POLYGON
XVI.köt., 1.sz., 2007. okt.

EGY ÖTLET

Rátz László tanár úr „Mathematikai gyakorlókönyv, II. kötet Geometria" című könyvéről

Pintér Lajos

Rátz László a Fasori Gimnázium volt tanára a XX. század első évtizedében „Mathematikai gyakorlókönyv"-et adott ki. Ez egy nagyon előre mutató, célratörő vállalkozás volt, hisz abban az időben ez az egész világon a ritkaságok közé tartozott. A tárgyalt feladatok zömében a Középiskolai Mathematikai Lapokban megjelentek. Több feladat túlmutat a középiskolai anyagon, így nyilvánvalóan sokat segít a tanulóknak, részben más megvilágításba is helyezi a matematikát. Amikor ezeket a feladatokat olvassuk, próbáljuk magunkat a 100 évvel ezelőtti korba képzelni. Most is érdekesek a problémák, de akkor különösen tanulságosak voltak.

Ebben a kis dolgozatban Rátz László geometriai feladatgyüjteményére kívánjuk felhívni a figyelmet. Két részlet Rátz Lászlónak a könyvhöz írt előszavából: „Mathematikai gyakorlókönyvem második kötete a mértan köréből vett feladatokat tartalmaz. Mint könyvem első kötetében, úgy e kötetben is felvettem olyan feladatokat, melyek a középiskolában tanított ismeret-kört némileg túllépik, amelyek azonban néhány elemi tétel ismeretével könnyen megoldhatók. Hogy tanulóink e feladatokat is megfejthessék, a szükséges tételeket az egyes fejezetek elején röviden ismertetem. Ilyen feladat-csoportok: a hatvány és hatványvonal, a háromszög oldalait érintő körök, a talpponti háromszög és a Feuerbach-féle kör, a Simson-féle egyenes, az Euler-féle egyenes, Ceva és Menelaos tételei. Azt hiszem, hogy e feladatok kelthetik fel leginkább tanulóink érdeklődését."

„Mathematikai gyakorlókönyvem kiadásával arra törekedtem, hogy tanulóink a középiskolában tanultakat jobban gyakorolhassák, ismeret-körüket kiegészíthessék, s a mathematikai tanulmányok irámt az eddiginél is nagyobb érdeklődést tanusíthassanak."

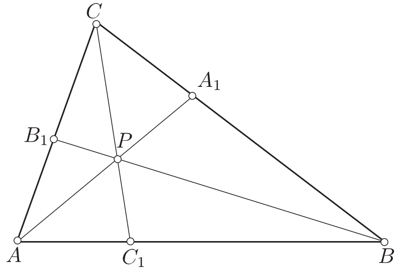
A geometria könyv két részből áll: I. rész Feladatok, II. rész Eredmények és megoldások. Az I. részbe tartozó alcímek: I. Planimetria: a) Számítások (52 feladat), b) Bizonyítások (110 feladat), c) Szerkesztések (134 feladat), d) Mértani helyek (41 feladat), e) A hatvány és hatványvonal (13 feladat); II. Trigonometria: a) Goniometria (38 feladat), A derékszögű és az egyenlőszárú háromszög (27 feladat), c) A ferdeszögű háromszög (55 feladat), d) A sokszög és a kör (27 feladat); III. A háromszög oldalait érintő körök (31 feladat), IV. A háromszögre vonatkozó vegyes feladatok (8 feladat); V. A talpponti háromszög és a Feuerbach-féle kör (22 feladat); VI. A Simson-féle egyenes (6 feladat); VII. Az Euler-féle egyenes (3 feladat); VIII. Ceva és Menelaos tételei (18 feladat); IX. Elemző mértan (33 feladat); X. Stereometria (114 feladat); XI. Maximum-minimum (18 feladat); XII. Különfélék (20 feladat).

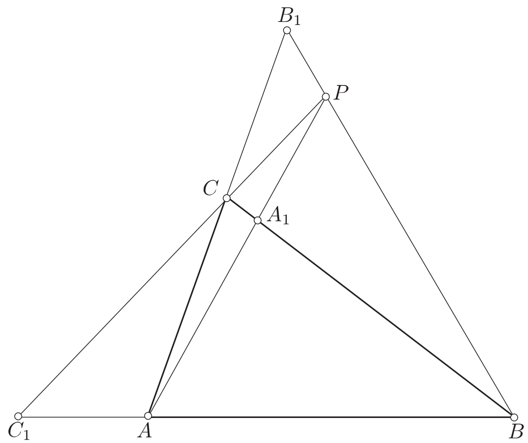
Most az I. részből (nagyon önkényesen) egy részt ragadunk ki: VIII. Ceva és Menelaos tételei. A könyvben található bevezetés így szól:

„**1. Ceva tétele:** Ha az ABC háromszög csúcsain át olyan egyeneseket rajzolunk, melyek a sík egy P pontján mennek át, akkor a szemben fekvő oldalakon, illetőleg a meghosszabbításaikon levő A_1, B_1, C_1 metszéspontok úgy osztják az oldalakat, hogy a három-három nem szomszédos szelet mértékszámainak szorzata egyenlő. Azaz:

$$A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A = A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B.$$

Ha az egyenesek P metszéspontja a háromszögön belül van, akkor az A_1, B_1 és C_1 metszéspontok a háromszög oldalain vannak; ha pedig P a háromszögön kívül van, akkor az A_1, B_1 és C_1 pontok közül az egyik a háromszög egyik oldalán, a többi kettő pedig az oldalak meghosszabbításán van. A háromszög oldalain levő metszéspontok száma tehát mindig páratlan.

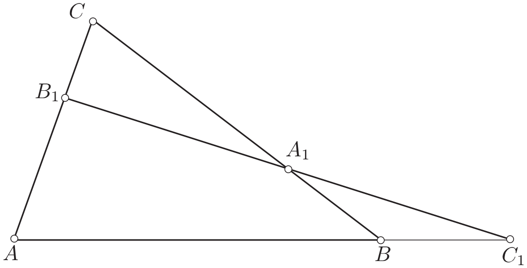




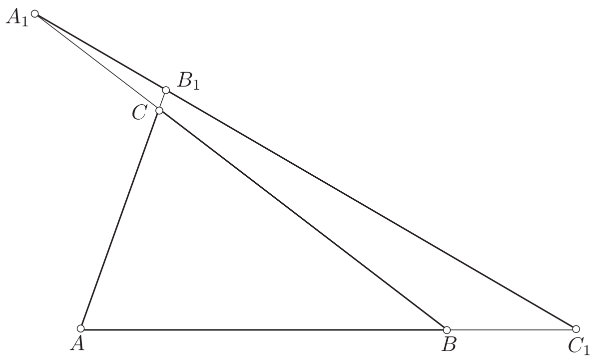
2. Menelaos tétele: Ha az ABC háromszög oldalait, vagy ezek meghosszabbításait egy tetszésszerinti egyenes a A_1, B_1, C_1 pontokban metszi, akkor a keletkező három-

három nem szomszédos szelet mértékszámainak a szorzata egyenlő, azaz

$$A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A = A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B.$$



A metsző egyenes vagy két oldalt és a harmadiknak meghosszabbítását vagy pedig mind a három oldal meghosszabbítását metszi. A háromszög oldalain levő metszéspontok száma tehát mindig páros.



3. A két tétel megfordítása: Válasszuk a háromszög oldalain vagy ezek meghosszabbításain az A_1, B_1 és C_1 pontokat úgy, hogy a keletkező három-három nem szomszédos szelet mértékszámainak a szorzata egyenlő legyen. Ha az A_1, B_1 és C_1 metszéspontok közül egy, vagy három a háromszög oldalain fekszik, akkor az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek egy P ponton mennek át; ha pedig az A_1, B_1 és C_1metszéspontok közül kettő fekszik a háromszög oldalain, vagy pedig mind a három az oldalak meghosszabbításain, akkor az A_1, B_1 és C_1 pontokon át egyenes rajzolható.

4. Ha a szeletek előjelére is tekintettel vagyunk, akkor a Ceva-féle tétel értelmében az egyes oldalak szeleteiből alakított arányok szorzata a negatív egység, azaz

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -1,$$

a Menelaos-féle tétel értelmében pedig a megfelelő arányok szorzata a pozitív egység, azaz:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1."$$

E fejezethez néhány példát írunk le. Megtartottuk a példák eredeti sorszámait és a példák után közöljük Rátz tanár úr megoldását. A feladatok sorszámai után következő 1,2 vagy 3, a példák nehézségét jelzi, 1 konnyű, 2 nehezebb, 3 több matematikai tudást, nagyobb gyakorlottságot tételez fel. Ebben az osztályozásban is megtartottuk Rátz tanár úr véleményét.

568. (2). *A háromszög belső szögeit felező egyenesek egy pontban találkoznak.*

Megoldás. $A_1B=-A_1C$; $B_1C=-B_1A$; $C_1A=-C_1B$ és így

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=(-1)^3=-1.$$

569. (2). *A háromszög belső szögeit felező egyenesek egy pontban találkoznak.*

Megoldás. (Itt a,b,c a háromszög oldalai.)

$$\frac{A_1B}{A_1C}=-\frac{c}{b};\qquad\frac{B_1C}{B_1A}=-\frac{a}{c};\qquad\frac{C_1A}{C_1B}=-\frac{b}{a},$$

és így

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=-\frac{abc}{abc}=-1.$$

571. (2). *A háromszög magasságai egy pontban találkoznak.*

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\frac{A_1B}{A_1C}=-\frac{c}{b}\frac{\cos B}{\cos C};\qquad\frac{B_1C}{B_1A}=-\frac{a}{c}\frac{\cos C}{\cos A};\qquad\frac{C_1A}{C_1B}=-\frac{b}{a}\frac{\cos A}{\cos B},$$

és így

$$\frac{A_1B}{A_1C}\frac{B_1C}{B_1A}\frac{C_1A}{C_1B}=-\frac{abc\cos A\cos B\cos C}{abc\cos A\cos B\cos C}=-1.$$

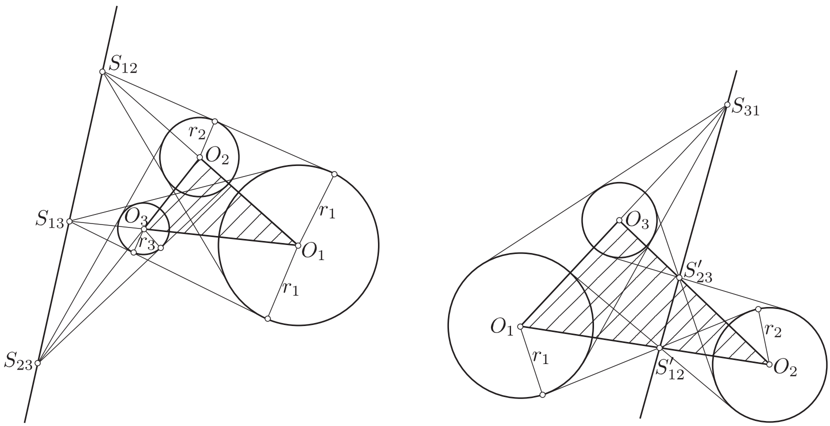
572. (2). *Három kör három külső hasonlósági pontja, nemkülönben két belső és egy külső, egy egyenesbe esik.*

Megoldás. Legyenek a körök középpontjai rendre O_1,O_2,O_3 : sugarai r_1,r_2,r_3; külső hasonlósági pontjai S_{12},S_{23},S_{31}. Minthogy a hasonlósági pontok a megfelelő centrálisokon vannak, az $O_1O_2O_3$ háromszög az, amelyre a Menelaos-féle tétel alkalmazható. Az egyes oldalakon keletkezett szeletek aránya:

$$\frac{S_{12}O_1}{S_{12}O_2}=\frac{r_1}{r_2},\qquad\frac{S_{23}O_2}{S_{23}O_3}=\frac{r_2}{r_3},\qquad\frac{S_{31}O_3}{S_{31}O_1}=\frac{r_3}{r_1}.$$

Szorzatuk:

$$\frac{S_{12}O_1}{S_{12}O_2}\frac{S_{23}O_2}{S_{23}O_3}\frac{S_{31}O_3}{S_{31}O_1}=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2r_3}=1.$$



A belső hasonlósági pontok legyenek S'_{12}, S'_{23}, S'_{31}. Egy egyenesben fekszenek ekkor egyrészt S'_{12}, S'_{23}, S_{31} másrészt S'_{23}, S'_{31}, S_{12} és S'_{31}, S'_{12}, S_{23}. Mutassuk meg a bizonyítást az első esetre. A pontok ismét az $O_1O_2O_3$ háromszög kerületén vannak elhelyezve és a szeletek aránya

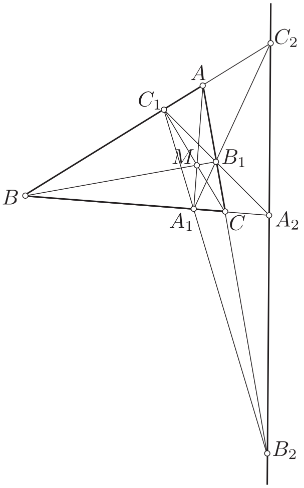
$$\frac{S'_{12}O_1}{S'_{12}O_2}=-\frac{r_1}{r_2},\qquad \frac{S'_{23}O_2}{S_{23}O_3}=-\frac{r_2}{r_3},\qquad \frac{S_{31}O_3}{S_{31}O_1}=\frac{r_3}{r_1}.$$

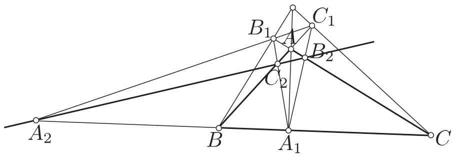
Szorzatuk:

$$\frac{S'_{12}O_1}{S'_{12}O_2}\cdot\frac{S'_{23}O_2}{S'_{23}O_3}\cdot\frac{S_{31}O_3}{S_{31}O_1}=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2r_3}=1.$$

573. (3). *Két-két magasság talppontjait összekötő egyenesek a háromszög harmadik oldalát oly pontokban metszik, amelyek egy egyenesbe esnek.*

Megoldás. Az $A_2B_2C_2$ célszerű a talpponti háromszög oldalaihoz viszonyítanunk, bár az eredetihez is lehetne.





A bizonyításnál két esetet kell megkülönböztetnünk, aszerint amint a háromszög hegyes-, vagy tompaszögű. Ha a háromszög hegyesszögű, akkor az eredeti háromszög oldalai a talpponti háromszög külső szögfelezői, melyek a szemben fekvő oldalakat úgy metszik, hogy a szeletek egyenlő irányúak és arányuk egyenlő a mellettük fekvő oldalak arányával. Tehát ha a talpponti háromszög oldalai a_1, b_1, c_1, akkor

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{c_1}{b_1}, \qquad \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = \frac{a_1}{c_1}, \qquad \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{b_1}{a_1}.$$

Szorzatuk:

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{a_1b_1c_1}{a_1b_1c_1} = 1.$$

Ha ellenben a háromszög pl. A-nál tompaszögű akkor az A oldal külső szögfelezője az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögnek, de b és c belső szögfelezők; az utóbbiak által alkotott szeletek tehát ellenkező irányúak, és arányuk egyenlő a mellettük fekvő oldalak arányával, de negatív előjellel. Tehát

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{c_1}{b_1}, \qquad \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = -\frac{a_1}{c_1}, \qquad \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = -\frac{b_1}{a_1}$$

és így

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{a_1b_1c_1}{a_1b_1c_1} = 1.$$

574. (2). *Ha az ABC háromszög oldalain az A_1, B_1, C_1 pontokat úgy választjuk, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban találkoznak, akkor az $A_1B_1C_1$*

háromszögek köré írt körnek az ABC háromszög oldalaival való újabb metszéspontjai olyan A_2, B_2, C_2 pontok, melyek a szemben fekvő csúcsokkal összekötve, egy pontban találkozó egyeneseket adnak. (Reuschle-féle tétel.)

Megoldás. Minthogy egy pontból a körhöz húzott szelők szeleteinek szorzatai egyenlők, azért

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AB_2}{AC_2}, \qquad \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BC_2}{BA_2}, \qquad \frac{CB_1}{CA_1} = \frac{CA_2}{CB_2}.$$

Ezen egyenlőségeket egymással megszorozva és az A_1, B_1, C_1 pontokra a Ceva tételét alkalmazva, ered:

$$\frac{AB_2}{CB_2} \cdot \frac{CA_2}{BA_2} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} = -1.$$

576. (3). *Az ABC derékszögű háromszög befogói fölé négyzeteket rajzolunk. CD és BF egyenesek a háromszög AH magasságát O pontban metszik. Mutassuk meg, hogy:*

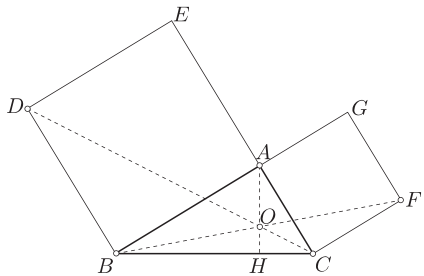
$$\frac{1}{AO} = \frac{1}{AH} + \frac{1}{BC}.$$

Megoldás. Jelöljük ama pontot, melyben a DC egyenes a háromszög AB oldalát metszi, K-val. Menelaos tételét alkalmazva kapjuk:

$$\frac{OH}{OA} \cdot \frac{KA}{KB} \cdot \frac{CB}{CH} = 1. \tag{1}$$

De

$$\frac{OH}{OA} = \frac{AH - OA}{OA},$$
$$\frac{KA}{KB} = \frac{AC}{BD} = \frac{AC}{AB},$$
$$\frac{CB}{CH} = \frac{CB}{\frac{AC^2}{BC}} = \frac{CB^2}{AC^2}.$$



Eme értékeket (1)-be téve

$$\frac{AH - OA}{OA} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{CB^2}{AC^2} = 1$$

vagy

$$\frac{AH - OA}{OA} = \frac{AB \cdot AC}{CB^2}. \tag{2}$$

De

$$\frac{AB \cdot AC}{BC} = AH$$

és így (2)-ből

$$\frac{AH - OA}{OA} = \frac{AH}{BC}.$$

A nevezőket eltávolítva:

$$AH \cdot BC - OA \cdot BC = AH \cdot OA$$

$$(AH + BC)OA = AH \cdot BC,$$

miből

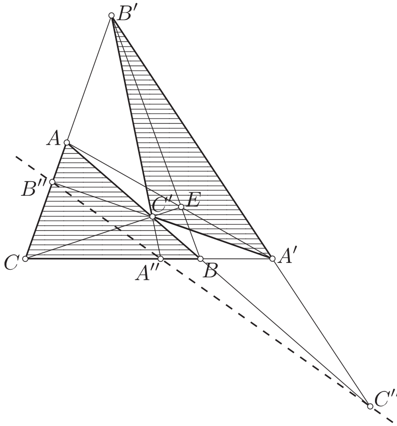
$$\frac{1}{AO} = \frac{AH + BC}{AH \cdot BC}$$

s így végre

$$\frac{1}{AO} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AH}.$$

578. (3). *Az ABC háromszög csúcspontjait összekötjük egy tetszésszerinti E ponttal; az AE, BE és CE egyenesek a háromszög oldalait A', B', C' pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az AB és $A'B'$, BC és $B'C'$, CA és $C'A'$ egyenesek metszéspontjai C'', A'' és B'' egy e egyenesbe esnek.*

Megoldás.



Az $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ szelők által metszett ABC háromszögre a Menelaos-féle tételt alkalmazva:

1) $$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC''}{BC''} = 1,$$

2) $$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB''}{AB''} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1,$$

3) $$\frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1.$$

A Ceva-tétel alapján:

4) $$\frac{CA'}{BA'} \cdot \frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} = -1.$$

1)-et, 2)-t, 3)-at és 4)-nek négyzetét egymással megszorozva:

$$\frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{CB''}{AB''} \cdot \frac{AC''}{BC''} = 1.$$

580. (3). *Ha egy háromszögnek mindegyik csúcsán keresztül két egyenest húzunk, melyek az illető csúcson átmenő szögfelezővel egyenlő szögeket zárnak be és az így nyert hat egyenes közül három egymást egy pontban metszi, akkor a többi három szintén egy pontban metszi egymást. Ha e metsző pontok közül egyik a háromszög magasságpontja, akkor a másik, a háromszög köré írható körnek középpontja; ha pedig a metszőpontok egyike végtelen távol fekszik, tehát a hat egyenes közül három párhuzamos, akkor a többi három egyenes egymást a háromszög köré írható körön metszi.*

Megoldás. Legyenek AA'' és AA', BB'' és BB', CC'' és CC' a megfelelő szögfelezőkhöz képest szimmetrikusan fekvő egyenesek; bebizonyítandó, hogy ha a Ceva-féle tétel értelmében:

1) $$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = -1,$$

akkor

2) $$\frac{C''A}{C''B} \cdot \frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} = -1.$$

Kimutatjuk, hogy

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{A'B}{A'C} = \frac{c^2}{b^2}, \qquad \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{B'C}{B'A} = \frac{a^2}{c^2}, \qquad \frac{C''A}{C''B} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Eme egyenleteket egymással megszorozva s 1)-et tekintetbe véve, csakugyan 2)-t kapjuk.

A tétel második részének bebizonyítása végett elégséges kimutatnunk azt, hogy a háromszög AA' magassága és az AO egyenes (O a háromszög köré írható kör középpontja) szimmetrikusan fekszenek a szögfelezőhöz képest. E végből nyújtsuk meg az AO sugarat, míg a kört P-ben metszi. Ekkor $ABC\sphericalangle = APC\sphericalangle$, mint ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek: így tehát $90^o - ABC\sphericalangle = 90^o - APC\sphericalangle$, vagyis $BAA'\sphericalangle = PAC\sphericalangle$, ami azt mondja, hogy OA és AA' szimmetrikusan fekszenek az A szöget felező egyeneshez képest.

Azt gondolom, hogy ez a néhány példa is jól mutatja, hogy a könyv nemcsak a maga idejében, hanem most is előre mutató, jól használható anyagot tartalmaz.

Pintér Lajos, SZTE, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
pinter@math.u-szeged.hu