő az ellipszisnek az x-tengely feletti részén ívhosszat számítani. Ekkor az ellipszis egyenletéből y egyértelműen kifejezhető:

$$y^2=b^2\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big)=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$
$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=:f(x), \quad -a\le x\le a.$$

Mivel

$$y'=f'(x)=\frac{b}{a}\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}, \quad -a\le x\le a,$$

az ívhossz fenti képlete szerint az ellipszis P_1 és P_2 pontjai közé eső ívének hossza:

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}dx=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{a^2-x^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2x^2}{a^2-x^2}}dx,$$

amely már egy ún. *harmadfajú elliptikus integrál.*

Az elliptikus függvények és elliptikus integrálok fogalmának születésekor Jacobi oldalán Abel is ott bábáskodott zseniális intuícióival, hiszen mindez abban az időben történt, amikor Cauchy éppen, hogy csak megfogalmazta a határérték és folytonosság szabatos definícióját.

Köszönetnyilvánítás. Ezuttal is szeretném Varga Ferencné Fekete Piroskának, a Bolyai Intézet könyvtárosának köszönetemet kifejezni, akitől számos segítséget kaptam nemcsak az [1] és [3] forrásmunkákra való figyelemfelhívásával, hanem az Abel-díjjal kapcsolatos információ gyűjtésében is.

Forrásmunkák

[1] Derek F. Lawden, Elliptic Functions and Applications, Springer, New York-Berlin-Heidelberg, 1989.
[2] Móricz Ferenc, Bevezetés a numerikus matematikába, Polygon, Szeged, 2008.
[3] Sain Márton, Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
[4] Szász Pál, Diferenciál- és integrálszámítás elemei, Typotex, Budapest, 2000.
[5] Szele Tibor, Bevezetés az algebrába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.

Móricz Ferenc, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
moricz@math.u-szeged.hu